

D I S S E R T A T I O N

"Defektkorrektur für Diskretisierungen
des Dirichlet-Problems in allgemeinen Gebieten"

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien,
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät,

von

Dipl.-Ing. Winfried Auzinger, Scholzgasse 2/15, 1020 Wien
geb. am 10. Juli 1956 in Braunau/Inn

Wien, im Oktober 1984



KURZFASSUNG

Defektkorrekturmethoden für die numerische Lösung von Randwert-
aufgaben bei partiellen Differentialgleichungen sind des öfte-
ren vorgeschlagen und auch verwendet worden. Bei der Analyse
dieser Verfahren ist man aus verschiedenen Gründen gezwungen,
das Konvergenzverhalten in einem sehr weiten Rahmen (insbeson-
dere ohne asymptotische Fehlerentwicklungen) zu untersuchen.
Damit treten eine Reihe neuer Probleme auf, die bisher kaum zu-
friedenstellend behandelt worden sind.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Defektkorrektur-Algorithmus
für die Lösung der Helmholtz-Gleichung in allgemeinen ebenen Ge-
bieten (mit Dirichlet-Randbedingungen) vorgestellt. Der Diskre-
tisierungsfehler ist $O(h^4)$ trotz geringerer lokaler Konsistenz in
der Nähe des Randes. Die Frage nach der Kontraktivität wird für
eine recht große Klasse von Gebieten positiv beantwortet: Die
Defektkorrektur kontrahiert gleichmäßig in h bezüglich einer
diskreten Sobolev-Norm.

Diskutiert werden weiters die Bedeutung der Fehlerglättung und
die Kombination der Defektkorrektur mit einem Multigrid-Solver.

INHALT

1. EINFÜHRUNG

- 1.1 Überblick 1
- 1.2 Der historische Hintergrund 3
- 1.3 Problemstellung, Bezeichnungen 5

2. FORMALE DARSTELLUNG UND MODELLPROBLEMANALYSE

- 2.1 Fehlerglättung, Defektkorrektur und Multigrid-Iteration 12
- 2.2 Der Modellfall eines quadratischen Gebietes 19
- 2.3 Fehlerglättung und Kontraktionsverhalten: Quantitative Resultate beim Modellproblem 23

3. DEFINITION DES DEFEKTES IN ALLGEMEINEN GEBIETEN

- 3.1 Konsistenzfordernis; die Diskrete Greensche Funktion 28
- 3.2 Konstruktion der Defekt-definierenden Diskretisierung 33

4. REGULARITÄT ELLIPTISCHER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

- 4.1 Die Regularitätsfrage und ihre Bedeutung für die Defektkorrektur 39
- 4.2 H^1 -Regularität und ihre Anwendung beim Modellproblem 41
- 4.3 Diskrete Regularität in allgemeinen Gebieten 45
- 4.4 Diskrete Poincaré'sche Ungleichung und Folgerungen aus der H^1 -Koerzivität 49

5. KONTRAKTIONSVERHALTEN DER DEFEKTKORREKTUR

- 5.1 Der Fall eines variablen Helmholtz-Terms beim Rechteckgebiet 51
- 5.2 H^1 - und H^2 -Abschätzungen im allgemeinen Fall 52
- 5.3 Nachweis der Kontraktion bei spezieller Geometrie 55

6. IMPLEMENTIERUNG; NUMERISCHE ERGEBNISSE

- 6.1 Einbau der Defektkorrektur in bestehende Multigrid-Software 60
- 6.2 Full Multigrid 62
- 6.3 Numerische Ergebnisse: Full Multigrid, Kontraktionsverhalten, Fixpunkt 65

LITERATURVERZEICHNIS

1. EINFÜHRUNG

1.1 Oberblick

Die Idee der Defektkorrektur zur Verbesserung numerischer Lösungen von Differentialgleichungen hat sich in den letzten Jahren als universell anwendbares Prinzip der Numerischen Mathematik durchgesetzt. Im Mittelpunkt des aktuellen Interesses steht unter anderem die Anwendung verschiedener Varianten der Methode der Defektkorrektur auf Randwertprobleme bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung der Dirichlet-Randwertaufgabe für die Helmholtz-Gleichung (mit $c(x,y) \geq 0$) in allgemeinen ebenen, beschränkten Gebieten:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) + c(x,y) \cdot u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) &= g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

Als "Basisverfahren" zur numerischen Lösung von (1.1) betrachten wir ein Differenzenverfahren, und zwar die Standard-5-Punkt-Diskretisierung des Differentialoperators über einem quadratischen Gitter. Die Definition des Defekts wird mit Hilfe geeigneter Differenzgleichungen höherer Konsistenzordnung vorgenommen.

Die beiden wichtigsten Gesichtspunkte der folgenden Untersuchung sind:

- Es werden allgemeine, nicht rechteckige Gebiete zugrundegelegt.
- Die Defektkorrektur soll (iterativ) auf "beliebige" Näherungslösungen der auftretenden diskreten Probleme angewendet werden. In der Praxis stammen diese Näherungslösungen aus einem Multigrid-Prozeß.

Als Konsequenz dieser Annahmen ist man gezwungen, das Konvergenzverhalten der Defektkorrekturmethode in einem sehr weiten Rahmen zu untersuchen. Die Analyse bedient sich völlig anderer Argumente

als etwa die asymptotische Analyse bei Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen. (Die Einschränkung auf die Helmholtz-Gleichung ist demgegenüber nicht so wesentlich.)

Um klarzustellen, wie sich die vorliegende Untersuchung vor dem historischen Hintergrund der Defektkorrekturalgorithmen einordnet, wird dieser in Abschnitt 1.2 so ausführlich wie nötig dargestellt. Dies führt auch zu einer gründlichen Motivation der anschließenden Ausführungen.

In Kapitel 2 findet sich eine formale Darstellung der Defektkorrektur, insbesondere ihrer Kombination mit Multigrid-Verfahren, und der gekoppelten Iteration unter Einbeziehung eines geeigneten "Glättungsoperators".

Kapitel 2 befaßt sich weiters mit dem Modellproblem im quadratischen Gebiet. Das dient der Vorbereitung auf den allgemeinen Fall. Außerdem werden quantitative Resultate über den Effekt der Fehlerglättung vorgestellt. Diese zeigen, daß die in der Theorie der Multigrid-Verfahren bedeutsame "smoothing property" gewisser Relaxationsschemata auch für die Konvergenzbeschleunigung der Defektkorrektur-Iteration entscheidend verantwortlich ist. Auf den Fall eines (gemessen an der Gitterfeinheit) sehr großen Helmholtz-Terms wird speziell eingegangen.

In Kapitel 3 wird gezeigt, welche Konsistenzbedingungen eine vernünftige Defekt-definierende Diskretisierung zu erfüllen hat. Eine neue Anwendung und Erweiterung der Abschätzungen in [3] über Teilsummen der "diskreten Green'schen Funktion" zeigt, daß in der Nähe des Randes $\partial\Omega$ lokal schwächere Konsistenzbedingungen ausreichen. Es werden Defekt-definierende Differenzschemata mit den erforderlichen Eigenschaften vorgestellt.

Die Frage nach dem Kontraktionsverhalten der Defektkorrekturmethode in allgemeinen Gebieten führt auf diskrete Regularitätsforderungen an die zugrundeliegenden Differenzgleichungen. In Kapitel 4 wird das Regularitätsproblem ausführlich diskutiert.

Es stellt sich heraus, daß in Analogie zum kontinuierlichen Fall nur eine diskrete "H¹-Regularität" ohne weiters nachgewiesen werden kann. Stärkere diskrete Regularitätseigenschaften sind bisher nur in geringem Maß untersucht worden (vgl. Hackbusch [11], [12]). Kapitel 4 enthält eine detaillierte Ausführung des (in [12] nur kurz angedeuteten) Beweises der H¹-Regularität in allgemeinen Gebieten und eine Diskussion der Probleme, die beim Nachweis stärkerer Regularitätseigenschaften auftreten.

Die "natürliche" Eigenschaft der H¹-Regularität elliptischer Differenzgleichungen zieht einige einfache Folgerungen nach sich. Diese sind im Anhang an Kapitel 4 kurz dargestellt. Eine wesentliche Rolle spielt dabei auch eine diskrete Poincaré'sche Ungleichung.

In Kapitel 5 wird schließlich die Frage nach der Kontraktivität für eine spezielle Klasse von Gebieten positiv beantwortet: *Die Defektkorrektur kontrahiert gleichmäßig in h bezüglich einer diskreten Sobolev (H¹-) Norm.* Für "ganz allgemeine" Gebiete bzw. für stärkeren Normen läßt sich derzeit nur Beschränktheit des Defektkorrektur-Operators gleichmäßig in h zeigen.

Kapitel 6 ist der *praktischen Implementierung* der vorgestellten Methode gewidmet, und zwar insbesondere der Kombination der Defektkorrektur mit einem fertig vorliegenden *Multigrid-Solver*. Umfangreiche numerische Ergebnisse dienen der Illustration der vorangegangenen theoretischen Betrachtungen.

1.2 Der historische Hintergrund

Das Prinzip der Defektkorrektur wurde ursprünglich bei der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen angewendet. Dabei erfolgt die Defektbildung mit Hilfe von Interpolationspolynomen passenden Gra-

des. Man erhält mit geringem Aufwand Lösungen hoher Ordnung (im wesentlichen: Kollokationslösungen). Die Analyse beruht hier wesentlich darauf, daß

- alle auftretenden Gleichungen "exakt" gelöst werden und daß
- der Diskretisierungsfehler eine asymptotische Entwicklung in Potenzen der Gitterweite h besitzt.

Eine Beschreibung des Verfahrens, insbesondere seine Anwendung auf Randwertprobleme, findet sich bei Frank [6]. Als allgemeines, abstraktes Prinzip wurde die Defektkorrektur von Stetter [14] eingeführt. Damit ordnen sich unter anderem auch die Verfahren der "difference correction" bzw. "deferred correction" richtig ein.

Frank und Hertling [7] haben die Methode (im ursprünglichen Sinn) auf das Dirichlet-Problem in Rechtecksgebieten angewendet. Eine Erweiterung auf allgemeinere Gebiete (unter Verwendung von Variationsverfahren) ist bei Frank, Hertling, Monnet [8] angegeben. Eine strenge Analyse der Defektkorrektur, angewendet auf partielle Differentialgleichungen, steht aber bisher aus. Die Hauptschwierigkeit besteht hier darin, daß die Existenz der (für die Analyse im "klassischen Sinn" erforderlichen) asymptotischen Fehlerentwicklungen hier normalerweise nicht garantiert ist.

Davon abgesehen besteht in der Praxis folgende Restriktion:

- Bei der numerischen Behandlung von Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen können die auftretenden hochdimensionalen Gleichungssysteme nur näherungsweise gelöst werden, und zwar meist mit Hilfe von Iterationsverfahren.

Aus diesen Gründen hat es sich als notwendig erwiesen, sich bei der Untersuchung von Defektkorrekturverfahren von Voraussetzungen über Fehlerasymptotik zu befreien. Eine erste Andeutung über den Stil einer solchen Analyse findet sich bei Christiansen und Russell [5].

In der Folge hat es sich herausgestellt, daß sich Defektkorrek-

turansätze auf effiziente und natürliche Weise iterativ (jedoch mit fixer Defektdefinition) mit *Multigrid-Verfahren* kombinieren lassen. In [1] wird dieser neue Weg formal dargestellt und anhand eines Modellproblems diskutiert. Hackbusch [10] präsentiert ein Schema für den Konvergenznachweis einer solchen kombinierten Iteration. Außerdem finden sich bei Brandt (in [4] und an vielen anderen Stellen) etliche Bemerkungen zu diesem Thema.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Defektkorrektur in diesem neuen Licht in einer konkreten, nicht-trivialen Situation.

1.3 Problemstellung, Bezeichnungen

Zugrundegelegt wird die Diskretisierung der vorgelegten Randwertaufgabe (1.1) durch finite Differenzen über einem quadratischen Gitter $\Omega_h \subseteq \Omega$ mit der Gitterweite h . $\partial\Omega_h$ sei die Menge der Schnittpunkte des Quadratgitters mit dem Rand $\partial\Omega$. Gitterpunkte $(x,y) \in \bar{\Omega}_h := \Omega_h \cup \partial\Omega_h$ werden mit P, Q bezeichnet.

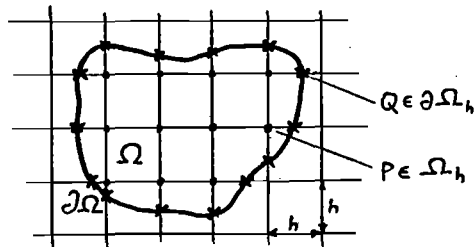


Abb. 1.1

Die diskrete Formulierung von (1.1) lautet damit:

$$\begin{aligned} -\Delta_h u(P) + c(P) \cdot u(P) &= f(P), & P \in \Omega_h, \\ u(P) &= g(P), & P \in \partial\Omega_h. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dabei ist $-\Delta_h$ der übliche mit $-\Delta$ konsistente Differenzenoperator.

$P \in R_h \subseteq \Omega_h$ seien diejenigen Gitterpunkte, in denen $-\Delta_h$ durch den symmetrischen Differenzenstern

$$-\Delta_h \sim \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

erklärt werden kann. Die restlichen Punkte $P \in B_h := \Omega_h \setminus R_h$ besitzen per definitionem mindestens einen Gitternachbarn in $\partial\Omega_h$. Hier wird (nach Shortley-Weller) ein entsprechender unsymmetrischer Differenzenstern verwendet, z.B.

$$-\Delta_h \sim \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} & 2 + \frac{2}{\lambda} & -\frac{2}{1+\lambda} \\ & -1 & \end{bmatrix},$$

falls der linke Gitternachbar auf $\partial\Omega$ liegt (im Abstand λh von P ; $0 < \lambda \leq 1$).

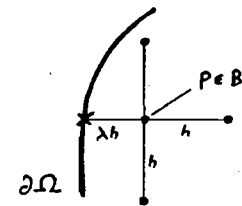


Abb. 1.2

Für die weitere Behandlung wird folgende Schreibweise eingeführt:

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{bezeichne die Randwertaufgabe (1.1),} \\ Lu &= f && \text{ihre Diskretisierung (1.2).} \end{aligned}$$

(Der Gitterparameter h wird nicht explizit als Index mitgeführt.) Im Kontext der Defektkorrektur wird $Lu = f$ als "Basis-Diskretisierung" von $Lu = f$ bezeichnet. $u = u(P)$ ($P \in \bar{\Omega}_h$) heißt "Gitterfunktion". u^* sei die exakte Lösung von $Lu = f$, restringiert auf das jeweils betrachtete Gitter.

