Iteratives Lösen linearer Gleichungssysteme
Übung 6 - Beispiel 1

Michael Neunteufel

7. Juni 2017

1. Beispiel

a)

Sei $\varphi(X) := ||AX - I||_F^2$.
Z.z.:

$$\varphi(X + H) = \varphi(X) - 2(A^T R, H)_F + ||AH||_F^2, \qquad R = I - AX$$

Beweis: Mit der Schreibweise $X : Y := (X, Y)_F$ und der Eigenschaft des Frobeniusskalarprodukts $(AX, Y)_F = (X, A^T Y)_F$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(X + H) &= ||A(X + H) - I||_F^2 \\
&= (AX + AH - I) : (AX + AH - I) \\
&= (AH) : (AH) + 2(AX - I) : (AH) + (AX - I) : (AX - I) \\
&= ||AH||_F^2 - 2(R, AH)_F + \varphi(X) \\
&= ||AH||_F^2 - 2(A^T R, H)_F + \varphi(X)
\end{aligned}$$

b)

Z.z.: Algorithmus 12.4 ist ein steepest descent Algorithmus.
Beweis: Betrachte zuerst den klassischen steepest descent Fall und vergleiche dann mit dem globalen steepest descent Fall.

Steepest descent: Gegeben ist das Funktional

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \to \min!$$

Mit dem Gradienten $\nabla\phi(x) = -(b - Ax)$. Wähle den Ansatz

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

mit der Suchrichtung d_k. Minimiere (mit $r_k := b - Ax_k$)

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &:= \phi(x_k + \alpha d_k) \\
\psi'(\alpha) &= (\nabla\phi(x_k + \alpha d_k), d_k) \\
&= (A(x_k + \alpha d_k) - b, d_k) \\
&= (\alpha A d_k - r_k, d_k) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \alpha_k &= \frac{(d_k, r_k)}{(Ad_k, d_k)}
\end{aligned}$$

Für den steepest descent Algorithmus wähle den Ansatz $d_k = r_k$. Damit folgt

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}$$

Dies entspricht dem Algorithmus 7.1.

Global steepest descent: Gegeben ist das Funktional

$$\varphi(X) = ||AX - I||_F^2 \to \min!,$$

mit dem Gradienten $\nabla\varphi(X) = -2A^T(I - AX)$. Wähle den Ansatz

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k D_k$$

mit der Suchrichtung D_k. Minimiere (mit $R_k := I - AX_k$)

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha) &:= \varphi(X_k + \alpha D_k) \\
\Psi'(\alpha) &= (\nabla\varphi(X_k + \alpha D_k), D_k)_F \\
&= -(2A^T(I - A(X_k + \alpha D_k)), D_k)_F \\
&= -(2A^T(I - AX_k) - 2\alpha A^T A D_k, D_k)_F \\
&= -(2A^T R_k, D_k)_F + 2\alpha(A^T A D_k, D_k)_F \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \alpha_k &= \frac{(A^T R_k, D_k)_F}{(AD_k, AD_k)_F}
\end{aligned}$$

Für den global steepest descent Algorithmus wähle den Ansatz $D_k = S_k = A^T R_k$. Damit folgt

$$\alpha_k = \frac{||S_k||_F^2}{||AS_k||_F^2}$$

Dies entspricht dem Algorithmus 12.4.

