
Die Aufgaben enthalten auch Programmierung, vorzugsweise (aber nicht notwendigerweise) in MATLAB. Dies inkludiert natürlich Testen des Codes und Realisierung konkreter Beispiele.

1. Das Hermite'sche innere Produkt im $\mathbb{C}^n$ definieren wir als

$$(x,y) := x^H y, \quad \text{mit} \quad x^H = \overline{x}^T.$$

(x,y) ist also konjugiert linear bezüglich x und linear bezüglich y. Die 2-Norm eines Vektors $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\|x\|_2 := \sqrt{x^H x}$.

a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir

$$\operatorname{Re} A := \tfrac{1}{2}(A + A^H), \quad \operatorname{Im} A := \tfrac{1}{2i}(A - A^H), \quad \text{also} \quad A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A.$$

Diese Bezeichnungen sind durch folgende Identitäten motiviert:

$$\operatorname{Re}(Ax,x) = (\operatorname{Re} A\, x, x), \quad \operatorname{Im}(Ax,x) = (\operatorname{Im} A\, x, x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n.$$

Beweisen Sie diese Identitäten. Was bedeuten diese im Fall $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

b) Zeigen Sie: A ist genau dann normal, wenn $\operatorname{Re} A$ mit $\operatorname{Im} A$ kommutiert.

c) Vorüberlegung zu d): Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|x\|_2 = \sup_{0 \neq y \in \mathbb{C}^n} \frac{|(x,y)|}{\|y\|_2},$$

d.h., die Vektornorm von x ist identisch mit der Abbildungsnorm der durch den Vektor x definierten linearen Abbildung $X\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \; y \mapsto X(y) := (x,y)$.

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, d.h., $\operatorname{Re} A$ ist eine SPD-Matrix. Zeigen Sie: A ist invertierbar, mit

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_{min}(\operatorname{Re} A)}.$$

e) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen der Form $x'(t) = A\,x(t)$. Sei $x(t)$ irgend eine Lösung. Zeigen Sie

$$\tfrac{d}{dt}\|x(t)\|_2 \leq \|A\|_2\,\|x(t)\|_2.$$

Verschärfen Sie diese Aussage, indem Sie zeigen

$$\tfrac{d}{dt}\|x(t)\|_2 \leq \lambda_{max}(\operatorname{Re} A)\,\|x(t)\|_2.$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die letztere Abschätzung wesentlich schärfer ist als die erstere.

2. a) Vollziehen Sie den Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton aus dem Vorlesungsskriptum genau nach.

b) Verallgemeinerung des Satzes von Cayley-Hamilton:[1]

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine gegebene Funktion, wobei gelte $\sigma(A) \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$. Mit der Definition

$$f(A) := X\,f(\Lambda)\,X^{-1}, \qquad \text{wobei} \quad f(\Lambda) := \operatorname{Diag}(f(\lambda_j)),$$

gilt:

---

[1] Wir beschränken uns hier auf den Fall einer diagonalisierbaren Matrix $A = X\,\Lambda\,X^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. (Algebraisch) mehrfache Eigenwerte λ_j sind jedoch zugelassen.

$f(A)$ ist ein Matrixpolynom in A vom Grad $\leq n-1$ mit (von A abhängigen) Koeffizienten.

Beweisen Sie diese Aussage. Zeigen Sie auch, dass die Koeffizienten im Fall $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell sind.

Hinweis: Betrachten Sie das Lagrange-Interpolationspolynom von $f(z)$ vom Grad $k-1 \leq n-1$ an den $k \leq n$ Knoten $z = \lambda_j \in \mathbb{C}$.

c) Berechnen Sie die A^{-5} und e^A für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ -7 & 16 & -19 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 8 & -9 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

ohne Verwendung der Eigenbasis von A. Verwenden Sie Matlab und vergleichen Sie mit `A^(-1)` bzw. `expm(A)`.

3. Verifizieren Sie die Korrektheit der im Vorlesungsskriptum,

   a) Example 2.1
   b) Example 2.2

   angegebenen Eigenwerte und Eigenvektoren.

   Anmerkung: Eine bessere Bezeichnung wäre hier ‘diskrete Eigenfunktionen’ (über dem gegebenen Gitter) statt Eigenvektoren.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und p ein Polynom. Zeigen Sie (z.B. unter Verwendung der Jordan’schen Normalform):

$$\sigma(p(M)) = p(\sigma(M)),$$

   d.h., die Eigenwerte von $p(A)$ lauten $p(\lambda_j)$, wobei die λ_j die Eigenwerte von A sind.

5. Definieren Sie analog zur Vorlesung das *Compressed Sparse Column* (CSC) Format. Formulieren Sie einen Algorithmus, der die Matrix-Vektor-Multiplikation Ax für eine Matrix A realisiert, die im CSC-Format gespeichert ist. Ausarbeitung und Test an einem Beispiel z.B. in Matlab.

   Hinweis: Beim CSC-Format hat man direkten Zugriff auf die Spalten von A.

6. *MatrixMarket* ist eine Sammlung von Testmatrizen für numerische lineare Algebra,

   siehe `math.nist.gov/MatrixMarket`.

   a) Geben Sie einen kurzen Überblick.
   b) Recherchieren und testen Sie die Unterstützung für Matlab-Benützer,
      siehe `math.nist.gov/MatrixMarket/mmio/matlab/mmiomatlab.html`.
   c) Wählen Sie in MatrixMarket eine schwach besetzte Matrix, konvertieren Sie diese in das `sparse` Format in Matlab, und invertieren Sie diese. Ist die Inverse ebenfalls schwach besetzt? (Verwenden Sie `spy`.)