Die wohlbekanntenen Eigenschaften der Diskretisierung $Lu = f$ sind:

- Die Konsistenzordnung ist $O(h^2)$ in den Punkten $P \in R_h$,
 $O(h)$ in den Punkten $P \in B_h$.
- L ist stabil: $\|L^{-1}\|_\infty \leq C$. Darüber hinaus erhält man sogar volle $O(h^2)$ -Konvergenz:

$$\|L^{-1}f - u^*\|_\infty = O(h^2) .$$

Die genauen Stabilitätseigenschaften von L werden in Kapitel 3 in Zusammenhang mit ihrer Bedeutung für die Defektkorrektur ausführlich diskutiert.

Anmerkung. - " $\leq C$ " bedeutet im folgenden immer Beschränktheit durch eine (generisch definierte) von h unabhängige Konstante.

- Ordnungsaussagen setzen natürlich immer stillschweigend die dafür erforderlichen Differenzierbarkeits-eigenschaften von u^* voraus.

Die Idee der Defektkorrektur besteht nun darin, die Genauigkeit einer gegebenen Näherungslösung $u^{(i)} \approx u^*$ mit Hilfe einer weiteren Diskretisierung $L'u = f'$ mit höherer Konsistenzordnung zu verbessern. $L'u = f'$ wird nicht aufgelöst, sondern es wird nur der Defekt $(L'u^{(i)} - f')$ als Korrektur der rechten Seite verwendet. Eine neue Näherungslösung $u^{(i+1)}$ ist dann definiert durch

$$Lu^{(i+1)} = Lu^{(i)} - (L'u^{(i)} - f') \tag{1.3}$$

bzw.
$$u^{(i+1)} = L^{-1}\Delta L u^{(i)} + L^{-1}f' ,$$

wobei $\Delta L := L - L'$ gesetzt wurde. Eine Lösung u' von $L'u' = f'$ ist natürlich Fixpunkt von (1.3). Statt L^{-1} werden wir später eine angenäherte Inverse $K \approx L^{-1}$ verwenden.

Für die vorliegende Anwendung wählen wir als Defekt-definierende Diskretisierung $L'u = f'$ ein Differenzenschema der Konsistenz-

ordnung $O(h^4)$. In den meisten inneren Gitterpunkten läßt sich eine solche mit Hilfe des bekannten Mehrstellenoperators $-\Delta_h^i$ erklären:

$$-\Delta_h^i \sim \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Die rechte Seite f' ist durch Gewichtung der Funktionswerte von $f(x,y)$ zu bilden: $f' = Wf$ mit

$$W \sim \frac{1}{12} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

Der Helmholtz-Term $c(P) \cdot u(P)$ ist ebenfalls mit W zu gewichten.

ΔLu ist hier also gegeben durch den Differenzenstern

$$(-\Delta_h^i + \Delta_h^i)u + (I - W)cu \sim \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} u + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} cu \tag{1.4}$$

In der Nähe des Randes $\partial\Omega$ können die Operatoren $-\Delta_h^i$, W im allgemeinen in dieser Form nicht angewendet werden. Um die Darstellung übersichtlich zu halten, soll über dieses Problem zunächst hinweggesehen werden. Die Definition des Defektes in den randnahen Gitterpunkten wird in Kapitel 3 (nach der Diskussion des Rechtecksfalles) behandelt.

Davon abgesehen, lautet die Defekt-definierende Diskretisierung $L'u = f'$ nun:

$$\begin{aligned} -\Delta_h^i u(P) + Wcu(P) &= Wf(P) , & P \in \Omega_h , \\ u(P) &= g(P) , & P \in \partial\Omega_h . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bei der Untersuchung der Eigenschaften einer Defektkorrektur-Iteration (1.3) geht man vor wie folgt: Seien $e^{(i)} := u^{(i)} - u^*$, $e^{(i+1)} := u^{(i+1)} - u^*$ die Fehler vor bzw. nach Ausführung eines Iterationsschrittes (1.3). Dann ist

$$e^{(i+1)} = L^{-1} \Delta L e^{(i)} - \bar{e} \tag{1.6}$$

mit

$$\bar{e} := L^{-1} (L'u^* - f')$$

Der fixe inhomogene Anteil \bar{e} charakterisiert das im Optimalfall erreichbare Fehlerniveau. Für einen Fixpunkt e' der Iteration (1.6) gilt

$$L'e' = -L\bar{e} = - (L'u^* - f') . \tag{1.7}$$

Natürlich muß $\|\bar{e}\| = O(h^p)$, $p > 2$, gelten, wenn die Defektkorrektur sinnvoll sein soll. Im vorliegenden Zusammenhang wird $p = 4$ angestrebt; vgl. dazu Kapitel 3.

Wir wollen uns nun zunächst kurz der "klassischen" Betrachtungsweise der Defektkorrektur zuwenden. Aus dieser Sicht wäre wegen der vorgelegten Ordnungsfolge (2,4) nur ein einziger Iterationsschritt sinnvoll, und zwar ausgehend von der exakten Lösung der Basis-Diskretisierung. Also:

$$u^{(0)} := L^{-1} f \Rightarrow \|e^{(0)}\| = O(h^2) ,$$

$$e^{(1)} = L^{-1} \Delta L e^{(0)} - \bar{e} .$$

Um zum optimalen Ergebnis $\|e^{(1)}\| = O(h^4)$ zu gelangen, hätte man (unter der Annahme $\|\bar{e}\| = O(h^4)$) nachzuweisen, daß $L^{-1} \Delta L$, angewendet auf $e^{(0)}$, wie $O(h^2)$ kontrahiert. In der vorliegenden Situation ist ΔL im wesentlichen von der Gestalt

$$\frac{1}{h^2} \times \text{Differenz 4. Ordnung} .$$

Falls nun $e^{(0)}$ eine hinreichend lange asymptotische Entwicklung in Potenzen von h besitzt, wird daher

$$\|L^{-1} \Delta L e^{(0)}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|\Delta L e^{(0)}\| = O(h^4)$$

wegen der Stabilität von L und $\|e^{(0)}\| = O(h^2)$.

Nun gestattet aber bekanntlich (vgl. Böhmer [2]) die Basis-Diskretisierung (in der Formulierung nach Shortley-Weller in den randnahen Punkten) nur eine asymptotische Entwicklung der Gestalt

$$e^{(0)}(x,y) = h^2 \cdot e_2(x,y) + O(h^3) . \tag{1.8}$$

Der unsymmetrische Differenzenstern in den randnahen Punkten bedeutet nämlich nichts anderes als die Anwendung der symmetrischen Differenzenformel auf ein durch die beteiligten Punkte gedachtes Interpolationspolynom vom Grad 2. Daher dominiert der unregelmäßige $O(h^3)$ -Interpolationsfehler die Länge der asymptotischen Entwicklung.

Es ist klar, daß die Entwicklung (1.8) zu kurz ist, um das optimale Verhalten $\|e^{(1)}\| = O(h^4)$ garantieren zu können. Eine Abhilfe für dieses Problem bietet die Verwendung höherer Interpolationsgrade (vgl. Böhmer [2], Pereyra, Proskurowski, Widlund [13]). Diese führen jedoch zu sehr unhandlichen Differenzenformeln und werden praktisch kaum eingesetzt.

Im folgenden wird die Defektkorrektur in einem anderen Sinn verwendet:

- (1.3) wird, ausgehend von einer "beliebigen" Startlösung $u^{(0)}$, iteriert, wobei L jeweils nur näherungsweise invertiert wird (Multigrid-Zyklus).

Damit stellt sich die Frage nach dem Kontraktionsverhalten der Defektkorrekturiteration, also im wesentlichen dem Verhalten von $\|L^{-1} \Delta L\|$ in Abhängigkeit von h . Bei der "klassischen" Anwendung der Defektkorrektur (siehe oben) tritt diese Frage gar nicht

auf bzw. wird durch ein einfaches Stabilitätsargument und die Defektbildung bezüglich sehr glatter Diskretisierungsfehler umgangen.

Das Kontraktionsproblem in allgemeinen Gebieten erweist sich als äußerst interessant und lehrreich und stellt das zentrale Thema der Kapitel 4 und 5 dar.

Kapitel 2 beschäftigt sich zunächst mit der ausführlichen formalen Darstellung der Defektkorrektur-Iteration, ihrer Kombination mit einem iterativen Lösungsprozeß für L (Multigrid) und der "Vorbehandlung" durch einen Glättungsoperator. Weiters werden umfassende quantitative Resultate für den Fall eines rechteckigen Gebietes angegeben.

2. FORMALE DARSTELLUNG UND MODELLPROBLEMANALYSE

2.1 Fehlerglättung, Defektkorrektur und Multigrid-Iteration

Bei der Defektkorrektur-Iteration (1.3),

$$u^{(i+1)} = (I - L^{-1}L') u^{(i)} + L^{-1}f' = L^{-1}\Delta L u^{(i)} + L^{-1}f' ,$$

setzen wir natürlich Stabilität der Basis-Diskretisierung voraus: $\|L^{-1}\| \leq C$ (in einer geeigneten Norm). An die Defekt-definierende Diskretisierung werden solche Forderungen nicht gestellt: L' kann instabil oder sogar singular sein. Falls nun (1.3) konvergiert, denn gegen eine Lösung von $L'u = f'$. Eine simple Überlegung zeigt, daß aus "globaler" Kontraktivität (d.h. $\|L^{-1}\Delta L\| \leq C < 1$) die Stabilität von L' bereits folgt:

Satz 2.1: Sei L stabil und $\|L^{-1}\Delta L\| \leq C < 1$. Dann ist auch L' invertierbar und stabil mit

$$\|L'^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\Delta L\|} .$$

Beweis: Wegen $\|L^{-1}\Delta L\| = \|I - L^{-1}L'\| < 1$ ist $L^{-1}L'$ und damit auch L' invertierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \|L'^{-1}\| &\leq \|L^{-1}\| + \|L'^{-1} - L^{-1}\| = \|L^{-1}\| + \|(I - L^{-1}L')L'^{-1}\| \leq \\ &\leq \|L^{-1}\| + \|L^{-1}\Delta L\| \cdot \|L'^{-1}\| \end{aligned}$$

→ Behauptung wegen $\|L^{-1}\Delta L\| < 1$. □

Umgekehrt kann $L^{-1}\Delta L$ nicht global kontrahieren, wenn L' nicht stabil ist!

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 ist $u' = L'^{-1}f'$ und $\|u' - u^*\| \leq \|L'^{-1}\| \cdot \|L'u^* - f'\| = O(h^p)$ für $O(h^p)$ - konsistentes L' . Wir wollen aber aus gutem Grund (im Hinblick auf Kapitel 3) die Qualität des Fixpunktes auf andere Weise diskutieren:

Nach (1.7) gilt für $e' := u' - u^*$

$$L'e' = -L\bar{e} \quad \text{mit} \quad \bar{e} = L^{-1}(L'u^* - f').$$

Falls nun $\|L^{-1}\Delta L\| < 1$ ist, argumentiert man wie beim Beweis von Satz 2.1 und erhält

$$\|L'^{-1}L\| \leq \frac{1}{1 - \|L^{-1}\Delta L\|}.$$

Daher ist

$$\|e'\| = \|L'^{-1}L\bar{e}\| \leq \frac{\|\bar{e}\|}{1 - \|L^{-1}\Delta L\|} \quad (2.1)$$

Damit ist alles auf die Untersuchung von \bar{e} zurückgeführt. Auf L'^{-1} wird nicht Bezug genommen, weil in \bar{e} L'^{-1} durch L^{-1} "ersetzt" ist.

Die Abschätzung (2.1) läßt sich übrigens auch verallgemeinern. Wir setzen nur mehr "lokale" Kontraktivität voraus, d.h.

$$\|L^{-1}\Delta L e\| \leq k \cdot \|e\|, \quad k < 1, \quad e \in E,$$

wobei E ein geeigneter Bereich von Gitterfunktionen ist, für den gilt, daß die "Fehler-Iteration" (1.6) nicht aus E hinausläuft. Dann läßt sich in E der Kontraktionssatz anwenden, wobei L' nicht mehr invertierbar sein muß. Man erhält analog zu (2.1):

Satz 2.2: Unter den angeführten Voraussetzungen gilt für den Fixpunkt u' der Iteration (1.3): $L'u' = f'$ und

$$\|e'\| = \|u' - u^*\| \leq \frac{\|\bar{e}\|}{1 - k}.$$

Beweis: Nach (1.6) ist $L^{-1}L'e' = -\bar{e}$. Daher:

$$\begin{aligned} \|e'\| &= \|L^{-1}L'e' + (I - L^{-1}L')e'\| \leq \|\bar{e}\| + \|L^{-1}\Delta L e'\| \leq \\ &\leq \|\bar{e}\| + k \cdot \|e'\|. \quad \rightarrow \text{Behauptung wegen } k < 1. \quad \square \end{aligned}$$

Es muß allerdings betont werden, daß sich Satz 2.2 im vorliegenden Zusammenhang (lineares Problem, Defektbildung mittels Differenzen höherer Ordnung) nicht unmittelbar anwenden läßt. Satz 2.2 ist eher für Situationen interessant, in denen L lineare Approximation eines nichtlinearen L' ist (vgl. dazu [1], Abschnitt 5).

Typisch für die hier untersuchte Methode ist vielmehr, daß $L^{-1}\Delta L$ (vgl. (1.6))

- stark kontrahiert bei Anwendung auf "sehr glatte" Fehler $e^{(i)}$,
- mäßig (oder garnicht) kontrahiert bei Anwendung auf "unglatte" Fehler $e^{(i)}$.

Das non plus ultra an Kontraktionsstärke wäre $O(h^2)$; siehe dazu Abschnitt 1.3 und die Modellproblemanalyse in [1]. Das ist in der Praxis aus den bekannten Gründen nicht erzielbar. Es stellt sich nun die Frage, wie man für zufriedenstellendes Kontraktionsverhalten sorgen kann. Insbesondere im Hinblick auf die Kombination mit Multigrid-Verfahren bietet sich hier natürlich *Fehlerglättung mittels Relaxation* (wie bei Multigrid) vor jeder Defektbildung an.

Die Idee der Fehlerglättung in diesem Sinn ("a-priori-smoothing") ist in [1] erstmals diskutiert. Falls man zur Glättung einen oder mehrere Schritte eines geeigneten Relaxationsverfahrens bezüglich $L'u = f'$ verwendet, ändert sich natürlich nichts am Fixpunkt der Iteration; die Kontraktionsgeschwindigkeit erhöht sich.