Übung 6 - Beispiel 2 (Daniel Herold)

Definiere die folgenden Matrizen:

$$I_{N,N/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N/2-1)}$$

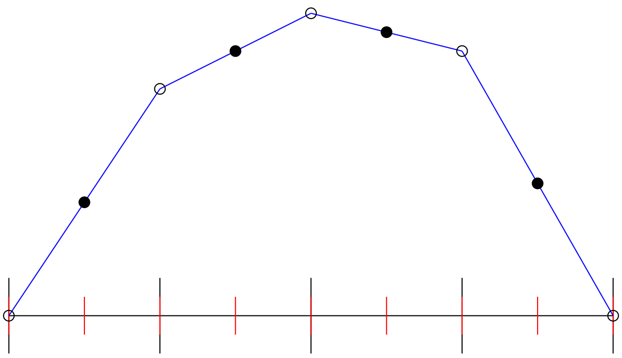
$$J_{N/2,N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N/2-1)\times(N-1)}$$

Assoziere $\hat{u}_{N/2} \in \hat{U}_{N/2} \subset \hat{U}_N$ mit dem Koeffizientenvektor $u_{N/2} \in \mathbb{R}^{N/2-1}$.

a)

Z.z.: Der Vektor $u_N \in \mathbb{R}^{N-1}$ zu $\hat{u}_{N/2}$ (aufgefasst als Element in $\hat{U}_N$) ist gegeben durch $u_N = I_{N,N/2} u_{N/2}$.
Beweis: Die Funktion $\hat{u}_{N/2}$ ist stückweise linear auf dem groben Gitter. Die Funktionswerte betrachtet auf dem feinen Gitter sind also entweder gleich (auf den Punkten, die auch zum gröberen Gitter gehören) oder die lineare Interpolation zwischen zwei solchen Punkten. Dieses Ergebnis ergibt sich auch durch nachrechnen (mit den Randwerten $(u_{N/2})_0 = 0, (u_{N/2})_{N/2} = 0$):

$$(I_{N,N/2} u_{N/2})_j = \begin{cases} (u_{N/2})_{\frac{j}{2}} & j \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(u_{N/2})_{\frac{j-1}{2}} + \frac{1}{2}(u_{N/2})_{\frac{j+1}{2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

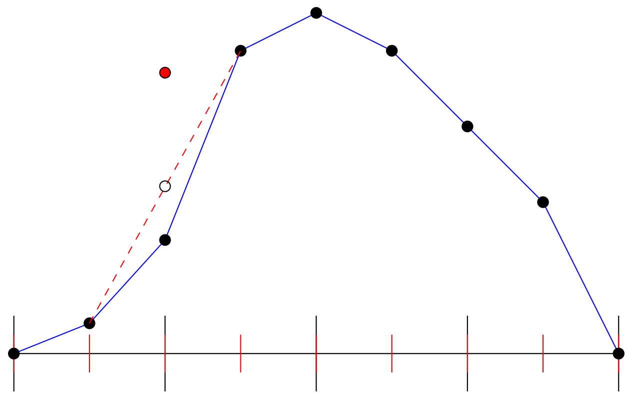


b)

Ges.: Interpretation des Restriktionsoperators $I^T_{N,N/2}$.

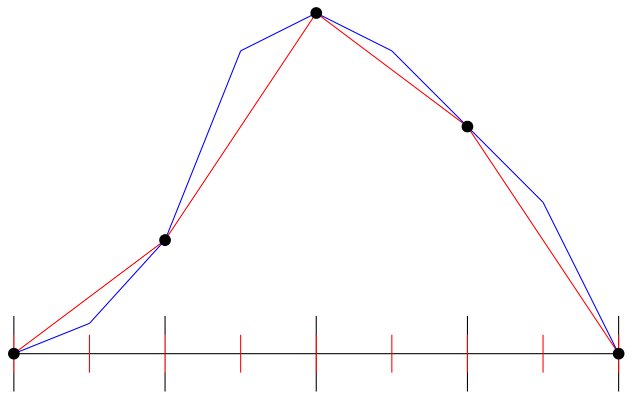
$$(I^T_{N,N/2} u_N)_j = \frac{1}{2}(u_N)_{2j-1} + (u_N)_{2j} + \frac{1}{2}(u_N)_{2j+1}$$

Dies ist nicht die triviale Einschränkung auf die groben Gitterpunkte sondern ein Mittel über den groben Punkt und seine beiden Nachbarn auf dem feineren Gitter. Dabei ist zu beachten, dass die Zeilensumme der Matrix 2 ist, die Funktion also "verdoppelt" wird.



c)

Die Restriktion $J_{N/2,N}$ tastet den Funktionsvektor an jeder zweiten Stelle ab. Neben den Null-Randwerten, die implizit erhalten bleiben, wird also einfach nur jeder zweite Funktionsauswertungswert erhalten.



