1. Implementieren und testen Sie den '1D Fast Poisson Solver' aus VO, Abschnitt 4.1. Schreiben Sie zu diesem Zweck auch ihre eigene Variante von DST unter Verwendung von `fft` und verifizieren Sie, dass dies dieselben Ergebnisse liefert wie Anwendung von `dst`.

   Wie sieht es mit den Rechenzeiten aus (im Vergleich zur Anwendung von `chol` angewendet auf die *sparse* Matrix A), in Abhängigkeit von $n = 10, 100, 1000, \ldots$? Am besten wäre hier eine geeignet gestaltete Grafik.

   Hinweis: In MATLAB beginnt die Indizierung von arrays generell mit 1.

2. Bestapproximation in einem Unterraum, linearer Ausgleich.

   a) Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{U}$ ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

      Zeigen Sie: $u \in \mathcal{U}$ ist die Bestapproximation von b in $\mathcal{U}$, d.h. $u = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{U}} \|v - b\|_2$ genau dann wenn $u - b \perp \mathcal{U}$, d.h., u ist die Orthogonalprojektion von b auf $\mathcal{U}$. (Machen Sie eine Skizze.)

   b) Sei $\{q_1, \ldots, q_m\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{U}$ und $Q = \Big(q_1, \ldots, q_m\Big) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (spaltenweise). Zeigen Sie:

      $$u = Q Q^{\mathrm{T}} b$$

      Die Matrix $P := Q Q^{\mathrm{T}}$ nennt man den Orthogonalprojektor auf $\mathcal{U}$. Verifizieren Sie die Eigenschaften $P = P^{\mathrm{T}} = P^2$. Stellen Sie $u = Q Q^{\mathrm{T}} x$ auch in der Form

      $$u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, q_i$$

      dar. Wie lauten die Koeffizienten ξ_i?

   c) Sei $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine *beliebige* Basis von $\mathcal{U}$. Konstruieren Sie den Orthogonalprojektor P auf $\mathcal{U}$ mittels einer Faktorisierung der Matrix $U = \Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$.

   d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m < n$ und vollem Rang m. Verwenden Sie die reduzierte ('economy size') QR-Zerlegung von A, um für gegebenes $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Ausgleichsproblem

      $$\|A x - b\|_2 \to \text{minimal!}$$

      zu lösen.

      Anmerkung: Für die Lösung des Ausgleichsproblems aus d) gilt nach a):

      $$b - A x \perp \mathcal{U} = \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \quad \text{(Spalten von } A.)$$

      Dies ist äquivalent zu den Gauß'schen Normalgleichungen $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b$.

   e) Wählen Sie ein numerisches Beispiel und setzen Sie d) in MATLAB um. (Vergleich mit `A\b`.)

3. Galerkin-Approximation, 'OrthoRes'-Prinzip.

   Wir betrachten jetzt eine andere Situation: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$, und $\mathcal{U}$ ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Gesucht eine Approximation für die Lösung x_* des linearen Gleichungssystems $A x = b$ in dem Unterraum $\mathcal{U}$. Die sogenannte *Galerkin-Approximation* ist definiert über die Forderung der 'Galerkin-Orthogonalität'

   $$\textit{Bestimme } u \in \mathcal{U} \textit{ mit } b - A u \perp \mathcal{U}, \;\; \textit{d.h. } (b - A u, v) = 0 \;\; \forall\, v \in \mathcal{U}.$$

   D.h., das Residuum $b - A u$ soll orthogonal auf den Ansatzraum $\mathcal{U}$ stehen.

a) Sei $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Machen Sie den Ansatz $u = U\xi$, d.h. $u = \sum_{i=1}^m \xi_i u_i$ mit dem Koeffizientenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)^{\mathrm{T}}$. Stellen Sie ein System von m linearen Gleichungen auf, dessen Lösung den Koeffizientenvektor ξ liefert. Schreiben Sie die Matrix $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$ dieses Systems in der Gestalt $G = V^{\mathrm{T}}AV$ (und die rechte Seite ebenfalls mit Hilfe von V^{T}). Wie lautet V? Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Wir nehmen an A ist SPD. Dann ist durch $(x,x)_A := (Ax, x)$ ein inneres Produkt im $\mathbb{R}^n$ definiert.

Folgern Sie, dass auch G SPD ist. Das Gleichungssystem aus a) ähnelt einem System von Gauß'schen Normalgleichungen. Tatsächlich ist u Lösung einer Minimierungsaufgabe. Um welche handelt es sich? Interpretieren Sie u auch als Orthogonalprojektion von x_* auf $\mathcal{U}$ (ähnlich wie in Aufgabe 2).