Eine zweite Variante ist in [1] vorwiegend im Hinblick auf die Praxis eingeführt: Es wird vorausgesetzt, daß eine Multigrid-Prozedur zur Lösung von $Lu = f$ zur Verfügung steht. Eine Komponente dieser Multigrid-Prozedur dient zur Fehlerglättung (vor Übergabe des Residuums an eine gröbere Diskretisierungsebene), und zwar mit Hilfe eines Relaxationsverfahrens (z.B. Jacobi gedämpft oder Gauß/Seidel) bezüglich $Lu = f$. Es scheint vernünftig, genau diesen Relaxationsoperator auch für die Glättung vor

der Defektbildung zu verwenden. Die Iteration hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(i)} &:= (I - SL) u^{(i)} + Sf \dots \text{Glättung} \\ u^{(i+1)} &:= (I - L^{-1}L') \bar{u}^{(i)} + L^{-1}f' \dots \text{Defektkorrektur} \end{aligned} \quad (2.2)$$

(In der Praxis: $K \approx L^{-1}$, siehe weiter unten.)

Ein Fixpunkt von (2.2) ist nun *keine Lösung von* $L'u = f'$ mehr. In [1] wird plausibel gemacht und gezeigt, daß die entstehende Fixpunktverschiebung das Genauigkeitsniveau nicht mindert. Die diesbezüglichen Überlegungen werden in der Folge auf neue Weise dargestellt.

Dazu schreiben wir (2.2) als Einschritt-Iteration:

$$u^{(i+1)} := (I - L^{-1}L') (I - SL) u^{(i)} + (I - L^{-1}L') Sf + L^{-1}f'$$

Sei $M := (I - L^{-1}L') (I - SL) = L^{-1}\Delta L(I - SL)$. Wegen $\|I - SL\| < 1$ gilt stets

$$\|M\| < \|L^{-1}\Delta L\| .$$

Es kann also sein, daß (2.2) kontrahiert, ohne daß das für die Defektkorrektur an sich gilt. Wir wollen nun (in Abschwächung der Forderung $\|L^{-1}\Delta L\| < 1$) annehmen, daß $\|M\| < 1$. Dann gelten für den Fixpunkt der Iteration (2.2) folgende Aussagen.

Satz 2.3: Sei $\|M\| < 1$. \hat{u} sei der Fixpunkt von (2.2), $\hat{e} := \hat{u} - u^*$. Dann gilt:

$$(a) \quad \|\hat{e}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|} [\|L^{-1}\Delta L\| \cdot \|S\| \cdot \|Lu^* - f\| + \|L^{-1}(L'u^* - f')\|] . \quad (2.3)$$

(b) \hat{u} ist Lösung von $\hat{L}u = \hat{f}$, wobei

$$\hat{L} := L' + \Delta L S L, \quad \hat{f} := f' + \Delta L S f . \quad (2.4)$$

Dabei ist \hat{L} stabil mit

$$\|\hat{L}^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|M\|} .$$

Beweis:

(a) Der Fixpunkt \hat{u} ist definiert durch

$$(I - M)\hat{u} = (I - L^{-1}L') Sf + L^{-1}f' .$$

Daher gilt für $\hat{e} = \hat{u} - u^*$:

$$\begin{aligned} (I - M)\hat{e} &= (I - L^{-1}L') Sf + L^{-1}f' - (I - M) u^* = \\ &= (I - L^{-1}L') Sf + L^{-1}f' - u^* + (I - L^{-1}L') (I - SL) u^* \\ &= (I - L^{-1}L') Sf + L^{-1}f' - L^{-1}L' u^* - (I - L^{-1}L') SL u^* \\ &= - (I - L^{-1}L') S(Lu^* - f) - L^{-1}(L'u^* - f') . \end{aligned}$$

Mit $\|M\| < 1$ folgt die Abschätzung (2.3).

(b) Es ist $M = I - L^{-1}\hat{L}$ mit $\hat{L} := L' + \Delta L S L$ und

$$\hat{L}u = L(I - M) \hat{u} = LL^{-1}\Delta L S f + LL^{-1}f' = f' + \Delta L S f =: \hat{f} .$$

Weiters ist wegen $\|M\| < 1$ $I - M = L^{-1}\hat{L}$ invertierbar und somit auch \hat{L} . Mit $\hat{L}^{-1} = (I - M)^{-1}L^{-1}$ folgt

$$\|\hat{L}^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|M\|} . \quad \square$$

Anmerkung:

- Im Fall $S = 0$ (keine Glättung) erhält man wieder (2.2).
- \hat{L} kann man als Stabilisierung von L' ansehen: Es ist möglich, daß \hat{L} stabil ist trotz instabilem L' .

In der vorliegenden Anwendung haben wir:

- $\|S\| = O(h^2)$ für die in Frage kommenden Relaxationsverfahren,

(daher auch $\|\Delta L S\| = O(1)$ wegen $\|\Delta L\| = O(h^{-2})$),

$$- \|Lu^* - f\| = O(h^2),$$

$$- \|L^{-1}(L'u^* - f')\| = O(h^4) \text{ (wird angestrebt; vgl. Kapitel 3).}$$

Nehmen wir nun an, daß $\|L^{-1}\Delta L\| \leq C$ beschränkt ist (C beliebig), so folgt aus der Abschätzung (2.3) die gewünschte Approximationsqualität:

$$\|\hat{e}\| = O(h^4).$$

Anmerkung: Die aus der Praxis kommende Forderung nach Verwendung eines Relaxationsoperators bezüglich $Lu = f$ für die Glättung erweist sich hier als Vorteil in zweierlei Hinsicht:

- S wirkt "stabilisierend".

- Wir erwarten, daß $\|L^{-1}\Delta L(I-SL)\|$ deutlich kleiner ist als $\|L^{-1}\Delta L\|$, falls S eine gute Glättung, d.h. Reduktion der hochfrequenten Fehlerkomponenten, bewirkt. Quantitative Resultate dazu finden sich in Abschnitt 2.3.

Es wurde bereits mehrmals betont, daß das Ganze erst durch angenäherte Lösung der Gleichungen für L seinen eigentlichen Sinn erhält. Konkret sei $K \approx L^{-1}$ gegeben durch einen Multigrid-Zyklus. Dann ist typischerweise

$$\|I - KL\| \leq C \ll 1, \tag{2.5}$$

und zwar unabhängig von h - einer der großen Vorteile der Multigrid-Verfahren (vgl. Stüben/Trottenberg [15]). Die kombinierte Iteration lautet nun:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(i)} &:= (I - SL) u^{(i)} + Sf \\ u^{(i+1)} &:= (I - KL') \bar{u}^{(i)} + Kf' \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wir haben also in den obigen Überlegungen jeweils L^{-1} durch K zu ersetzen, ebenso ΔL durch $K^{-1} - L'$. (K^{-1} existiert wegen (2.5).) Es ist (vgl. [1]):

$$(I - KL') = (I - KL) + (I - L^{-1}L') - (I - KL)(I - L^{-1}L'),$$

$$\|I - KL'\| \leq \|I - KL\| + \|L^{-1}\Delta L\| + \|I - KL\| \cdot \|L^{-1}\Delta L\|.$$

Falls $\|L^{-1}\Delta L\|$ beschränkt ist, ist auch $\|I - KL'\|$ beschränkt, und wegen (2.5) ist zu erwarten, daß $\|I - KL'\|$ nicht viel größer ist als $\|L^{-1}\Delta L\|$.

Die Inhomogenität \bar{e} hat nun die Gestalt

$$\bar{e} = K(L'u^* - f').$$

Wegen $\|KL\| \leq 1 + \|I - KL\|$ ist

$$\|\bar{e}\| = \|K L L^{-1}(L'u^* - f')\| \leq [1 + \|I - KL\|] \cdot \|L^{-1}(L'u^* - f')\|.$$

Damit liegt nichts wesentlich Neues vor; entscheidend ist $L^{-1}(L'u^* - f')$, wie gehabt.

Die Darstellung (2.4) für die stabilisierte Diskretisierung $\hat{L}u = \hat{f}$ bleibt bestehen mit $K^{-1} - L'$ an Stelle von ΔL :

$$\hat{L} = L' + (K^{-1} - L') SL,$$

$$\hat{f} = f' + (K^{-1} - L') Sf.$$

Alle restlichen Überlegungen bleiben sinngemäß richtig mit K an Stelle von L^{-1} . Statt $\|L^{-1}\|$ ist jeweils

$$\|K\| \leq \|KL\| \cdot \|L^{-1}\| \leq [1 + \|I - KL\|] \cdot \|L^{-1}\|$$

zu setzen.

Anmerkung: Die Iteration (2.6) ist ähnlich der von Hackbusch [10] betrachteten, jedoch nicht identisch damit; vgl. auch [1].

2.2 Der Modellfall eines quadratischen Gebietes

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Defektkorrektur (im Sinn von Abschnitt 1.3) für die Diskretisierung von (1.1) zu, und zwar zunächst dem Fall eines quadratischen Gebietes und konstanten Helmholtz-Termes $c(x,y) = \text{const.} \geq 0$:

$$-\Delta u(x,y) + c \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \quad (2.7)$$

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

Dieses Modellproblem wurde im wesentlichen bereits in [1] betrachtet. Auf Grund der regelmäßigen Geometrie lassen sich für $h = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, in jedem inneren Gitterpunkt die symmetrischen Differenzensterne $-\Delta_h, -\Delta'_h$ im Sinn von Abschnitt 1.3 für die Basis- bzw. Defekt-definierende Diskretisierung verwenden. Dann ist auf Grund von (1.4) ΔL erklärt durch den Differenzenstern

$$L \sim \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c}{12} \begin{bmatrix} -1 & & \\ -1 & 4 & -1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Da die Randbedingung stets exakt erfüllt wird, kann man sich bei allen folgenden Betrachtungen über Fehlerkontraktion auf solche Gitterfunktionen beschränken, die auf $\partial\Omega$ verschwinden. Im Raum dieser Gitterfunktionen besitzen L und ΔL eine gemeinsame orthogonale Basis $\{s_{kl}, k,l = 1(1)n-1\}$ aus Eigenvektoren: An Gitterpunkt $P = (ih,jh)$ ist

$$(s_{kl})_{ij} = \sin \frac{ki\pi}{n} \cdot \sin \frac{lj\pi}{n}, \quad i,j = 1(1)n-1.$$

Die zugehörigen Eigenwerte λ_{kl} von L bzw. θ_{kl} von ΔL sind:

$$\lambda_{kl} = \frac{2}{h^2} [(1-c_k) + (1-c_l)] + c,$$

$$\theta_{kl} = \frac{3}{h^2} (1-c_k)(1-c_l) + \frac{c}{6} [(1-c_k) + (1-c_l)],$$

wobei $c_k := \cos \frac{k\pi}{n}$ gesetzt wurde.

Im weiteren schreiben wir statt $O(h^2)$ deutlicher $O(ch^2)$, falls die O -Konstante linear von c abhängt. Darüber hinaus werden auch von h und c unabhängige Aussagen formuliert werden. Solche Aussagen sind wichtig für sehr große c bzw. sehr grobe Gitter.

Über das Kontraktionsverhalten von $L^{-1}\Delta L$ läßt sich nun folgendes sagen:

Satz 2.4: Die Defektkorrektur (1.3) für (2.7) kontrahiert gleichmäßig in h :

$$\begin{aligned} - \|L^{-1}\Delta L\|_2 &\leq \frac{1}{3} + O(ch^2), \\ - \|L^{-1}\Delta L\|_2 &< \frac{2}{3} \quad \text{für beliebige } h,c. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Beweis: $L^{-1}\Delta L$ ist symmetrisch mit den Eigenwerten

$$\lambda_{kl}^{-1}\theta_{kl} = \frac{1}{3} \frac{(1-c_k)(1-c_l) + \frac{ch^2}{4} [(1-c_k) + (1-c_l)]}{(1-c_k) + (1-c_l) + \frac{ch^2}{2}}$$

Wir setzen $x := 1-c_k, y := 1-c_l$, also $0 < x,y < 2$, $\varphi(x,y) := \lambda_{kl}^{-1}\theta_{kl}$. Sei $a := \frac{ch^2}{4}$. Also

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{3} \frac{xy + a(x+y)}{x+y+2a}$$

- Für $c = 0$ (also $a = 0$) ist $\varphi(x,y) < \frac{1}{3}$ (vgl. [1]).
- Für $c > 0$ ist $\varphi(0,0) = 0$. Entlang $y = bx$, $b \in [0,1]$, wird

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,bx) = \frac{1}{3} \frac{bx^2 + a(1+b)x}{(1+b)x + 2a}$$

Bei Ableitung nach x erhält man im Zähler

$$\begin{aligned} & [(1+b)x + 2a] \cdot [2bx + a(1+b)] - (1+b)[bx^2 + a(1+b)x] \\ & \geq (1+b) \cdot bx^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$\varphi(x,bx)$ wächst also für $x \geq 0$ monoton an. Für $x = 2$ ergibt sich

$$\varphi(2,2b) = \frac{1}{3} \frac{4b + 2a(1+b)}{2(1+b) + 2a} = \frac{1}{3} \frac{2b + a + ab}{1 + a + b}$$

Für $b \in [0,1]$ nimmt $\varphi(2,2b)$ sein Maximum bei $b = 1$ an:

$$\varphi(2,2b) \leq \frac{2}{3} \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{2}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{a+b}} \leq \frac{2}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \frac{2}{3} \frac{1+a}{2+a} = \varphi(2,2)$$

Wegen $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ ist das die gesuchte Schranke für $\|L^{-1}\Delta L\|_2$. Es folgt unmittelbar die Aussage des Satzes. \square

λ_{k1} , $k=1=n-1$, ist der größte Eigenwert von $L^{-1}\Delta L$. Dieser gehört zu der Komponente $s_{n-1,n-1}$ mit der höchsten Frequenz. Genauere Betrachtung lehrt, daß das $O(h^{-2})$ -Verhalten von ΔL bezüglich der hochfrequenten Komponenten durch ein $O(h^2)$ -Verhalten des "Summationsoperators" L^{-1} kompensiert wird. Diese Eigenschaft von L^{-1} geht über den üblichen Stabilitätsbegriff hinaus. Wir werden sie als "diskrete Regularität" bezeichnen und in Kapitel 4 im Rahmen der Untersuchung allgemeinerer Gebiete Ω darauf zurückkommen.

Bei geeigneter Dämpfung der hochfrequenten Fehleranteile ist eine deutlich verbesserte Kontraktionsrate zu erwarten (vgl.

[1]). Mit dieser Frage befaßt sich der nächste Abschnitt.

Anmerkung: Als Vorbereitung auf die Regularitätsbetrachtungen sei auf folgenden Zusammenhang hingewiesen:

- Da beim vorliegenden Modellproblem L ein positiv definiter Operator ist, ist durch

$$\|u\|_E := \langle Lu, u \rangle^{\frac{1}{2}} = \|L^{\frac{1}{2}}u\|_2$$

eine Norm ("Energienorm") erklärt. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt über dem Raum U_0 der auf Ω verschwindenden Gitterfunktionen:

$$\langle u, v \rangle := h^2 \sum_{P \in \mathbb{N}_h} u(P) \cdot v(P).$$

$L^{\frac{1}{2}}$ ist die positiv definite Wurzel von L . (Mit $L = QDQ^T$, $D > 0$ diagonal, ist $L^{\frac{1}{2}} = QD^{\frac{1}{2}}Q^T$.)