Z.z.: $K := J_{N/2,N} I_{N,N/2} = Id_{N/2,N/2}$.
Beweis:

$$K_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 & \text{für } i = j \end{cases}$$

d)

Z.z.: Es gelten für

$$A_N := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$$

sowie

$$A_{N/2} := \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N/2-1,N/2-1}$$

die Identitäten

$$I^T_{N,N/2} A_N = A_{N/2} J_{N/2,N} \qquad (1)$$
$$A_{N/2} = I^T_{N,N/2} A_N I_{N,N/2} \qquad (2)$$

Beweis: Betrachte Linke Seite von (1):

$$I_{N,N/2}^T A_N = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & & & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & & & & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte Rechte Seite von (1)

$$A_{N/2} J_{N/2,N} = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von (1) mit $I_{N,N/2}$ von rechts liefert:

$$I_{N,N/2}^T A_N I_{N,N/2} = A_{N/2} \underbrace{J_{N/2,N} I_{N,N/2}}_{=Id}$$

woraus (2) folgt.

e)

Z.z.: Der surjektive A_N-konjugierte Projektor auf das Bild der Prolongationsmatrix $I_{N,N/2}$ ist gegeben durch

$$I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1} I_{N,N/2}^T A_N = I_{N,N/2} J_{N/2,N}$$

Beweis: Die Gleichheit folgt indem man (1) mit $I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1}$ von links multipliziert.
Die Projektionseigenschaft folgt aus

$$I_{N,N/2} \underbrace{J_{N/2,N} I_{N,N/2}}_{Id} J_{N/2,N} = I_{N,N/2} J_{N/2,N}$$

Die A_N-Konjugiertheit folgt aus:

$$\begin{aligned} (I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1} I_{N,N/2}^T A_N x, y)_{A_N} &= (A_N I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1} I_{N,N/2}^T A_N x, y) \\ &= (A_N x, I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1} I_{N,N/2}^T A_N y) \\ &= (x, I_{N,N/2} A_{N/2}^{-1} I_{N,N/2}^T A_N y)_{A_N} \end{aligned}$$

Surjektiv ist der Projektor, weil $J_{N/2,N}$ surjektiv auf $\mathbb{R}^{N/2-1}$ abbildet und damit $I_{N,N/2} J_{N/2,N}$ surjektiv auf das Bild von $I_{N,N/2}$ abbildet.

Iteratives Lösen linearer Gleichungssysteme - Übung 6

Tobias Danczul

1. Juni 2017

3. Beispiel

Geg.: $A = A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ SPD, $P \in \mathbb{R}^{N \times n}$ mit vollem Rang und $\operatorname{range}(P^T P) = V_n$, $A_n = P^T A P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C = P A_n^{-1} P^T$, $G^{TG} = (I - H^T A)(I - CA)(I - HA) := I - TA$.

a)

Z.z.: $(I - HA)^A = I - H^T A$

$$\begin{aligned}
\langle (I - HA)x, x \rangle_A &= \langle A(I - HA)x, x \rangle \\
&= \langle Ax, x \rangle - \langle AHAx, x \rangle \\
&= \langle Ax, x \rangle - \langle Ax, H^T Ax \rangle \\
&= \langle x, (I - H^T A)x \rangle_A
\end{aligned}$$

b)

