

Übung 7 Beispiel 3 Daniel Herold

Given an integer J , consider the following uniform partition of $(0, 1)$:

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{J+1} = 1, \quad y_j = \frac{j}{J+1}, \quad j = 0 \dots J+1$$

Based on this partition, a domain decomposition may be obtained as follows:

$$\Omega = \sum_{i=1}^J \Omega_i \text{ with } \Omega_i = (y_{i-1}, y_{i+1})$$

Based on these subdomains, the subspaces $\mathcal{V}_i, i = 1 \dots J$ are defined by

$$\mathcal{V}_i = \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_i\}$$

If the number of subdomains J is too large, the above subspaces are not sufficient to produce an optimal algorithm. In regard to this consideration, we introduce a coarse finite element subspace \mathcal{V}_0 defined from the aforementioned partition of size $h_0 = \frac{1}{J+1}$.

Lemma For the subspaces $\mathcal{V}_i, i = 0 \dots J$ we have

$$\mathcal{V} = \sum_{i=0}^J \mathcal{V}_i$$

Furthermore there is a constant C_0 that is independent of h, h_0 or J such that for any $v \in \mathcal{V}$, there are $v_i \in \mathcal{V}_i$ that satisfy $v = \sum_{i=0}^J v_i$ and

$$\sum_{i=0}^J |v_i|_{H_1}^2 \leq C_0 |v|_{H_1}^2$$

Proof Let $I_0 : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_0$ be the nodal value interpolant. Given $v \in \mathcal{V}$, define $v_0 = I_0 v$,

$$v_1 = \begin{cases} (v - I_0 v)(x) & y_0 \leq x < y_1 \\ \frac{1}{2}(v - I_0 v)(x) & y_1 \leq x < y_2 \\ 0 & y_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

for $j = 2 \dots J-1$

$$v_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(v - I_0 v)(x) & y_{j-1} \leq x \leq y_{j+1} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

and

$$v_J(x) = \begin{cases} 0 & y_0 \leq x < y_{J-1} \\ \frac{1}{2}(v - I_0 v)(x) & y_{J-1} \leq x < y_J \\ (v - I_0 v)(x) & y_J \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Obviously $v_i \in \mathcal{V}_i$ satisfying $v = \sum_{i=0}^J v_i$.

With the H_1 seminorm $|\cdot|$ we observe that on each Intervall (y_j, y_{j+1}) of length h

$$|I_0 v|^2 \frac{1}{h} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} v' \right)^2 = \frac{1}{h} (v', 1)_{H_1}^2 \leq \frac{1}{h} (v', v')_{H_1} (1, 1)_{H_1} = |v|^2$$

We get

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^J |v_i|^2 &= |v_0|^2 + |v_1|^2 \Big|_{(0, y_1)} + \sum_{i=1}^{J-1} \left(|v_i|^2 \Big|_{(y_{i-1}, y_i)} + |v_{i+1}|^2 \Big|_{(y_i, y_{i+1})} \right) + |v_J|^2 \Big|_{(y_J, 1)} \\ &= |v_0|^2 + |v_1|^2 \Big|_{(0, y_1)} + \sum_{i=1}^{J-1} \frac{1}{2} |v_i|^2 \Big|_{(y_i, y_{i+1})} + |v_J|^2 \Big|_{(y_J, 1)} \\ &\leq |I_0 v|^2 + |v - I_0 v|^2 \\ &\leq |I_0 v|^2 + |v|^2 + |I_0 v|^2 \leq 3 |v|^2 \end{aligned}$$

**Iterative Lösung großer Gleichungssysteme,
 Übung 7, Aufgabe 4
 Lukas Kogler**

Aufgabe war es, den overlapping Additive Schwarz Preconditioner mit 2 subdomains und coarse grid correction für die 1D Poisson-Gleichung am Intervall $\Omega = (0, 1)$ zu implementieren.

Dabei wird der ursprüngliche FE-Raum V_h , der $H_0^1(\Omega)$ mit den standard Hutfunktionen und Gitterweite h diskretisiert, in zwei Arten von Räumen zerlegt:

- **Subdomain Spaces:** V_1 und V_2 diskretisieren $\Omega_1 := (0, 0.5 + H/2)$ bzw. $\Omega_2 := (0.5 - H/2, 1)$ mit Gitterweite h . (Insbesondere ist $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = H$, also "generous overlap")
- **Coarse Space:** V_0 diskretisiert, genau wie V_h $H_0^1(\Omega)$, allerdings mit fixer Gitterweite $H = 0.1$.