Die zugehörige Abbildungsnorm sei ebenfalls mit $\|\cdot\|_E$ bezeichnet. Es gilt nun:

- $\|A\|_E = \|L^{\frac{1}{2}}AL^{-\frac{1}{2}}\|_2$ für jeden linearen Operator A .
 - Ist speziell A symmetrisch und mit L vertauschbar, dann ist $\|A\|_E = \|A\|_2$.
 - Speziell gilt beim Modellproblem: $\|L^{-1}\Delta L\|_E = \|L^{-1}\Delta L\|_2$.
- Eine Verallgemeinerung der Energienorm für beliebige Gebiete spielt eine wichtige Rolle in den späteren Kapiteln.

2.3 Fehlerglättung und Kontraktionsverhalten:
Quantitative Resultate beim Modellproblem

Im Hinblick auf die Kombination der Defektkorrektur-Iteration mit einem Multigrid-Solver stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen "Glättung" im Multigrid-Sinn und "Glättung" mit dem Ziel der Verstärkung der Defektkorrektur-Kontraktion. Für das in diesem Kapitel betrachtete Modellproblem wird in folgenden ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen hergestellt und das Ergebnis (2.8) erweitert.

Die für das Funktionieren der Multigrid-Verfahren wesentliche Glättungseigenschaft wird in der Multigrid-Konvergenztheorie (vgl. Hackbusch [9]) beschrieben durch die sogenannte "smoothing property":

- Ein Relaxationsoperator $R = I - SL$ besitzt bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ die "smoothing property", wenn gilt

$$\|LR^v\| \leq C(v) \cdot h^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (2.9)$$

mit $C(v) \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$. Bei einem Problem 2. Ordnung ist typischerweise $\alpha = 2$.

Bei Hackbusch [9] ist die smoothing property im Fall eines positiv definiten L nachgewiesen, und zwar für

- Jacobi-artige Relaxation mit geeigneter Dämpfung (Satz 3.7 in [9]),
- Gauß/Seidel-Relaxation bei schachbrettartiger Anordnung der Gitterpunkte (im Fall eines 5-Punkt-Differenzensternes; Satz 3.13 in [9]).

Angewendet auf die Diskretisierung des Modellproblems (2.7) lauten die entsprechenden Resultate:

- Sei $R = J = I - S_J L$ Jacobi-Relaxation mit Dämpfungsparameter $\omega = \frac{4+ch^2}{8+ch^2}$. Dann gilt

$$\|LJ^v\|_2 \leq \frac{3}{v+2} \left(1 + \frac{ch^2}{4}\right) h^{-2}, \quad v \geq 1.$$

- Sei $R = G = I - S_G L$ Gauß/Seidel-Relaxation. Dann gilt

$$\|LG^v\|_2 \leq \frac{8}{3\sqrt{3}v} \left(1 + \frac{ch^2}{4}\right) h^{-2}, \quad v \geq 1.$$

Nun zur Bedeutung der smoothing property für die Defektkorrektur beim Modellproblem:

Satz 2.5: R besitze die smoothing property (2.9) bezüglich $\|\cdot\|_2$ mit $\alpha = 2$. Dann ist

$$\|L^{-1} \Delta L R^v\|_2 \leq \frac{C(v)}{24} (1 + O(ch^2)), \quad v \geq 1.$$

Beweis: L und ΔL sind symmetrisch und vertauschbar. (R wird nicht als symmetrisch vorausgesetzt.) Es ist

$$\|L^{-1} \Delta L R^v\|_2 = \|L^{-1} \Delta L L^{-1} L R^v\|_2 \leq \|L^{-1} \Delta L L^{-1}\|_2 \cdot \|L R^v\|_2.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von L^{-1} mit ΔL und des Bestehens der smoothing property folgt:

$$\|L^{-1} \Delta L R^v\|_2 \leq \rho(L^{-1} \Delta L L^{-1}) \cdot C(v) \cdot h^{-2}, \quad v \geq 1.$$

Die Eigenwerte von $L^{-1} \Delta L L^{-1}$ (vgl. Abschnitt 2.2) sind:

$$\lambda_{kl}^{-2} = \frac{h^2}{6} \frac{(1-c_k)(1-c_l) + \frac{ch^2}{4} [(1-c_k) + (1-c_l)]}{[(1-c_k) + (1-c_l) + \frac{ch^2}{2}]^2}$$

Mit $x := 1-c_k$, $y := 1-c_l$, $0 < x, y < 2$, $\psi(x, y) := \lambda_{kl}^{-2}$, $a := \frac{ch^2}{4}$ ist

$$\psi(x, y) = \frac{h^2}{6} \frac{xy + a(x+y)}{[(x+y) + 2a]^2}.$$

- Für $c = 0$ (also $a = 0$) zeigt man leicht

$$\psi(x,y) = \frac{h^2}{6} \frac{xy}{(x+y)^2} < \psi(2,2) = \frac{h^2}{24}.$$

- Für $c > 0$ ist $\psi(0,0) = 0$. Entlang $y = bx$, $b \in [0,1]$, wird

$$\psi(x,y) = \psi(x,bx) = \frac{h^2}{6} \frac{bx^2 + a(1+b)x}{[(1+b)x + 2a]^2}.$$

Bei Ableitung nach x erhält man im Zähler

$$[(1+b)x + 2a]^2 [2bx + a(1+b)] - 2[(1+b)x + 2a] (1+b) [bx^2 + a(1+b)x] = \\ = a[(1+b)x + 2a] [2a(1+b) - x(1-b)^2].$$

- Für $b = 1$ ist dieser Ausdruck immer > 0 ; daher ist für $x \in (0,2)$:

$$\psi(x,x) \leq \psi(2,2) = \frac{h^2}{6} \frac{1+a}{(2+a)^2}$$

- Für $b < 1$ ist der Ausdruck > 0 an $x = 0$, fällt ab und erreicht seine Nullstelle an

$$\bar{x} = 2a \frac{(1+b)}{(1-b)^2}.$$

Falls $a \geq \frac{(1-b)^2}{(1+b)}$, liegt die Nullstelle außerhalb von $[0,2]$, daher ist für $x \in (0,2)$

$$\psi(x,bx) \leq \psi(2,2b) = \frac{h^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \frac{2b + a(1+b)}{[(1+b) + a]^2}.$$

Man zeigt leicht, daß der Maximalwert für $b = 1$ angenommen wird (siehe oben).

Falls $a < \frac{(1-b)^2}{(1+b)}$, liegt die Nullstelle \bar{x} im Intervall $[0,2]$. Der zugehörige Maximalwert von $\psi(x,bx)$ errechnet sich zu

$$\frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{h^2}{24}.$$

Damit folgt die Aussage des Satzes. Für große a , etwa $ch^2 \geq 4$, schreibt man anstatt $O(ch^2)$ besser

$$\|L^{-1} \Delta R^v\|_2 \leq \frac{C(v)}{6} \cdot \frac{(1+a)}{(2+a)^2} < \frac{C(v)}{6}.$$

Für Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Relaxation erhält man konkret mit $a := \frac{ch^2}{4}$:

$$\|L^{-1} \Delta L J^v\|_2 \leq \frac{1}{6} \frac{3}{v + \frac{1}{2}} \frac{(1+a)^2}{(2+a)^2},$$

$$\|L^{-1} \Delta L G^v\|_2 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}v} \frac{(1+a)^2}{(2+a)^2},$$

es ist $\frac{(1+a)^2}{(2+a)^2} = \frac{1}{4} + O(ch^2)$ und $\frac{(1+a)^2}{(2+a)^2} < 1$ für beliebige c, h .

Im Fall der Poisson-Gleichung ($c = 0$) ergibt sich speziell:

$$\|L^{-1} \Delta L J^v\|_2 \leq \frac{1}{8v+4}, \quad v \geq 1,$$

$$\|L^{-1} \Delta L G^v\|_2 \leq \frac{1}{9\sqrt{3}v}, \quad v \geq 1.$$

Gegenüberstellung der Werte für kleine v (Poisson-Gleichung):

| v | $\ L^{-1} \Delta L J^v\ _2$ | $\ L^{-1} \Delta L G^v\ _2$ |
|-----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 0.083 | 0.064 |
| 2 | 0.050 | 0.032 |
| 3 | 0.036 | 0.021 |
| 4 | 0.028 | 0.016 |

Die Glättungsoperatoren J, G bewirken also eine deutliche Reduktion der Kontraktionsrate gegenüber dem ursprünglichen Wert $\frac{1}{3}$; die Gauß/Seidel-Relaxation erweist sich als überlegen.

Für sehr große c, h zeigt der Beweis von Satz 2.5

$$\|L^{-1}\Delta LR^v\|_2 < \frac{1}{6} C(v) .$$

Diese Abschätzung ist jedoch weitaus zu grob: Etwa im Fall der gedämpften Jacobi-Relaxation ist ja für $ch^2 \gg 1$:

$$\|J\|_2 \approx \frac{8}{ch^2} \quad \text{und daher}$$

$$\|L^{-1}\Delta LJ^v\|_2 \approx \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{(ch^2)^v} \quad \text{sehr klein wegen } \frac{1}{ch^2} \ll 1.$$

Die Anwendung des smoothing property liefert also für $ch^2 \gg 1$ nicht das richtige Bild; tatsächlich bewirkt die Glättung hier eine extreme Verbesserung gegenüber dem Wert $\frac{2}{3}$ für $v = 0$.

Damit sei die Untersuchung des Modellproblems vorerst abgeschlossen. Numerische Ergebnisse einer Implementierung der Defektkorrektur mit Hilfe eines Multigrid-Solvers für Rechteckgebiete sind in [1] angegeben; vgl. auch Abschnitt 6.

3. DEFINITION DES DEFEKTES IN ALLGEMEINEN GEBIETEN

3.1 Konsistenzanforderung; die Diskrete Greensche Funktion

Es sei nun Ω ein allgemeines Gebiet im \mathbb{R}^2 . Im Verlauf dieses Abschnittes werden gewisse Einschränkungen an Ω_h benötigt, die normalerweise durch Wahl eines hinreichend feinen Gitters erfüllt werden können.

In Kapitel 1 wurde die Defekt-definierende Diskretisierung $L'u = f'$ nur für solche Gitterpunkte erklärt, die die Anwendung des Mehrstellenoperators

$$-\Delta'_h \sim \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

innerhalb von Ω erlauben. Für die Punkte $P \in B_h$, in denen bereits die Basis-Diskretisierung unsymmetrisch (nach Shortley-Weller) ist, läßt sich der Mehrstellenoperator natürlich nicht anwenden. Diese Situation kann aber auch bei inneren Gitterpunkten $P \in R_h$ (mit symmetrischer Basis-Diskretisierung) vorliegen, und zwar wenn nicht alle "diagonalen Gitternachbarn" in Ω liegen. Wir bezeichnen die Menge dieser (im Sinn des Mehrstellenoperators randnahen) Punkte mit B'_h . Jeder Punkt $P \in B'_h$ besitzt mindestens einen Gitternachbarn aus B_h ; vgl. Abb. 3.1.

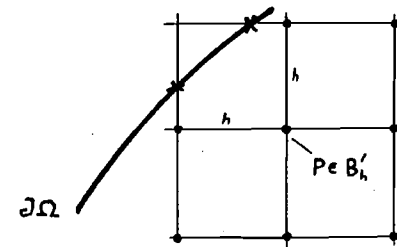


Abb. 3.1

In Abschnitt 1.3 wurde gefordert, daß der Fixpunkt der Defekt-korrektur-Iteration (1.3) eine $O(h^4)$ -Approximation der Lösung der Randwertaufgabe ist. Als notwendige Bedingung dafür wurde formuliert:

$$\|\bar{e}\| = \|L^{-1}(L'u^* - f')\| = O(h^4) .$$

Es wird nun gezeigt, daß in den randnahen Gitterpunkten $P \in B_h$ bzw. $P \in B'_h$ eine lokale Konsistenzordnung $O(h^2)$ für die Defekt-definierende Diskretisierung ausreicht, um $\|\bar{e}\|_\infty = O(h^4)$ zu garantieren. Diese Tatsache ergibt sich im wesentlichen aus den Aussagen von Bramble/Hubbard über die Inverse L^{-1} der Shortley-Weller-Diskretisierung.

Zu diesem Zweck stellt man L^{-1} am günstigsten explizit als "diskrete Greensche Funktion" $G(P,Q)$ dar. An Stelle von $u = L^{-1}v$ schreiben wir

$$u(P) = h^2 \sum_{Q \in \Omega_h} G(P,Q) \cdot v(Q) , \quad P \in \Omega_h . \quad (3.1)$$

Wegen der Beschränkung auf Dirichlet-Randbedingungen werden nur solche Gitterfunktionen betrachtet, die am Rand verschwinden; deshalb entfällt in der Darstellung (3.1) der sonst auftretende Randterm.