- **Z.z.:** $I - CA$ ist A-selbstadjungiert

$$\begin{aligned}
\langle (I - CA)x, x \rangle_A &= \langle A(I - CA)x, x \rangle \\
&= \langle Ax, x \rangle - \langle Ax, C^T Ax \rangle \\
&= \langle Ax, (I - C^T A)x \rangle \\
&= \langle x, (I - C^T A)x \rangle_A
\end{aligned}$$

  Es bleibt zu zeigen, dass C symmetrisch ist. Da

$$C^T = (P A_n^{-1} P^T)^T = P A_n^{-T} P^T$$

  lässt sich die Symmetrie von C auf die Symmetrie von A_n^{-1} zurückführen. Diese ist gegeben, da wiederum

$$A_n^{-T} = (P^T A^T P)^{-1} = (P^T A P)^{-1} = A_n^{-1}$$

  erfüllt ist. Damit folgt die Behauptung.

- **Z.z.:** G^{TG} ist A-selbstadjungiert
  Unter Berücksichtigung der bisherigen Resultate folgt

$$\begin{aligned}
\langle (I - TA)x, x \rangle_A &= \langle (I - H^T A)(I - CA)(I - HA)x, x \rangle_A \\
&= \langle x, (I - HA)^A (I - CA)^A (I - H^T A)^A x \rangle_A \\
&= \langle x, (I - H^T A)(I - CA)(I - HA)x \rangle_A \\
&= \langle x, (I - TA)x \rangle_A
\end{aligned}$$

d)

Z.z.: Galerkin-Approximationsoperator $CA = PA_n^{-1}P^TA$ ist ein $A-$selbstadjungierter Projektor auf V_n

- CA ist idempotent, da

$$CACA = PA_n^{-1}\underbrace{P^TAP}_{A_n}A_n^{-1}P^TA = PA_n^{-1}P^TA = CA$$

  und folglich eine Projektion.

- CA ist A-selbstadjungiert, da

$$\langle CAx, x\rangle_A = \langle ACAx, x\rangle = \langle Ax, C^TAx\rangle \overset{b)}{=} \langle x, CAx\rangle_A$$

- CA ist Projektor auf V_n: Da A und P vollen Rang besitzen, hat insbesondere A_n und damit auch A_n^{-1} vollen Rang. Damit folgt

$$\mathrm{range}(CA) = \mathrm{range}(PA_n^{-1}P^TA) = \mathrm{range}(PP^T) = V_n$$

c)

Z.z.: $\rho(I - CA) = \|I - CA\|_A = 1$
Die erste Gleichheit ist wegen b) erfüllt. Es bleibt die zweite Gleichheit zu beweisen. Wir zeigen vorab, dass

$$\delta + e \perp_A V_n \qquad \text{oder dazu äquivalent} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n : \langle \delta + e, PP^Ty\rangle_A = 0$$

mit $\delta := -PA_n^{-1}P^TAe$ und $e := u - u_*$ zu einem gegebenen u und der exakten Lösung u_*. Sei also ein beliebiges y gewählt, dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \delta + e, PP^Ty\rangle_A &= \langle -PA_n^{-1}P^TAe + e, PP^Ty\rangle_A \\ &= \langle (I - CA)e, PP^Ty\rangle_A \overset{d)}{=} 0\end{aligned}$$

Für ein beliebiges x folgt mit Pythagoras und $d)$

$$\|x\|_A^2 = \|CAx\|_A^2 + \|(I - CA)x\|_A^2$$

und damit

$$\begin{aligned}\|(I - CA)\|_A^2 &= \sup_{\|x\|_A = 1} \|(I - CA)x\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|_A = 1} (\|x\|_A^2 - \|CAx\|_A^2) \\ &= 1 - \inf_{\|x\|_A = 1} \|CAx\|_A^2 \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Das Infimum wird bei 0 angenommen, da C SPD und nicht der triviale Projektor. Daher existiert ein x mit $\|x\|_A = 1$, das im Kern von CA liegt.