Seien E_i nun, wie in der Vorlesung, die Matrix-Representationen der Einbettungen von V_i in V_h .

- V_1 und V_2 sind dabei einfach zu implementieren, da sie (weil die Basisfunktionen in V_h die selben sind wie in V_1 bzw. V_2) nur einen kleinen Vektor in den Richtigen Teil eines großen Vektors schreiben müssen (also zb $V_1 = [I_{n_1} | 0]^T$)
- Bei V_0 muss man auch den Wechsel der Basisfunktionen berücksichtigen. (Die Implementierung von E_0 ist tatsächlich der umständlichste Teil der ganzen Aufgabe)

Mit den auf die Unterräume projizierten Matrizen $A_i := E_i^T A E_i$ ist dann der AS-Vorkonditionierer definiert durch:

$$B^{-1}x = \sum_i E_i A_i^{-1} E_i^T x$$

In der VO wurde bewiesen, dass der Vorkonditionierer unabhängig von h optimale Spektrale Äquivalenz aufweist.

Falls V_0 und damit die coarse grid corection weggelassen wird, sagt uns die Theorie Spektrale Äquivalenz mit Faktor $\mathcal{O}(H^{-2})$ (insbesondere, für fixes H immer noch Unabhängig von h) voraus.

Dies wird auch durch die numerischen Experimente bestätigt, die in folgender Grafik abzulesen sind (dabei wurde B als Vorkonditionierer für PCG verwendet):

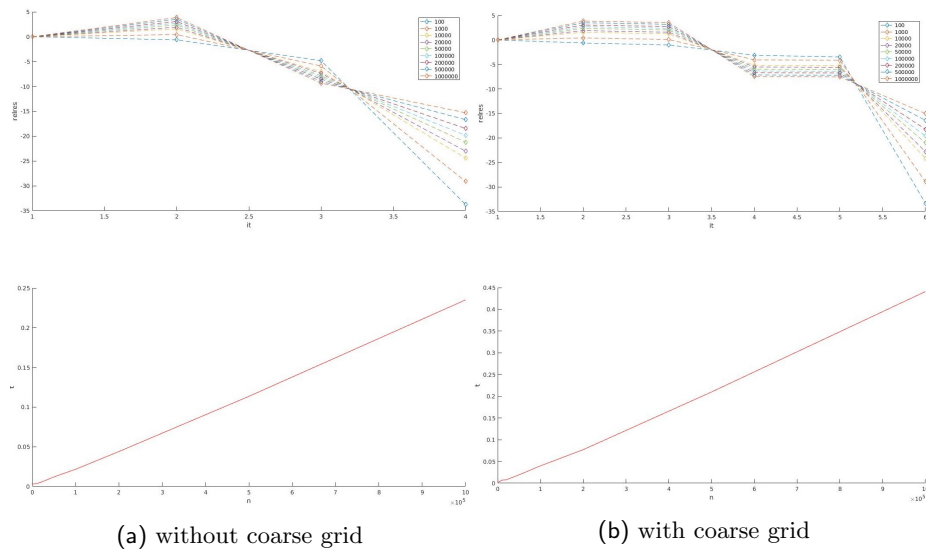


Fig. 1: oben: Iteration m vs. relative Norm des Residuums $\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|}$ für verschiedene Gitterweiten h .
unten: Problemgröße n vs Rechenzeit t

Wir können daraus den Schluss ziehen, dass **bei fixem H und fixer Anzahl an Subdomains** die coarse grid correction nicht Nötig ist. Dabei ist aber zu beachten, dass die Größe der Matrizen A_i sehr wohl mit h skaliert. In 1D kommt dieser Fakt nicht zu tragen, da die Poisson-Matrix tridiagonal ist und die subdomain-Probleme leicht zu lösen sind, in 2D bzw 3D ist man aber der effizienz wegen gezwungen, mit $h \rightarrow 0$ auch die Anzahl der subdomains zu erhöhen, wodurch die coarse grid correction wieder für optimale Spektrale Äquivalenz Nötig wird.



Iteratives Lösen linearer Gleichungssysteme - Übung 6

Tobias Danczul

22. Juni 2017

5. Beispiel

a)

Geg.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Blockstruktur

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$$

Z.z.:

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^T B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

wobei

$$S = D - C^T B^{-1} C$$

Direktes Ausmultiplizieren der ersten beiden Matrizen liefert

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C^T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & C^T B^{-1}C + S \end{pmatrix} = A$$


wobei das letzte Gleichheitszeichen unmittelbar aus der Definition von S folgt. 