Im Bramble/Hubbard [3] wird für die Diskretisierung der Poisson-Gleichung Stabilität (also $h^2 \sum_{Q \in \Omega_h} G(P,Q) \leq C$) nachgewiesen; die Stabilitätsschranke gilt natürlich umso mehr für die Helmholtz-Gleichung mit $c(x,y) \geq 0$. Die Stabilitätsaussage beruht auf einem diskreten Maximum-Prinzip bzw. der daraus folgenden Tatsache $G(P,Q) \geq 0$. Darüber hinaus wird eine schärfere Abschätzung für die randnahen Teilsummen der diskreten Greenschen Funktion angegeben:

$$h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \leq h^2 \quad \text{für alle } P \in \Omega_h .$$

Der Vollständigkeit halber formulieren und beweisen wir die die entsprechende Aussage für die Helmholtz-Gleichung mit $c(x,y) \geq 0$:

Satz 3.1: Sei $C_{\text{inf}} := \inf_{(x,y) \in \Omega} c(x,y)$. Dann ist

$$h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \leq \frac{h^2}{1 + C_{\text{inf}}} h^{-2} , \quad P \in \Omega_h . \quad (3.2)$$

Beweis: Sei $v(P) = 1$ für alle $P \in R_h \cup B_h$ (und natürlich $v(P) = 0$ auf $\partial\Omega_h$). Es ist $-\Delta_h v(P) = 0$, $P \in R_h$, und $-\Delta_h v(P) \geq h^{-2}$, $P \in B_h$ (vgl. [3]). Daher gilt für beliebiges P wegen $c(x,y) \geq 0$ und $G(P,Q) \geq 0$;

$$\begin{aligned} 1 = v(P) &= h^2 \sum_{Q \in \Omega_h} G(P,Q) \cdot Lv(Q) \\ &\geq h^2 \sum_{Q \in R_h} G(P,Q) \cdot c(Q) + h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) (h^{-2} + c(Q)) \\ &\geq (h^{-2} + C_{\text{inf}}) h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) . \\ &\Rightarrow h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \frac{1}{h^{-2} + C_{\text{inf}}} \Rightarrow (3.2) . \quad \square \end{aligned}$$

Speziell für $C_{\text{inf}} h^2 \gg 1$ ist es von Bedeutung, daß gilt:

$$h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \leq \frac{1}{C_{\text{inf}}} .$$

Wir zeigen nun eine ähnliche Abschätzung für die Summe über die randnahen Punkte $Q \in B'_h$:

Satz 3.2:

$$h^2 \sum_{Q \in B'_h} G(P, Q) \leq \frac{5h^2(1 + \frac{1}{5} C_{\text{inf}} h^2)}{(1 + C_{\text{inf}} h^2)^2} \leq \frac{5h^2}{1 + C_{\text{inf}} h^2}, \quad P \in \Omega_h. \quad (3.3)$$

Beweis: Die Gitterfunktion v sei 0 am Rand und

$$v(P) := \begin{cases} 1, & P \in R_h, \\ 0, & P \in B'_h. \end{cases}$$

Es gilt nun:

- $Lv(Q) = -\Delta_h v(Q) + c(Q) \cdot v(Q) \geq 0, \quad Q \in R_h.$
- $Lv(Q) \geq h^{-2} + C_{\text{inf}}, \quad Q \in B'_h.$

Beweis: $Q \in B'_h$ hat mindestens einen Nachbarn in B_h . Daher:

$$-\Delta_h v(Q) \geq h^{-2} [4-1-1-1-0] = h^{-2} \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$-0 \leq (-Lv(Q)) \leq 4h^{-2}, \quad Q \in B_h.$$

Beweis: Wegen $v(Q) = 0$ ist natürlich $Lv(Q) \leq 0$. In den Randpunkten ist ebenfalls $v = 0$; in allen denkbaren Situationen ergibt sich $4h^{-2}$ als Schranke für $\Delta_h v(Q) = -Lv(Q)$.

Es folgt für beliebige P :

$$1 \geq v(P) = h^2 \sum_{Q \in \Omega_h} G(P, Q) \cdot Lv(Q) \geq h^2 \sum_{Q \in B'_h \cup B_h} G(P, Q) \cdot Lv(Q)$$

$$\Rightarrow 1 + h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P, Q) (-Lv(Q)) \geq h^2 \sum_{Q \in B'_h} G(P, Q) \cdot Lv(Q)$$

Wegen (3.2) und der obigen Ungleichungen für $Lv(Q)$ ist also

$$1 + \frac{h^2}{1 + C_{\text{inf}} h^2} \cdot 4h^{-2} \geq (h^{-2} + C_{\text{inf}}) h^2 \sum_{Q \in B'_h} G(P, Q)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^2 \sum_{Q \in B'_h} G(P, Q) &\leq \frac{1 + C_{\text{inf}} h^2 + 4}{(1 + C_{\text{inf}} h^2)^2} h^2 = \frac{5h^2(1 + \frac{1}{5} C_{\text{inf}} h^2)}{(1 + C_{\text{inf}} h^2)^2} \\ &\leq \frac{5h^2}{1 + C_{\text{inf}} h^2} \frac{1 + C_{\text{inf}} h^2}{1 + C_{\text{inf}} h^2} \Rightarrow (3.3). \quad \square \end{aligned}$$

Für sehr große $C_{\text{inf}} h^2$ strebt die schärfere Schranke in (3.3) gegen $\frac{1}{C_{\text{inf}}}$.

Folgerung: Die Defekt-definierende Diskretisierung sei so erklärt, daß die für die Gitterfunktion $\tau(P) := (L'u^* - f')(P)$ gilt

$$|\tau(P)| = \begin{cases} O(h^4), & P \in R_h \setminus B'_h \\ O(h^2), & P \in B'_h \cup B_h. \end{cases}$$

Dann ist, wie angestrebt,

$$\|\bar{e}\|_{\infty} = \|L^{-1}(L'u^* - f')\|_{\infty} = O(h^4).$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Stabilität und dem speziellen Randverhalten von L^{-1} :

$$\begin{aligned} |\bar{e}(P)| &= |h^2 \sum_{Q \in \Omega_h} G(P, Q) \cdot \tau(Q)| \\ &\leq C \cdot O(h^4) + 5h^2 \cdot O(h^2) + h^2 \cdot O(h^2) = O(h^4). \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Konstruktion der Defekt-definierenden Diskretisierung

Von nun an wollen wir stets voraussetzen, daß Ω so beschaffen bzw. das Gitter so fein gewählt ist, daß jeder randnahe Gitterpunkt $P \in B_h$ mindestens 2 innere Gitternachbarn in verschiedenen Koordinatenrichtungen besitzt. Unter dieser Bedingung lassen sich einfache, kompakte Differenzenformeln für L' konstruieren, die den Bedingungen aus Abschnitt 3.1 genügen.

In den Punkten $P \in B_h'$ ist die Situation besonders günstig. Nachdem die Basis-Diskretisierung hier symmetrisch ist, gilt $(Lu^* - f)(P) = O(h^2)$. Daher genügt es

$$L' := L, \quad f' := f \quad \text{an } P \in B_h' \quad (3.4)$$

zu wählen. In (1.5) bedeutet das $\Delta_h' = \Delta_h, W = I$.

In den Punkten $P \in B_h$ hat die Basis-Diskretisierung $Lu = f$ wegen der Unsymmetrie im allgemeinen nur $O(h)$ als lokale Konsistenzordnung. Durch geeignete Approximation des führenden $O(h)$ -Termes läßt sich die Konsistenz zu $O(h^2)$ verbessern. Dazu unterscheiden wir gemäß der Annahme am Beginn dieses Abschnittes 2 Situationen.

a) 1 Nachbar auf $\partial\Omega$, 3 Nachbarn innen:

Sei $P \in B_h$ und z.B. der linke Gitternachbar auf $\partial\Omega$ im Abstand λh von P ($0 < \lambda \leq 1$); vgl. Abb. 3.1. Der lokale Diskretisierungsfehler der Shortley-Weller-Formel ist hier

$$\begin{aligned} (Lu^* - f)(P) &= -\Delta_h u^*(P) + \Delta u^*(P) = \\ &= -h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) u_{xxx}^* + O(h^2). \end{aligned}$$

(Ableitungen von u^* verstehen sich als Ableitungen an der betrachteten Stelle P .)

Zur Reduktion auf $O(h^2)$ muß der lokale Fehler zunächst so verändert werden, daß sich sein führender Term als Ableitung von $-\Delta u^*$ schreiben läßt: Wegen des Bestehens der Differentialgleichung $-\Delta u^* = f - cu^*$ kann man dann durch Diskretisierung eben dieser Ableitung, angewendet auf $f - cu^*$, den $O(h)$ -Term im lokalen Fehler zum Verschwinden bringen.

Diese "Symmetrisierung" gelingt hier am einfachsten durch Einbeziehen zweier weiterer Diskretisierungspunkte laut Skizze:

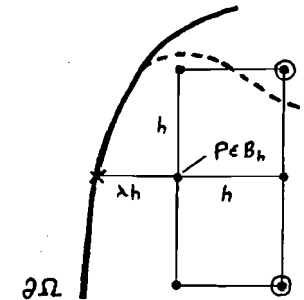


Abb. 3.2

Falls das nicht möglich ist (gestrichelter Verlauf der Randkurve), gibt es mögliche Alternativen (siehe unten).

$-\Delta_h'$ wird nun auf folgende Weise definiert:

Der 3. Differenzenquotient

$$\frac{1}{h^3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$$

ist eine $O(h)$ -Approximation der Ableitung u_{xyy} ; wir setzen an der Stelle P :

$$-\Delta'_h := -\Delta_h - \frac{1}{3} (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

und erhalten dadurch einen lokalen Fehler

$$\begin{aligned} -\Delta'_h u^*(P) + c(P) \cdot u^*(P) - f(P) &= -h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) (u_{xxx}^* + u_{xyy}^*) + O(h^2) \\ &= -h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) (\Delta u^*)_x + O(h^2) . \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines 1. Differenzenquotienten als $O(h)$ -Approximation für die 1. Ableitung nach x erklären wir nun einen Gewichtungsoperator W an der Stelle P :

$$W := I + \frac{1}{3} (1 - \lambda) \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.6)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} -\Delta'_h u^*(P) + Wcu^*(P) - Wf(P) &= \\ = -h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) (\Delta u^*)_x + h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) (cu^* - f)_x + O(h^2) , \end{aligned}$$

und der $O(h)$ -Term verschwindet wegen $\Delta u^* = cu^* - f$.

Als Defekt-definierende Differenzenformel verwenden wir also

$$-\Delta'_h u(P) + Wcu(P) = Wf(P) \quad (\text{vgl. (1.5)})$$

mit $-\Delta'_h$, W gemäß (3.5) bzw. (3.6).

Die Herleitung dieser $O(h^2)$ -konsistenten Formel zeigt, daß man für die "Symmetrisierung" jede beliebige $O(h)$ -Approximation

von u_{xyy} bzw. $(cu - f)_x$ verwenden kann. So kann man z.B. in einer Situation wie in Abb. 3.2 einen nach unten versetzten 3. Differenzenquotienten verwenden (wobei P als linker oberer Punkt mit dem Koeffizienten -1 auftritt), falls der Verlauf der Randkurve das zuläßt.

Falls sich kein regelmäßiger 3. Differenzenquotient in diesem Sinn bilden läßt, kann man natürlich versuchen, die in der Nähe von P gelegenen Punkte aus $\partial\Omega_h$ einzubeziehen. Das führt auf unregelmäßige Differenzenquotienten, die keine reine $O(h)$ -Approximation einer einzigen 3. Ableitung darstellen. Dadurch werden die Formeln unhandlich, und die auftretenden Koeffizienten werden meist beliebig groß, wenn P sehr nahe an $\partial\Omega$ liegt. Außerdem ist die praktische Implementierung einer solchen Vorgangsweise sehr kompliziert (viele Fallunterscheidungen notwendig). (Formeln dieses Typs wurden z.B. von Van Linde [17] angegeben.)

Aus diesen Gründen (aber auch im Hinblick auf Norm-Abschätzungen für $L^{-1}\Delta L$) beschränken wir uns auf die Verwendung regelmäßiger Differenzenquotienten für die Defektdefinition. Falls deren Verwendung nicht möglich ist, begnügen wir uns in der Praxis mit $L' = L$, $f' = f$, (was theoretisch eine Ordnungsreduktion auf $O(h^2)$ bedeutet). Bei glattem Verlauf der Randkurve und ausreichend feiner Diskretisierung sind solche Situationen sehr selten zu erwarten.

b) 2 Nachbarn auf $\partial\Omega$, 2 Nachbarn innen:

Sei $P \in B_h$ und z.B. der linke und obere Gitternachbar auf $\partial\Omega$ im Abstand λh bzw. μh von P ($0 < \lambda, \mu \leq 1$); vgl. Abb. 3.3. Der lokale Diskretisierungsfehler der Shortley-Weller-Formel ist hier

$$\begin{aligned} (Lu^* - f)(P) &= -\Delta_h u^*(P) + \Delta u^*(P) = \\ &= -h \cdot \frac{1}{3} (1 - \lambda) u_{xxx}^* + h \cdot \frac{1}{3} (1 - \mu) u_{yyy}^* + O(h^2) . \end{aligned}$$

Man geht nun ganz analog vor wie in Situation a). Bei Beschränkung auf regelmäßige Differenzenquotienten zur Approximation der 3. Ableitungen sind 5 weitere Diskretisierungspunkte laut Skizze einzubeziehen:

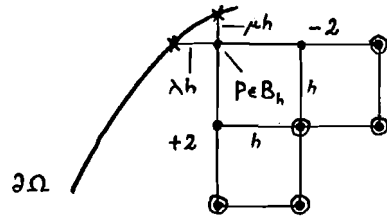


Abb. 3.3

Es bezeichnen D_{xyy} , D_{xxy} die regelmäßigen 3. Differenzenquotienten gemäß Abb. 3.3 (2 Koeffizienten $\neq 2$ sind zur Verdeutlichung eingetragen). Nach dem zuvor Gesagten ist klar, daß

$$-\Delta_h^3 u(P) + Wcu(P) = Wf(P) \quad (\text{vgl. (1.5)})$$

mit

$$-\Delta_h^3 := -\Delta_h - \frac{1}{3} (1 - \lambda) h D_{xyy} + \frac{1}{3} (1 - \mu) h D_{xxy}, \quad (3.7)$$

$$W := I + \frac{1}{3} (1 - \lambda) h D_x - \frac{1}{3} (1 - \mu) h D_y, \quad (3.8)$$

eine $O(h^2)$ -konsistente Differenzenformel darstellt. (Mit D_x , D_y bezeichnen wir die vorwärts genommenen 1. Differenzenquotienten.)

Bezüglich eventueller Schwierigkeiten bei (bezüglich des Gitters) zu stark gekrümmter Randkurve gilt das bei Situation a) Gesagte.

Abgesehen von solchen Schwierigkeiten haben wir nun eine geeignete Defekt-definierende Diskretisierung $L'u^* = f'$ in allen Gitterpunkten $P \in \Omega_h$ durch (1.4), (3.4), (3.5), (3.6) und (3.7), (3.8) erklärt.

Anmerkung.

- Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Differenzenoperatoren $-\Delta_h^3$ sind *nicht* im Hinblick auf Stabilitätseigenschaften konstruiert. So ist z.B. für $-\Delta_h^3$ in (3.7) die Eigenschaft der starken Diagonaldominanz i.a. nicht gegeben. (Diese würde nach den üblichen Argumenten Stabilität von L' sichern; vgl. Bramble/Hubbard [3].)
- Die zu den randnahen Punkten gehörigen $O(h^4)$ -Anteile in $L^{-1}(L'u^* - f')$ hängen von niedrigeren Ableitungen von $u^*(x,y)$ ab als die inneren Anteile. Je nach Verhalten aller dieser Ableitungen können sich also O -Konstanten verschiedener Größenordnungen ergeben, so daß entweder die inneren oder äußeren Anteile im Fehler dominieren.
- Natürlich gehen die Randformeln für L' , f' in jene für L , f über, wenn $\lambda (= \mu) = 1$ ist, also wenn eine symmetrische Situation vorliegt. Dort ist $\Delta L = 0$.
- $\Delta L = 0$ in *allen* randnahen Punkten ergibt sich speziell für Rechtecke und auch für alle Gebiete, die dort eine symmetrische Basis-Diskretisierung zulassen (z.B. gleichschenkelige Dreiecke und verschiedene aus solchen Elementen zusammengesetzte Gebiete). Die Untersuchung von $L^{-1}\Delta L$ ist hier etwas einfacher als im allgemeinen, unregelmäßigen Fall (vgl. Kapitel 5).