Iterative Lösung großer Gleichungssysteme,
Übung 6, Aufgabe 4
Lukas Kogler

Zu zeigen war, unter der Vorraussetzung dass die bereits bekannte two-grid error-amplification matrix $G^{TG} = I - TA$ kontraktiv ist (also $\rho(I - TA) < 1$), T tatsächlich auch SPD ist, also als Vorkonditionierer für das LGS $Ax = b$ verwendet werden kann.

Mit Hilfe der Darstellung

$$G^{TG} = (I - H^T A)(I - CA)(I - HA)$$

lässt sich sofort zeigen, dass T symmetrisch ist:

$$\begin{aligned}
G^{TG} &= (I - H^T A)(I - CA)(I - HA) = \\
&= (I - H^T A)(I - CA - HA + CAHA) = \\
&= I - H^T A - CA - HA + H^T ACA + H^T AHA + CAHA - H^T ACAHA = \\
&= I - (H^T + C + H - H^T AC - CAH - H^T AH + H^T ACAH)A = \\
&= I - TA
\end{aligned}$$

Also

$$T = H^T + C + H - H^T AC - CAH - H^T AH + H^T ACAH$$

Da $C = PA_n^{-1}P^T$ eine symmetrische Matrix ist, ist dies offensichtlich ein symmetrischer Ausdruck.

Es bleibt also noch die positive Definitheit zu zeigen. Die Vorraussetzung $\rho(I - TA) < 1$ liefert uns

$$-I < I - TA < I$$

bzw

$$0 < TA = A^{-1/2}(A^{1/2}TA^{1/2})A^{1/2} < 2I$$

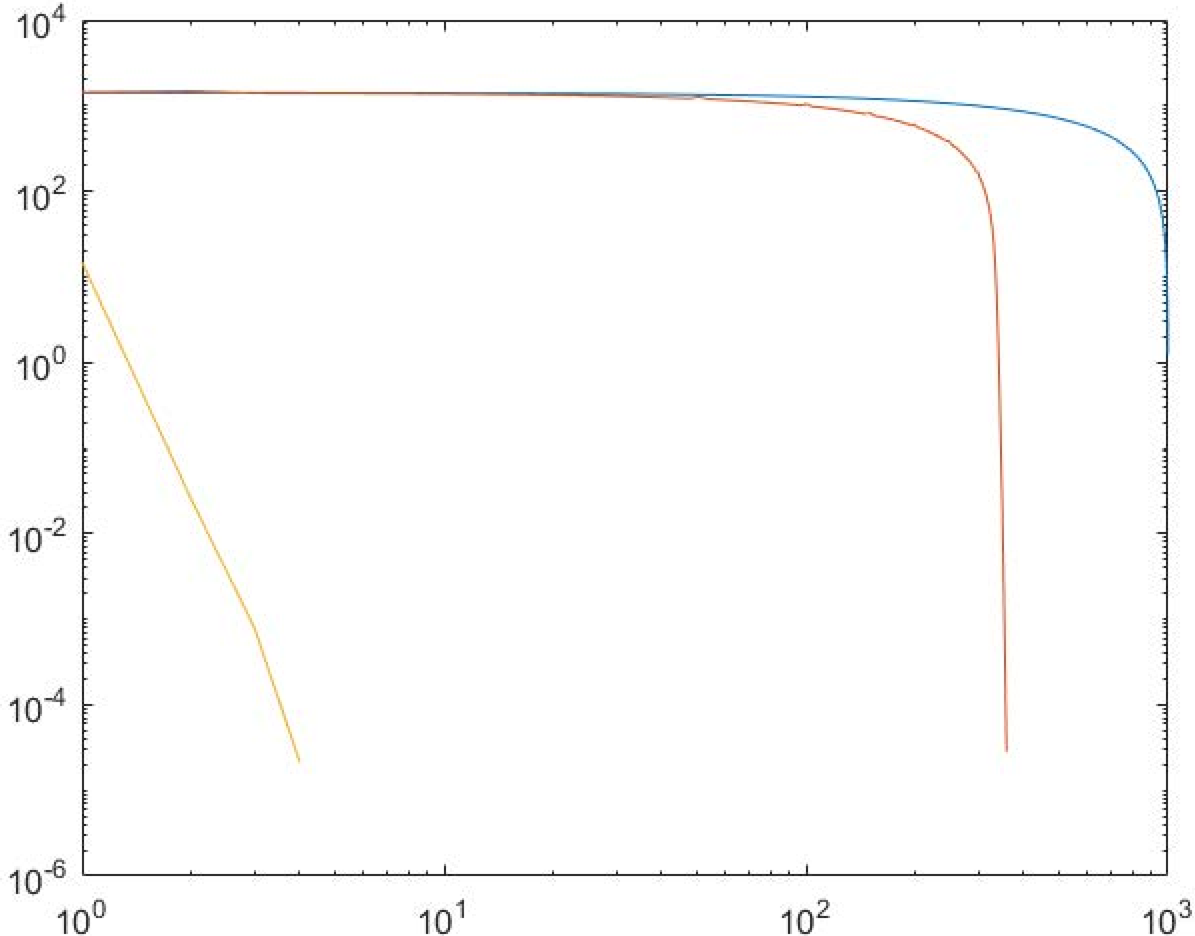
mit der Ähnlichkeitstransformation $M \to A^{-1/2}MA^{1/2}$, die das Spektrum nicht ändert, also $\sigma(A^{1/2}TA^{1/2}) \subset (0, 2)$.
Daher, wenn wir $y = A^{1/2}x$ schreiben, und beachten, dass $A^{1/2}$ selbst eine bijektive Abbildung ist