Hinweis: Schreiben Sie $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$. Jetzt kommt die 'Energienorm' $\|x\|_A := (Ax,x)^{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}x\|_2$ ins Spiel.

c) Wählen Sie ein numerisches Beispiel und setzen Sie die Galerkin-Approximation in Matlab um.

4. Petrov-Galerkin-Approximation, 'MinRes'-Prinzip.

Wiederum sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$, und $\mathcal{U}$ ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und gesucht sei eine Approximation für die Lösung x_* des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in dem Unterraum $\mathcal{U}$. Eine sogenannte *Petrov-Galerkin-Approximation* ist definiert über die Forderung einer modifizierten Galerkin-Orthogonalität,

$$\textit{Bestimme } u \in \mathcal{U} \textit{ mit } b - Au \perp A\mathcal{U}, \quad \textit{d.h. } (b - Au, Av) = 0 \quad \forall\, Av \textit{ mit } v \in \mathcal{U}.$$

D.h., das Residuum $b - Au$ soll orthogonal auf das Bild von $\mathcal{U}$ unter der Abbildung A stehen.

a) Sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Machen Sie den Ansatz $u = U\xi$, d.h. $u = \sum_{i=1}^m \xi_i u_i$ mit dem Koeffizientenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)^{\mathrm{T}}$, und gehen Sie analog wie in Aufgabe 3 vor: Stellen Sie ein System von m linearen Gleichungen auf, dessen Lösung u ist. Wiederum ist u Lösung einer Minimierungsaufgabe. Um welche handelt es sich?

b) Stellen Sie die Beziehung zwischen a) und einem linearen Ausgleichsproblem her.

5. [Ex. 5.2 a) & 5.3:]

Let A, N be SPD and consider the iteration $x_{k+1} = x_k + N(b - Ax_k)$. Let

$$M = I - W^{-1}A \quad (W = N^{-1})$$

be the iteration matrix. Assume that W is SPD and even satisfies

$$2W > A > 0 \tag{$*$}$$

a) (Auxiliary identity) Show: The adjoint M^A of a matrix M with respect to the $(\cdot,\cdot)_A$ inner product is given by

$$M^A = A^{-1}M^{\mathrm{T}}A \tag{$**$}$$

(Note that M is A-selfadjoint iff $M^{\mathrm{T}}A = AM \Leftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}M^{\mathrm{T}}A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}MA^{-\frac{1}{2}}$, i.e., if $\hat{M} = A^{\frac{1}{2}}MA^{-\frac{1}{2}}$ is symmetric.)

b) Show: $\rho(M) = \|M\|_A < 1$.

c) Show: If for some $0 < \lambda \le \Lambda$ there holds

$$0 < \lambda W \le A \le \Lambda W$$

then $\sigma(M) \subset [1-\Lambda, 1-\lambda]$, and thus,

$$\rho(M) \le \max\{|1-\lambda|, |\Lambda - 1|\}$$

d) Show: for $\omega \in (0,1]$, the damped SSOR method (5.14b) converges for all SPD matrices A.

e) Show that a) can be weakened in the following way: We do not require that N, W are symmetric, but we only assume that W is positive definite, i.e., $2\,\mathrm{Re}\,W = W + W^{\mathrm{T}} > 0$, and replace condition $(*)$ by

$$W + W^{\mathrm{T}} > A > 0$$

Then, $\rho(M) = \|M\|_A < 1$.

Hint: Use $(**)$ and express $N + N^{\mathrm{T}}$ by means of $W + W^{\mathrm{T}}$.

6. [Ex. 5.4:]

Let A be SPD and denote by $M_\omega^{SOR} = I - \omega\,(D + \omega L)^{-1} A$ the iteration matrix of the (forward) SOR method and by $\bar{M}_\omega^{SOR} = I - \omega\,(D + \omega L^{\mathrm{T}})^{-1} A$ the iteration matrix of the backward SOR method. The iteration matrix $M_\omega^{SSOR} = \bar{M}_\omega^{SOR} M_\omega^{SOR}$ of the damped SSOR method is given by

$$M_\omega^{SSOR} = I - \omega(2-\omega)(D + \omega L^{\mathrm{T}})^{-1} D\,(D + \omega L)^{-1} A$$

a) Show: $\bar{M}_\omega^{SOR}$ is the adjoint of M_ω^{SOR} with respect to the $(\cdot,\cdot)_A$ inner product, i.e., $\bar{M}_\omega^{SOR} = (M_\omega^{SOR})^A$. Conclude that $\sigma(M_\omega^{SSOR}) \subset \mathbb{R}_0^+$, i.e., the spectrum is non-negative.

b) Using b), show: $\|M_\omega^{SSOR}\|_A = \|M_\omega^{SOR}\|_A^2$.