4. REGULARITÄT ELLIPTISCHER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

4.1 Die Regularitätsfrage und ihre Bedeutung für die Defektkorrektur

In Satz 2.4 wurde mittels diskreter Fourier-Analyse $\|L^{-1}\Delta L\|_2 \leq \frac{1}{3} + O(ch^2)$ für das Modellproblem im Quadratgebiet gezeigt. Nachdem ja hier $\|L^{-1}\|_2 \cdot \|\Delta L\|_2 = O(h^{-2})$ ist, stellt sich die Frage nach der Beschreibung des Kontraktionsverhaltens von $L^{-1}\Delta L$ durch geeignete Abbildungsnormen.

Wir führen folgende Notation ein: Sei A ein linearer beschränkter Operator $A: U \rightarrow V$, U, V normierte Räume mit den Normen $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_V$. Für die Norm von A schreiben wir $\|A\|_{V+U}$:

$$\|A\|_{V+U} := \sup_{0 \neq u \in U} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}.$$

Im weiteren ist stets $U = V$ der Raum U_0 der (am Rand verschwindenden) Gitterfunktionen über $\bar{\Omega}_h$; allerdings werden wir ihn mit verschiedenen Normen versehen. Für die durch das euklidische Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := h^2 \sum_{P \in \bar{\Omega}_h} u(P) \cdot v(P)$$

induzierte Norm $\|\cdot\|_2$ schreiben wir von nun ab meist $\|\cdot\|_{H_0}$ (diskrete Sobolev-Norm zum Index 0), und daher $\|A\|_{H_0+H_0} = \|A\|_2$. Im Fall eines quadratischen Gebietes (und $c(x,y) = \text{const.}$) gilt für $\|u\|_L := \|Lu\|_{H_0}$ wegen der Symmetrie von L und ΔL :

$$\|L^{-1}\Delta L\|_{H_0+H_0} = \|\Delta L L^{-1}\|_{H_0+H_0} = \|\Delta L\|_{H_0+L}.$$

$\|L^{-1}\Delta L\|_{H_0+H_0} \leq C$ ist also äquivalent zu

$$\|\Delta Lu\|_{H_0} \leq C \cdot \|Lu\|_{H_0} \quad \text{für alle } u \in U_0. \quad (4.1)$$

Der Nachweis einer solchen Ungleichung durch rein algebraische Argumente (Satz 2.4) ist nicht auf die Situation in allgemeinen Gebieten übertragbar. Auf Grund der Gestalt von ΔL (vgl. (1.4), (3.4)-(3.8)) ist jedoch ersichtlich, daß sich eine Abschätzung der Gestalt

$$\|\Delta Lu\|_{H_0} \leq C \cdot \left(\|D_{xx}u\|_{H_0} + \|D_{yy}u\|_{H_0} \right) \quad (4.2)$$

gewinnen läßt. Dabei bezeichnen D_{xx}, D_{yy} die über inneren Gitterpunkten gebildeten 2. zentralen Differenzenquotienten; es ist also $Lu = -(D_{xx} + D_{yy})u$ in den Punkten $P \in R_h$. Um von (4.2) auf (4.1) zu schließen, würde man eine Beziehung wie

$$\|D_{xx}u\|_{H_0} + \|D_{yy}u\|_{H_0} \leq C \cdot \|Lu\|_{H_0} \quad (4.3)$$

benötigen. Offensichtlich handelt es sich dabei um die Eigenschaft einer diskreten (H^2 -) Regularität des Differenzenoperators L . (4.3) stellt eine sehr einschneidende Forderung dar. Sie wurde von Hackbusch [12] untersucht. Auf die damit zusammenhängenden Fragen wird in Kapitel 5 kurz eingegangen. Hier sei nur noch bemerkt, daß die Unsymmetrie von L und ΔL im allgemeinen Fall zusätzliche Schwierigkeiten bereitet.

Es ist nun sehr interessant, daß in Analogie zum kontinuierlichen Fall eine "schwache Formulierung" des diskreten Problems leichter zu beherrschen ist bzw. daß schwächere Regularitätsaussagen (" H^1 -Regularität") im Gegensatz zu (4.3) in großer Allgemeinheit gelten. Die nächsten beiden Abschnitte sind diesem Thema gewidmet.

Anmerkung:

- Die Idee der Untersuchung von Diskretisierungsverfahren mit Hilfe des Konzepts der diskreten Regularität geht auf Hackbusch [11], [12]) zurück. Hackbusch hat sich in [10] auch

bereits mit der Anwendung dieses Konzeptes auf Defektkorrekturmethode beschäftigt. ([10] enthält im wesentlichen eine abstrakte Darstellung.)

- Der Begriff einer "H¹-Regularität" ist in der Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen wohl nicht gebräuchlich. Wir verwenden ihn trotzdem (in Anlehnung an Hackbusch), um einen deutlichen Kontrast gegenüber dem Stabilitätsbegriff zu setzen.

4.2 H¹-Regularität und ihre Anwendung beim Modellproblem

Wir betrachten den Rechtecksfall und schließen an die Bemerkung am Ende des Abschnittes 2.2 an: Es ist $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^0 \rightarrow H^0} = \|L^{-1}\Delta L\|_{E \rightarrow E}$ für die Energienorm $\|u\|_E = \langle Lu, u \rangle^{\frac{1}{2}}$. Diese Energienorm ist eng verwandt mit einer diskreten Sobolev (H¹-) Norm, die wie folgt definiert ist:

D_x, D_y bezeichnen die vorwärts genommenen, \bar{D}_x, \bar{D}_y die rückwärts genommenen 1. Differenzenquotienten über dem Gitter. Es ist

$$|u|_{H^1} := \left(\|D_x u\|_{H^0}^2 + \|D_y u\|_{H^0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

eine Norm über dem Raum U_0 der Gitterfunktionen. Bei Zugrundelegung eines unbeschränkten Gebietes Ω handelte es sich dabei nur um eine Halbnorm, deshalb die Schreibweise; außerdem unterscheiden wir sie von der diskreten Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{H^1}$, die durch

$$\|u\|_{H^1} := \left(\|u\|_{H^0}^2 + |u|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

erklärt ist.

Wir formulieren nun die grundlegenden Regeln der *partiellen Summation*:

$$\begin{aligned} \langle u, D_x v \rangle &= - \langle \bar{D}_x u, v \rangle, \\ \langle u, D_y v \rangle &= - \langle \bar{D}_y u, v \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es bezeichne L_0 den diskreten Laplace-Operator ($c(x,y) \equiv 0$). Für diesen gilt

$$L_0 = D_{xx} + D_{yy} = -\bar{D}_x D_x - \bar{D}_y D_y.$$

Partielle Summation (4.6) liefert

$$\begin{aligned} \langle L_0 u, u \rangle &= - \langle \bar{D}_x D_x u, u \rangle - \langle \bar{D}_y D_y u, u \rangle = \\ &= \langle D_x u, D_x u \rangle + \langle D_y u, D_y u \rangle = |u|_{H^1}^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Diese Beziehung ist als "Greensche Formel" bekannt und sagt, daß für $c(x,y) \equiv 0$ die Normen $\|\cdot\|_E$ und $|\cdot|_{H^1}$ übereinstimmen. (Diese Normen sind übrigens äquivalent in sehr viel allgemeineren Situationen.) Für beliebiges $c(x,y) \geq 0$ besteht die Ungleichung

$$\langle Lu, u \rangle \geq \varepsilon |u|_{H^1}^2 \quad (4.8)$$

mit $\varepsilon = 1$. Die Eigenschaft (4.8) (mit $\varepsilon > 0$) bezeichnen wir als (diskrete) "H¹-Koerzivität" von L.

Die zu $|\cdot|_{H^1}$ duale Norm wird mit $|\cdot|_{H^{-1}}$ bezeichnet:

$$|u|_{H^{-1}} := \sup_{0 \neq v \in U_0} \frac{|\langle u, v \rangle|}{|v|_{H^1}}.$$

$|u|_{H^{-1}}$ ist die Norm des durch $u(v) := \langle u, v \rangle$ definierten linearen Funktionals über U_0 . Ein beliebiger Differenzenoperator L besitzt die Eigenschaft der (diskreten) "H¹-Regularität", wenn gilt

$$\|L^{-1}\|_{H^1 \rightarrow H^{-1}} \leq C. \quad (4.9)$$

Lemma 4.1 (Hackbusch [11])

Aus H^1 -Koerzivität (4.8) folgt H^1 -Regularität (4.9) mit $C = \frac{1}{\epsilon}$.

Beweis: Zu zeigen ist $|u|_{H^1} \leq \frac{1}{\epsilon} |Lu|_{H^{-1}}$. Wegen (4.8) ist

$$|Lu|_{H^{-1}} = \sup_{0 \neq v \in U_0} \frac{|(Lu, v)|}{|v|_{H^1}} \geq \frac{(Lu, u)}{|u|_{H^1}} \geq \epsilon \frac{|u|_{H^1}^2}{|u|_{H^1}} \quad \square$$

Der diskrete Helmholtz-Operator L beim Modellproblem ist also nach obigem H^1 -regulär mit $C = 1$. Man beachte, daß es sich dabei um eine stärkere Eigenschaft als H^0 -Stabilität ($\|L^{-1}\|_{H^0+H^0} \leq C$) handelt: Dies ist eine Konsequenz der (allgemein für beschränktes Ω) bestehenden diskreten Poincaré'schen Ungleichung, mit der wir uns in Abschnitt 4.4 kurz befassen werden.

Die Bedeutung der H^1 -Regularität für die Defektkorrektur ergibt sich aus folgender Abschätzung für den Operator ΔL :

Satz 4.1: Sei Ω =Rechteck und $c(x, y) = c = \text{const.}$ Dann gilt

$$|\Delta L|_{H^{-1}+H^1} \leq \frac{1}{3} + O(ch^2) \quad .$$

Beweis: ΔL ist gegeben durch (1.4). Mit Hilfe der 1. Differenzenquotienten schreiben wir (1.4) als

$$\Delta Lu = \frac{h^2}{6} \bar{D}_x \bar{D}_y D_x D_y u - \frac{ch^2}{12} (\bar{D}_x D_x + \bar{D}_y D_y) u \quad .$$

Es ist $\bar{D}_x \bar{D}_y D_x D_y = \bar{D}_y \bar{D}_x D_x D_y$. Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle \Delta Lu, v \rangle$ für beliebige v , zerlegen ΔL und werden partielle Summation (4.6) an:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} | \langle \bar{D}_x \bar{D}_y D_x D_y u - c \bar{D}_x D_x u, v \rangle | &= \\ &= \frac{h^2}{12} | \langle \bar{D}_y D_y D_x u - c D_x u, -D_x v \rangle | \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{h^2}{12} \left(\| \bar{D}_y D_y D_x u \|_{H^0} + c \cdot \| D_x u \|_{H^0} \right) \cdot \| D_x v \|_{H^0} \leq \\ &\leq \frac{h^2}{12} (4h^{-2} + c) \| D_x u \|_{H^0} \| D_x v \|_{H^0} = \left(\frac{1}{3} + \frac{ch^2}{12} \right) \| D_x u \|_{H^0} \| D_x v \|_{H^0} \end{aligned}$$

durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und triviale Abschätzung von $\| \bar{D}_y D_y \|_{H^0+H^0}$.

Ebenso erhält man für den zweiten Anteil von ΔL :

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} | \langle \bar{D}_y \bar{D}_x D_x D_y u - c \bar{D}_y D_y u, v \rangle | &\leq \\ &\left(\frac{1}{3} + \frac{ch^2}{12} \right) \| D_y u \|_{H^0} \| D_y v \|_{H^0} \end{aligned}$$

Nun liefert die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$\begin{aligned} | \langle \Delta Lu, v \rangle | &\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{ch^2}{12} \right) \cdot \left[\| D_x u \|_{H^0}^2 + \| D_y u \|_{H^0}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \left[\| D_x v \|_{H^0}^2 + \| D_y v \|_{H^0}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{ch^2}{12} \right) \cdot |u|_{H^1} \cdot |v|_{H^1} \quad . \end{aligned}$$

Da v beliebig gewählt war, folgt:

$$|\Delta Lu|_{H^{-1}} = \sup_{0 \neq v \in U_0} \frac{| \langle \Delta Lu, v \rangle |}{|v|_{H^1}} \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{ch^2}{12} \right) |u|_{H^1} \quad \square$$

Folgerung. Beim Modellproblem gilt

$$|L^{-1} \Delta L|_{H^1+H^1} \leq |L^{-1}|_{H^1+H^{-1}} \cdot |\Delta L|_{H^{-1}+H^1} \leq \frac{1}{3} + O(ch^2) \quad . \quad (4.10)$$

Für $c = 0$ ist diese Ergebnis identisch mit der Aussage von Satz 2.4, es wurde jedoch auf völlig andere Weise erhalten.

Anmerkung: Der Beweis von Satz 4.1 zeigt klar den Einfluß der Glattheit der Argumentfunktion auf die Kontraktionsrate von $L^{-1} \Delta L$. Die verwendete Abschätzung der 2. Differenzenquotienten ist natürlich im Fall eines glatten Verlaufs von u weitaus zu grob.

Die in diesem Abschnitt verwendeten Argumente lassen sich in vielerlei Hinsicht auf die Situation in allgemeinen Gebieten übertragen. Der folgende Abschnitt befaßt sich zunächst mit der Eigenschaft der H^1 -Regularität bei allgemeiner Geometrie.

4.3 Diskrete Regularität in allgemeinen Gebieten

Ω sei ein "beliebiges" Gebiet im \mathbb{R}^2 . Wir unterwerfen Ω_h denselben Einschränkungen wie zu Beginn des Abschnittes 3.2: Jeder randnahe Gitterpunkt $P \in B_h$ besitze mindestens einen Nachbarn aus Ω_h in jeder der beiden Koordinatenrichtungen. Zusätzlich sei vorausgesetzt, daß die geradlinige Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten $P, Q \in B_h$ ganz innerhalb von Ω verläuft.

Für die weiteren Zwecke denken wir uns jede Gitterfunktion u über Ω_h durch $u(P) := 0$ außerhalb von Ω auf das unendliche Quadratgitter fortgesetzt. Alle Summen bzw. Skalarprodukte verstehen sich damit als über das unendliche Gitter erstreckt. Da nur solche Gitterfunktionen betrachtet werden, die auf $\partial\Omega_h$ verschwinden, ist die unregelmäßige Lage der Punkte aus $\partial\Omega_h$ belanglos, d.h., diese Punkte können ignoriert werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Norm (4.4) sinnvoll erklärt:

$$|u|_{H^1} := \left(\|D_x u\|_{H^0}^2 + \|D_y u\|_{H^0}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Partielle Summation (4.6) ist anwendbar.