$$0 < \left\langle A^{1/2}TA^{1/2}x, x \right\rangle = \left\langle TA^{1/2}x, A^{1/2}x \right\rangle = \langle Ty, y \rangle \quad \forall y$$

■

```
n = 2000;

e = ones(n-1,1);
A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n-1, n-1);
DL = spdiags([-e 2*e], -1:0, n-1, n-1);
Dinv = spdiags(0.5*e, 0, n-1, n-1);

b = ones(n-1,1);



% loese Ax = b

tic;
[x1,~,~,iter1,resvec1] = pcg(A,b,[],2000);
time1 = toc;


M = DL*Dinv*DL';
tic;
[x2,~,~,iter2,resvec2] = pcg(A,b,[],1000,M);
time2 = toc;

x0 = zeros(n-1,1);
I = sparse(n-1,n/2-1);
for i = 1:n/2-1
    I(2*i-1,i) = 0.5; I(2*i,i) = 1; I(2*i+1,i) = 0.5;
end
mfun = @(r)TG_GS(r,A,DL,I,x0);
tic;
[x3,~,~,iter3,resvec3] = pcg(A,b,[],1000,mfun);
time3 = toc;

err = norm(x1-x3);

disp(time1)
disp(time2)
disp(time3)

loglog(resvec1(2:end))
hold on
loglog(resvec2(2:end))
loglog(resvec3(2:end))
hold off
```

```matlab
function x = TG_GS(b,A,DL,I,x0)

n = size(A,1)+1;

%pre-smoothing mit GS, also 1 Schritt auf Ax = r0 mit x0 = 0, also nur N*r0
x = x0 + DL\(b-A*x0);
%restrict r = (b-AX)
restricted_r = I'*(b-A*x);
%solve restricted_A * delta = restricted_r
restricted_A = I'*A*I;
delta = restricted_A\restricted_r;
%prolongate delta
x = x + I*delta;
%post-smooth r
x = x + (DL')\(b - A*x);

end
```



10^4
10^2
10^0
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^0
10^1
10^2
10^3