Z.z.: S ist SPD


Symmetrie ist klar. Bezüglich Definitheit verweisen wir auf die Ungleichung in c).

b)


Z.z.: $\|(x_1, 0)^T\|_A = \|x_1\|_B$

$$\begin{pmatrix} x_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \|x_1\|_B^2 \quad \text{$$

Z.z.: $\|x_2\|_S = \inf_{x_1} \|(x_1, x_2)^T\|_A = \|(-B^{-1}Cx_2, x_2)^T\|_A$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_A^2 &= \begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Bx_1 + Cx_2 \\ C^T x_1 + Dx_2 \end{pmatrix} = x_1^T Bx_1 + x_1^T Cx_2 + x_2^T C^T x_1 + x_2^T \underbrace{D}_{=S+C^T B^{-1}C} x_2 \\ &= x_1^T Bx_1 + x_1^T Cx_2 + x_2^T C^T x_1 + x_2^T Sx_2 + x_2^T C^T B^{-1}Cx_2 \\ &= x_2^T Sx_2 + (x_1 + B^{-1}Cx_2)^T B(x_1 + B^{-1}Cx_2) \quad \text{$$

Dies wird minimiert bezüglich x_1 genau dann wenn der zweite Ausdruck 0 ist, also $x_1 = -B^{-1}Cx_2$.
Damit folgt

$$\min_{x_1} \|(x_1, x_2)^T\|_A^2 = \|(-B^{-1}Cx_2, x_2)^T\|_A^2 = \|x_2\|_S^2 \quad \text{$$

c)

Z.z.: $\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\min}(S) \leq \lambda_{\max}(S) \leq \lambda_{\max}(A)$

Betrachte also

$$\|x_2\|_S^2 = \inf_{x_1} \|(x_1, x_2)^T\|_A^2 \leq \|(0, x_2)^T\|_A^2 \leq \lambda_{\max}(A) \|(0, x_2)\|_2^2 = \lambda_{\max}(A) \|x_2\|_2^2$$

Mittels Division von $\|x\|_2^2$ folgt mit dem Rayleigh-Koeffizient folgt

$$\lambda_{\max}(S) \leq \lambda_{\max}(A)$$

Und weiters

$$\|x_2\|_S^2 = \inf_{x_1} \|(x_1, x_2)^T\|_A^2 \geq \lambda_{\min}(A) \inf_{x_1} \|(x_1, x_2)^T\|_2^2 = \lambda_{\min}(A) \|x_2\|_2^2$$



Analog zu erstem Fall folgt die Behauptung und ferner noch die positive Definitheit von S .

d)

(i)

Z.z.: $\forall K \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} : \tilde{A}$ ist SPD

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{B}K \\ K^T \tilde{B} & K^T \tilde{B}K + \tilde{S} \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich symmetrisch. Um die positive Definitheit einzusehen betrachten wir

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2)^T\|_{\tilde{A}}^2 &= \|x_1\|_{\tilde{B}}^2 + \|x_2\|_{\tilde{S}}^2 + x_2^T K^T \tilde{B}K x_2 + x_2^T K^T \tilde{B}x_1 + x_1^T \tilde{B}K x_2 \\ &= \|x_2\|_{\tilde{S}}^2 + \|x_1 + Kx_2\|_{\tilde{B}}^2 > 0 \end{aligned}$$



(ii)

Ges.: Preconditioner $r \mapsto \tilde{A}^{-1}r$ basierend auf Cholesky-Zerlegung für \tilde{B} und \tilde{S} . Da Invertieren die Reihenfolge der Matrizen ändert, betrachten wir die Inverse der linken Matrix zuerst, also

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ K^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1 \\ y_2 &= r_2 - K^T r_1 \end{aligned}$$

Selbiges auf die mittlere Matrix angewandt liefert

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - K^T r_1 \end{pmatrix}$$

und zuletzt noch

$$\begin{pmatrix} I & K \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^{-1}r_1 \\ \tilde{S}^{-1}(r_2 - K^T r_1) \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} x_2 &= \tilde{S}^{-1}(r_2 - K^T r_1) \\ x_1 &= \tilde{B}^{-1}r_1 - Kx_2 \end{aligned}$$

(iii)

Z.z.: (ii) mit $K = \tilde{B}^{-1}C$

Einsetzen liefert das Gewünschte Ergebnis.



$$x_2 = \tilde{S}^{-1}(r_2 - C^T \tilde{B}^{-1}r_1)$$

$$x_1 = \tilde{B}^{-1}r_1 - \tilde{B}^{-1}Cx_2 = \tilde{B}^{-1}(r_1 - Cx_2)$$