Der folgende Satz über die H^1 -Regularität der Shortley-Weller-Diskretisierung stammt im wesentlichen von Hackbusch [12]. Die Abschätzungen der auftretenden Randterme sind in [12] nur angedeutet; wir geben daher einen ausführlichen Beweis an.

Satz 4.2: Unter den oben genannten Voraussetzungen über Ω_h ist der Differenzenoperator L der Basis-Diskretisierung (1.2) H^1 -regulär mit $C < 1.02$:

$$\|L^{-1}\|_{H^1 \rightarrow H^{-1}} < 1.02. \quad (4.11)$$

Beweis: Gemäß Lemma 4.1 zeigen wir H^1 -Koerzivität (4.8) mit $\epsilon > 0.982$.

Zunächst ist $\langle Lu, u \rangle \geq \langle L_0 u, u \rangle$ wegen $c(x, y) \geq 0$ ($L_0 \sim$ diskreter Laplace-Operator- Δ_h). Wir ersetzen vorerst L_0 durch \tilde{L}_0 , wobei \tilde{L}_0 die Anwendung des *symmetrischen* 5-Punkt-Sternes in allen Punkten des (unendlichen) Gitters bedeutet, ungeachtet der unregelmäßigen Randverhältnisse. Für \tilde{L}_0 gilt die Greensche Formel (4.7):

$$\langle \tilde{L}_0 u, u \rangle = |u|_{H^1}^2.$$

Die Differenz $L_0 - \tilde{L}_0$ ist $\neq 0$ nur in den randnahen Punkten $P \in B_h$. Wir spalten $L_0 - \tilde{L}_0$ auf in

$$L_0 - \tilde{L}_0 = (L_0 - \tilde{L}_0)_x + (L_0 - \tilde{L}_0)_y,$$

also in die Differenzenoperatoren in x -bzw. y -Richtung.

- Sei $P \in B_h$ ein Punkt, dessen linker Nachbar im Quadratgitter außerhalb von Ω liegt (wir bezeichnen ihn mit P_L). Laut Voraussetzung über Ω_h zu Beginn dieses Abschnittes liegt dann der rechte Nachbar P_R in Ω . Die Distanz zwischen P und $\partial\Omega$ in x -Richtung sei λh ($0 < \lambda \leq 1$), vgl. Abb. 4.1.

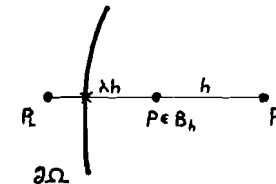


Abb. 4.1

Wegen der Gestalt des Shortley-Weller-Differenzensternes und wegen $u(P_L) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (L_0 - \tilde{L}_0)_x u(P) \cdot u(P) &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{2}{\lambda} - 2 \right) u(P) + \left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) u(P_R) \right] \cdot u(P) = \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\frac{2}{\lambda} - 2 + 1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) (u(P) - u(P_L)) + \left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) (u(P_R) - u(P)) \right] \cdot \frac{1}{h} (u(P) - u(P_L)) \\ &= \left[\left(\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1 \right) \bar{D}_x u(P) + \left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) D_x u(P) \right] \cdot \bar{D}_x u(P) . \quad (4.12) \end{aligned}$$

Es ist $\left(\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1 \right) \geq 0$, $\left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) \leq 0$. Der Ausdruck (4.12) wird nun nach unten abgeschätzt. Wir setzen $a := D_x u(P)$, $b := \bar{D}_x u(P)$:

$$(4.12) = \left(\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1 \right) b^2 + \left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) ab .$$

Für beliebige a, b und für $\delta \neq 0$ besteht die Ungleichung $2ab \geq -\delta^2 a^2 - \frac{b^2}{\delta^2}$ und daher $(-a)b \geq \frac{1}{2} \left(-\delta^2 a^2 - \frac{b^2}{\delta^2} \right)$. Angewendet auf den zweiten Term in (4.12) bedeutet das:

$$\left(1 - \frac{2}{1+\lambda} \right) ab = \left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right) (-a)b \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right) \cdot \left(-\delta^2 a^2 - \frac{b^2}{\delta^2} \right)$$

Daher:

$$(4.12) \geq \left[\left(\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1 \right) - \frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right) \right] b^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right) \delta^2 a^2 .$$

Für $\lambda = 1$ verschwindet (4.12) ohnehin; für $\lambda \in (0,1)$ kann man δ^2 so wählen, daß der Faktor vor b^2 zu 0 wird:

$$\delta^2 := \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{1+\lambda} - 1}{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1} > 0 .$$

Der Faktor vor a^2 wird damit zu

$$k(\lambda) := -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right) \delta^2 = -\frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2}{1+\lambda} - 1 \right)^2}{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)} - 1} \leq 0 .$$

In $(0,1)$ nimmt $|k(\lambda)|$ an der Stelle $\lambda = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)$ seinen Maximalwert an, dieser beträgt

$$\frac{1}{12} (2\sqrt{3} - 3)^2 < 0.018 .$$

So erhalten wir die Abschätzung

$$(4.12) \geq -0.018 a^2 = -0.018 (D_x u(P))^2 .$$

- Ist nun $P \in B_h$ ein Punkt, dessen rechter Nachbar im Quadratgitter außerhalb von Ω liegt, schließen wir ganz analog und erhalten durch Summation aller Ungleichungen:

$$\langle (L_0 - \tilde{L}_0)_x u, u \rangle \geq -0.018 \sum_{P \in B_h} (D_x u(P))^2$$

Für den y -Anteil $(L_0 - \tilde{L}_0)_y$ erhält man eine entsprechende Abschätzung und daher

$$\begin{aligned} \langle (L_0 - \tilde{L}_0) u, u \rangle &\geq -0.018 \sum_{P \in B_h} [(D_x u(P))^2 + (D_y u(P))^2] \\ &\geq -0.018 |u|_{H^1}^2 . \end{aligned}$$

Zusammen mit der Greenschen Formel für \tilde{L}_0 folgt die H^1 -Koerzitivität von L_0 und damit von L :

$$\langle Lu, u \rangle \geq \langle L_0 u, u \rangle \geq |u|_{H^1}^2 - 0.018 |u|_{H^1}^2 = 0.982 |u|_{H^1}^2 ,$$

und damit die H^1 -Regularität (4.11) wegen $\frac{1}{0.982} < 1.02$. \square

Anmerkung: Für Gebiete, bei denen L auch in allen Punkten $P \in B_h$ durch den symmetrischen Differenzenstern gegeben ist, (vgl. Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.2), besteht natürlich H^1 -Regularität mit $C = 1$ wie beim Rechteck. (Es gilt die Greensche Formel (4.7) ohne Randfehler.)

Bei Hackbusch [12] findet sich auch der (ungleich kompliziertere) Beweis für die H^2 -Regularität der Shortley-Weller-Diskretisierung der Poisson-Gleichung in Gebieten mit ausreichend glatter Randkurve:

$$\|L^{-1}\|_{H^2+H^0} \leq C. \quad (4.13)$$

Dabei ist

$$\|u\|_{H^2} := \left(\|u\|_{H^1}^2 + |u|_{H^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $\|u\|_{H^1}$ gemäß (4.5); $|u|_{H^2}$ ist mit Hilfe von Differenzenquotienten 2. Ordnung über $\bar{\Omega}_h$ definiert. (Differenzenquotienten über beliebig nahe aneinanderliegenden Gitterpunkten, wie sie in Randnähe auftreten können, sind dabei ausgeschlossen.) Für die Konstante C in (4.13) ist keine Abschätzung bekannt.

Anmerkung: Die Anwendung der Regularitätsergebnisse auf die Defektkorrektur bei "allgemeiner" Geometrie ist in Kapitel 5 behandelt.

4.4 Diskrete Poincare'sche Ungleichung und Folgerungen aus der H^1 -Koerzivität

Zur Vervollständigung der Betrachtungen in diesem Kapitel sei auf einige Folgerungen aus der diskreten H^1 -Koerzivität (4.8) eines Differenzenoperators L hingewiesen. Zu diesem Zweck benötigen wir folgende in Analogie zum kontinuierlichen Fall für beschränkte Gebiete Ω bestehende Ungleichung.

Diskrete Poincare'sche Ungleichung:

$$\|u\|_{H^0} \leq \sqrt{2} d |u|_{H^1} \quad \text{für alle } u \in U_0. \quad (4.14)$$

Dabei bezeichnet d den Durchmesser von Ω .

Beweis: Elementare Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung auf die Abschätzungen bei Temam [16] (Proposition 3.3):

$$\|u\|_{H^0} \leq 2d \|Du\|_{H^0}, \quad D = D_x, D_y. \quad \square \quad (4.15)$$

Folgerungen aus (4.14):

- $|\cdot|_{H^1}$ und $\|\cdot\|_{H^1}$ sind (gleichmäßig in h) äquivalente Normen.
- Für alle $u \in U_0$ gilt

$$|u|_{H^{-1}} \leq \sqrt{2} d \|u\|_{H^0} \leq 2 d^2 |u|_{H^1}.$$

Die Ungleichung für $|u|_{H^{-1}}$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Dualnorm.

Folgerungen aus (4.8) und (4.14):

Sei L ein Differenzenoperator mit der Eigenschaft der diskreten H^1 -Koerzivität (4.8). Mit ε aus (4.8) gilt:

- L ist H^0 -koerziv (also koerziv im üblichen Sinn):

$$\langle Lu, u \rangle \geq \eta \|u\|_{H^0}^2 = \eta \langle u, u \rangle, \quad \eta > 0, \quad \text{für alle } u \in U_0.$$

Es ist $\eta = \frac{\varepsilon}{2d^2} > 0$.

- L ist H^0 -stabil:

$$\|L^{-1}\|_{H^0+H^0} \leq C, \quad C = \frac{1}{\eta} = \frac{2d^2}{\varepsilon}.$$

- L ist stabil bezüglich $|\cdot|_{H^1}$ (und damit natürlich auch bezüglich $\|\cdot\|_{H^1}$):

$$\|L^{-1}\|_{H^1+H^1} \leq C, \quad C = \frac{1}{\eta} = \frac{2d^2}{\varepsilon}.$$

Alle angeführten Eigenschaften gelten also für die Basis-Diskretisierung (1.2) mit $\varepsilon > 0.982$ laut Abschnitt 4.3.

5. KONTRAKTIONSVERHALTEN DER DEFEKTKORREKTUR

5.1 Der Fall eines variablen Helmholtz-Termes beim Rechteckgebiet

Die Technik der partiellen Summation lässt sich auch auf den Fall nicht konstanter Koeffizienten anwenden. Wir zeigen nun eine Verallgemeinerung von Satz 4.1 für die Helmholtz-Gleichung mit variablem $c(x,y)$. Für den Beweis benötigen wir die im vorhergehenden Abschnitt erwähnte Ungleichung (4.15).

Satz 5.1: Sei $\Omega =$ Rechteck und $c(x,y) \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$|\Delta L|_{H^{-1+H^1}} \leq \frac{1}{3} + Ch^2 .$$

Die Konstante C hängt von der Größenordnung von $c(x,y)$ und von Schranken für die 1. Ableitungen von $c(x,y)$ ab.

Beweis: Im Beweis von Satz 4.1 ist die Abschätzung für den von $c = c(x,y)$ abhängigen Anteil im Skalarprodukt $\langle \Delta L, v \rangle$ zu modifizieren. Es ist

$$\Delta Lu = \frac{h^2}{6} \bar{D}_x \bar{D}_y D_x D_y u - \frac{h^2}{12} (\bar{D}_x D_x + \bar{D}_y D_y) cu .$$

Zusammen mit der Identität

$$D(cu) = c Du + u Dc + h Dc Du , \quad D = D_x, D_y ,$$

liefert partielle Summation:

$$\begin{aligned} |\langle \bar{D}_x D_x (cu), v \rangle| &= |\langle D_x (cu), D_x v \rangle| = \\ &= |\langle c D_x u + u D_x c + h D_x c D_x u, D_x v \rangle| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq [\|c\|_{H^0} \|D_x u\|_{H^0} + \|D_x c\|_{H^0} \|u\|_{H^0} + h \|D_x c\|_{H^0} \|D_x u\|_{H^0}] \cdot \|D_x v\|_{H^0} \leq \\ &\leq [\|c\|_{H^0} + (2d+h) \|D_x c\|_{H^0}] \cdot \|D_x u\|_{H^0} \cdot \|D_x v\|_{H^0} \end{aligned}$$

wegen (4.15).

Es ist $\|D_x c\|_{H^0} \leq M_1 + \epsilon$, $h \leq h_0$, wobei M_1 eine Schranke für die 1. Ableitungen von $c(x,y)$ ist.

Eine analoge Abschätzung gilt in y -Richtung. Alles weitere verläuft wie im Beweis von Satz 4.1. □

Anmerkung: Für beliebiges $c(x,y)$ erhält man eine schwächere Abschätzung durch $\frac{1}{3} + Ch$, wobei C von der Größenordnung von $c(x,y)$ abhängt.

5.2 H¹- und H²-Abschätzungen im allgemeinen Fall

Auf Grund der Konstruktion der Defekt-definierenden Diskretisierung laut (1.4) und (3.4)-(3.8) gelten die folgenden qualitativen Resultate.

Satz 5.2: Unter den am Beginn des Abschnittes 3.2 formulierten Voraussetzungen über Ω gibt es eine (von h unabhängige) Konstante C mit

$$|\Delta L|_{H^{-1+H^1}} \leq C .$$

Beweis: Zu zeigen ist:

$$|\langle \Delta Lu, v \rangle| \leq C \cdot \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \text{ für beliebige } u, v \in U_0 .$$

Wir denken uns wie üblich u, v durch 0 auf das unendliche Gitter

fortgesetzt und in allen Gitterpunkten (1.4) angewendet. Den dadurch definierten Operator bezeichnen wir mit $\bar{\Delta}L$. Nun gilt

$$| \langle \bar{\Delta}Lu, v \rangle | \leq \left(\frac{1}{3} + C'h^2 \right) |u|_{H^1} |v|_{H^1}$$

auf Grund der gleichen Argumente wie im Beweis von Satz 4.1 (bzw. Satz 5.1). Die Differenz

$$\langle (\Delta L - \bar{\Delta}L) u, v \rangle$$

besteht nur mehr aus einer Summe über randnahe Gitterpunkte $P \in B_h' \cup B_h$. In diesen Punkten ist $(\Delta L - \bar{\Delta}L) u(P)$ gegeben durch gewisse Linearkombinationen von regelmäßigen (d.h. über dem regelmäßigen Quadratgitter gebildeten) höheren Differenzen von u . Die Koeffizienten in dieser Linearkombination sind

(höchstens) $\frac{1}{h^2}$ x (gleichmäßig in h) beschränkter Faktor.