Iterative Lösung großer Gleichungssysteme,
Übung 6, Aufgabe 6
Lukas Kogler

(a)
Zu beweisen war die Abschätzung für die W-Zyklus Kontraktionsrate

$$\kappa_l^{(l)} \leq \frac{1-\sqrt{1-4C\rho}}{2C} \leq 2\rho \leq \frac{1}{2}$$

Dabei war angenommen, dass $\kappa_l^{TG} \leq \rho \leq \frac{1}{4C}$ mit einem $C \geq 1$ (für alle Levels) gilt.
Dazu wird die bereits aus der VO bekannte Abschätzung

$$\kappa_l^l \leq \kappa_l^{TG} + C\left(\kappa_{l-1}^{(l-1)}\right)^2$$

benutzt.

Zu zeigen ist also, dass die Folge

$$\xi_l = \rho + \xi_{l-1}^2$$

mit Startwert $\xi_2 = \rho$ konvergiert und dass der Grenzwert die gewünschte Ungleichung erfüllt.
Wir suchen also nach Fixpunkten der Abbildung $x \mapsto f(x) := \rho + Cx^2$, bzw nach Nullstellen von $x \mapsto f(x) - x$.
Wir suchen also Lösungen $x^\pm$ von

$$Cx^2 - x + \rho = 0$$

, was zu

$$x^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\rho C}}{2C}$$

führt. Debei ist $4\rho C \leq 4\frac{1}{4C}C = 1$, also bekommen wir nur reele Lösungen.

Nun gilt einerseits $\xi_2 = \rho \leq \frac{1}{4C} \leq \frac{1}{2}$, und aus $\xi_n \leq \frac{1}{2C} \leq \frac{1}{2}$ folgt

$$\xi_{n+1} = \rho + c\xi_n^2 \leq \frac{1}{4C} + C\frac{1}{4C^2} \leq \frac{1}{2C}$$

Also $\xi_n \leq \frac{1}{2C} \leq \frac{1}{2}$ $\forall n$ und das Selbe muss auch für den gesuchten Grenzwert gelten.
Andererseits ist $x^+ = \frac{1+\sqrt{1-4\rho C}}{2C} > \frac{1}{2C}$, also nicht die gesuchte Lösung.

Mit der elementaren Ungleichung $1 - \sqrt{1-x} \leq x, x \in [0,1]$ folgt nun

$$x^- = \frac{1-\sqrt{1-4\rho C}}{2C} \leq 2\rho \leq \frac{1}{2}$$

■

(b)
Nun war noch eine explizite Darstellung für den Rechenaufwand für den W-Zyklus in Abhängigkeit von N_l, der Anzahl der Gitterpunkte, zu zeigen. In der VO wurde eine rekursive Darstellung gezeigt:

$$W_l = CN_l + 2W_{l-1}$$

Dazu sei zuerst bemerkt, dass mit $h_l = 2^{-l}$ gilt, dass $N_l = h_l^{-d} = 2^{ld}$, wobei d die Raumdimension ist, es lässt sich also praktischerweise schreiben:

$$N_{l-k} = 2^{-kd} N_l$$

Die Rekursion lässt sich dann schreiben als:

$$\begin{aligned} W_l &= CN_l + 2W_{l-1} = \\ &= CN_l + 2CN_{l-1} + 4W_{l-2} = \\ &\vdots \\ &= C \cdot \sum_{k=0}^{l} 2^k N_{l-k} = \\ &= CN_l \cdot \sum_{k=0}^{l} 2^{k(1-d)} \\ &\leq \begin{cases} C \log_2(N_l) N_l & d = 1 \\ 2CN_l & d = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

,da die geometrische Reihe nur für $d = 2$ konvergiert und mit oben durch 2 abgeschätzt werden kann.
Insebesondere ist also zu beachten, dass der W-Zyklus in 2d **nicht-linearen** Aufwand hat (aber der Faktor $\log(N_l)$ ist zu verkraften - vergleichbar mit dem Sortieren von N_l Werten)