(Ein variabler Helmholtz-Term wird wie im Beweis von Satz 5.1 behandelt.) Nun kann man $\frac{1}{h}$ auf die rechte Seite des Skalarproduktes übertragen. Wegen $P \in B_h' \cup B_h'$ gilt die Darstellung (mit jeweils benachbarten Gitterpunkten):

$$\frac{1}{h} v(P) = \frac{1}{h} (v(P) - v(Q)) , \quad P \in B_h ,$$

$$\frac{1}{h} v(P) = \frac{1}{h} (v(P) - v(P_1)) + \frac{1}{h} (v(P_1) - v(Q)) , \quad P \in B_h' ,$$

wobei Q außerhalb von Ω liegt (also $v(Q) = 0$). Die Lage der Punkte P_1, Q hängt von der jeweiligen Situation ab.

Damit ist gezeigt, daß eine Abschätzung der gewünschten Gestalt existiert: Es ist

$$\begin{aligned} | \langle \Delta Lu, v \rangle | &\leq | \langle \bar{\Delta}Lu, v \rangle | + | \langle (\Delta L - \bar{\Delta}L)u, v \rangle | \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{3} + C'h^2 \right) |u|_{H^1} |v|_{H^1} + C'' |u|_{\tilde{H}^1} |v|_{\tilde{H}^1} \leq C |u|_{H^1} |v|_{H^1} . \end{aligned}$$

Mit der Schreibweise $|\cdot|_{\tilde{H}^1}$ wird angedeutet, daß die Differenzenquotienten nur über einen gewissen randnahen Gitterbereich zu summieren sind. \square

Anmerkung: Eine vernünftige Quantifizierung von $|\Delta L|_{H^{-1}+H^1}$ ist mit den hier verwendeten Hilfsmitteln nicht möglich. Für spezielle Gebiete gelingt sie jedoch bis zu einem gewissen Grad; vgl. Abschnitt 5.3.

Zusammen mit der H^1 -Regularität (Satz 4.2) folgt nun:

$$|L^{-1}\Delta L|_{H^1+H^1} \leq C . \quad (5.1)$$

Wir haben also zumindest eine in h gleichmäßige Beschränktheit des Defektkorrektur-Operators bezüglich der Norm $|\cdot|_{H^1}$ gezeigt.

Falls nun L und Ω den bei Hackbusch [12] formulierten Bedingungen ($c(x,y) = 0$; $\partial\Omega$ glatt) genügen, ist $L^{-1}\Delta L$ auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^2}$ (vgl. Abschnitt 4.3) beschränkt:

$$\|L^{-1}\Delta L\|_{H^2+H^2} \leq C . \quad (5.2)$$

Dies folgt aus der H^2 -Regularität (4.13) von L ; die Abschätzung

$$\|\Delta L\|_{H^0+H^2} \leq C$$

ist auf Grund der Gestalt von ΔL und der Definition der H^2 -Norm in [12] leicht ersichtlich.

Anmerkung: Man könnte nun daran denken, mit Hilfe von (5.2) auch die Beschränktheit von $L^{-1}\Delta L$ bezüglich der Spektralnorm $\|\cdot\|_{H^0}$ nachzuweisen. Die Schwierigkeit besteht dabei in der Unsymmetrie von L und ΔL . Es ist nämlich

$$\|L^{-1}\|_{H^0+H^{-2}} = \|(L^{-1})^T\|_{H^2+H^0},$$

$$\|\Delta L\|_{H^{-2}+H^0} = \|\Delta L^T\|_{H^0+H^2}.$$

Das größte Problem bereitet hier die Regularitätsforderung für $(L^{-1})^T$. Entsprechende Aussagen sind nicht bekannt; deshalb existiert derzeit keine Abschätzung von $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^0+H^0}$ für allgemeine Gebiete.

5.3 Nachweis der Kontraktion bei spezieller Geometrie

Wir untersuchen nun den bereits mehrfach angesprochenen Spezialfall eines Gebietes Ω , das eine überall symmetrische Basis-Discretisierung L zuläßt. Solche Gebiete erlauben auch die Anwendung des Mehrstellenoperators in den Punkten $P \in B'_h$ (unter Einbeziehung) von Randpunkten; vgl. Abb. 5.1.

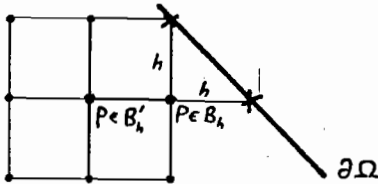


Abb. 5.1

Für den folgenden Satz wollen wir voraussetzen, daß ΔL in diesem Sinn erklärt ist; also ist ΔL gegeben durch (1.4) in allen Punkten $P \in R_h$ und $\Delta L = 0$ in den Punkten $P \in B_h$. Es ist dann eine strenge Kontraktionsaussage möglich:

Satz 5.3: Unter den angeführten Voraussetzungen ist $L^{-1}\Delta L$ für hinreichend kleine h ein kontrahierender Operator:

$$\|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1} < 0.95 + Ch^2. \quad (5.3)$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5.2 bedeute $\bar{\Delta}L$ Anwendung von

(1.4) in allen Punkten des unendlichen Gitters. Es ist dann

$$L^{-1}\Delta L = L^{-1}R\bar{\Delta}L$$

mit

$$Ru(P) := \begin{cases} u(P), & P \in R_h \\ 0, & P \notin R_h. \end{cases}$$

Nun ist

$$\|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1} \leq \|L^{-1}\|_{H^1+H^{-1}} \cdot \|R\|_{H^{-1}+H^{-1}} \cdot \|\bar{\Delta}L\|_{H^{-1}+H^1}.$$

Wegen $\|L^{-1}\|_{H^1+H^{-1}} = 1$ (vgl. Abschnitt 4.3) und $\|\bar{\Delta}L\|_{H^{-1}+H^1} \leq \frac{1}{3} + Ch^2$ (wie in Satz 5.2) reduziert sich das Ganze auf die Abschätzung von $\|R\|_{H^{-1}+H^{-1}}$.

Dazu beachten wir folgendes:

L ist symmetrisch und positiv definit; es ist

$$|u|_{H^1} = \langle Lu, u \rangle^{\frac{1}{2}} = \|L^{\frac{1}{2}}u\|_{H^0}$$

und daher

$$|u|_{H^{-1}} = \|L^{-\frac{1}{2}}u\|_{H^0}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|R\|_{H^{-1}+H^{-1}} &= \sup_{0 \neq u \in U_0} \frac{\|L^{-\frac{1}{2}}Ru\|_{H^0}}{\|L^{-\frac{1}{2}}u\|_{H^0}} = \sup_{0 \neq v \in U_0} \frac{\|L^{-\frac{1}{2}}RL^{\frac{1}{2}}v\|_{H^0}}{\|v\|_{H^0}} \\ &= \|L^{-\frac{1}{2}}RL^{\frac{1}{2}}\|_{H^0+H^0} = \rho\left(L^{-\frac{1}{2}}RLRL^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(L^{-1}RLR)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\rho(L^{-1}RLR)$ wird nun mit Hilfe der Maximumnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ abgeschätzt:

$$\rho(L^{-1}RLR) \leq \|L^{-1}RLR\|_{\infty} \leq \|L^{-1}RL\|_{\infty} \cdot \|R\|_{\infty}.$$

Es ist $\|R\|_\infty = 1$ und $\|L^{-1}RL\|_\infty \leq 1 + \|L^{-1}BL\|_\infty$ mit $B := I - R$. $\|L^{-1}BL\|_\infty$ läßt sich mit der in Kapitel 3 verwendeten Technik abschätzen: In der Schreibweise der diskreten Greenschen Funktion ist für alle $P \in \Omega_h$:

$$\begin{aligned} |L^{-1}BLu(P)| &= h^2 \left| \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \cdot Lu(Q) \right| \leq \\ &\leq h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \cdot \sup_{Q \in B_h} |Lu(Q)|, \end{aligned}$$

wobei

$$h^2 \sum_{Q \in B_h} G(P,Q) \leq h^2 \quad \text{wegen (3.2), und}$$

$$\sup_{Q \in B_h} |Lu(Q)| \leq \frac{1}{h^2} (4 + 1 + 1 + 1 + h^2 \|c\|_\infty) \cdot \|u\|_\infty$$

(im ungünstigsten Fall).

Daher ist $\|L^{-1}BL\|_\infty \leq 7 + Ch^2$.

Insgesamt ergibt sich aus allen Überlegungen:

$$\begin{aligned} \|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1} &\leq \left(\frac{1}{3} + Ch^2\right) \cdot \left(1 + 7 + Ch^2\right)^{\frac{1}{3}} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{3} + Ch^2\right) 2\sqrt{2} \left(1 + Ch^2\right) < 0.95 + Ch^2 \end{aligned}$$

mit einer gewissen von $c(x,y)$ abhängigen Konstanten C . \square

Die im Beweis verwendete Abschätzung $\|L^{-1}BL\|_\infty \leq 7 + Ch^2$ ist sicher nicht optimal, was die Verschlechterung der vom Modellproblem her bekannten Schranke $\frac{1}{3}$ auf 0.95 bewirkt. Bezüglich numerischer Erfahrungen zu diesem Thema siehe Kapitel 6.

Wegen der H^1 -Stabilität von L und der Kontraktionseigenschaft

(5.3) ist hier Satz 2.1 mit $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{H^1+H^1}$ anwendbar: L' ist invertierbar und H^1 -stabil mit

$$\|L'^{-1}\|_{H^1+H^1} \leq \frac{\|L^{-1}\|_{H^1+H^1}}{1 - \|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1}}.$$

Das einfachste Modell für die in diesem Abschnitt betrachtete spezielle Situation stellt natürlich wieder der Rechtecksfall mit $\Delta L = 0$ für $P \in B_h$ dar. Für $c(x,y) = c = \text{const.}$ läßt sich hier eine optimale Abschätzung für den Spektralradius von $L^{-1}\Delta L$ angeben: Mit den im Beweis von Satz 5.3 verwendeten Bezeichnungen gilt nämlich

$$\rho(L^{-1}\Delta L) \leq \|L^{-1}\bar{\Delta}L\|_{H^0+H^0} = \frac{1}{3} + O(ch^2). \quad (5.4)$$

(5.4) ist unmittelbar klar wegen der Vertauschbarkeit von L und $\bar{\Delta}L$:

$$\begin{aligned} \rho(L^{-1}\Delta L) &= \rho(L^{-1}R\bar{\Delta}L) = \rho(R\bar{\Delta}LL^{-1}) \leq \|R\bar{\Delta}LL^{-1}\|_{H^0+H^0} \leq \\ &\leq \|R\|_{H^0+H^0} \cdot \|\bar{\Delta}LL^{-1}\|_{H^0+H^0} = 1 \cdot \|L^{-1}\bar{\Delta}L\|_{H^0+H^0}. \end{aligned}$$

Soweit zu den Kontraktionsresultaten in speziellen Fällen.

Ein strenger Nachweis der Konvergenzbeschleunigung der Defektkorrektur-Iteration durch Glättung mit Hilfe der "smoothing property" stößt bei allgemeiner Geometrie auf gewisse Probleme, die zur Zeit noch nicht gelöst sind. Die zentrale Schwierigkeit besteht dabei im Nachweis einer Vertauschbarkeitsrelation zwischen dem Glättungsoperator einerseits und der Bildung gewisser Differenzenquotienten andererseits.

Bezüglich numerischer Erfahrungen zu diesem Thema sei auf Kapitel 6 verwiesen. Dort finden sich auch Ergebnisse, die den signifikanten Unterschied zwischen $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^0+H^0}$ und $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1}$ im Nichtrechtecksfall dokumentieren. Insbesondere

lassen sich Beispiele angeben, bei denen $\|L^{-1}\Delta L\|_{H_0+H_0} > 1$ ist; andererseits sei betont, daß im Zuge umfangreicher numerischer Experimente immer Konvergenz der Defektkorrektur-Iteration festgestellt wurde.

6. IMPLEMENTIERUNG; NUMERISCHE ERGEBNISSE

6.1 Einbau der Defektkorrektur in bestehende Multigrid-Software

Die Kombination der Defektkorrekturmethode mit einem fertig vorliegenden Iterationsverfahren zur Lösung der Basis-Diskretisierung ist in der Praxis leicht realisierbar. Wir nehmen konkret an, daß ein Code zur Verfügung steht, der einen *Multigrid-Zyklus*

$$u^{(i+1)} := (I - KL) u^{(i)} + Kf, \quad K \approx L^{-1} \quad (6.1)$$

ausführt. Dieser Code kann im wesentlichen als black box betrachtet werden; neu zu programmieren ist nur der Vorgang der Defektbildung. Die kombinierte Iteration (vgl. Kapitel 2) wird in folgender Form durchgeführt:

$$\begin{aligned} d^{(i)} &:= Lu^{(i)} - (L'u^{(i)} - f') = \Delta Lu^{(i)} + f', \\ u^{(i+1)} &:= (I - KL)u^{(i)} + Kd^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

(6.1) wird also einfach mit $d^{(i)}$ an Stelle von f angewendet. Man beachte, daß die ursprünglich rechte Seite f in (6.2) nicht mehr auftritt. Man benützt daher den für f vorgesehenen Speicherplatz für die $d^{(i)}$. Für die im Zuge der Defektbildung immer wieder benötigte gewichtete rechte Seite f' ist im allgemeinen zusätzlicher Speicherplatz erforderlich. Eine Ausnahme bildet hier die sparsamste Variante des sogenannten "Full Multigrid" (siehe Abschnitt 6.2).

Zusätzliche Anwendung eines Glättungsschrittes vor der Defektbildung (vgl. (2.2)) führt auf die Iteration

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(i)} &:= (I - SL)u^{(i)} + Sf \quad (\text{bzw. } Sf' - \text{siehe unten}) \\ \bar{d}^{(i)} &:= \Delta L\bar{u}^{(i)} + f', \\ u^{(i+1)} &:= (I - KL)\bar{u}^{(i)} + K\bar{d}^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Glättung verursacht keinen zusätzlichen Programmieraufwand, weil sie ja mit Hilfe der Relaxationsprozedur durchgeführt werden kann, die als Komponente der Multigrid-Solvers verfügbar ist. Auf Grund der in Kapitel 2 angestellten Überlegungen ist (6.3) robuster und schneller als (6.2).

In (6.3) taucht f innerhalb des Glättungsschrittes wieder auf. Nun stellt aber normalerweise auch

$$Lu = f' \tag{6.4}$$

eine vernünftige Basis-Diskretisierung dar. Daher können wir in (6.3) einfach f durch f' ersetzen, und f wird wie in (6.2) nicht mehr benötigt.

Vorsicht ist allerdings dann geboten, wenn der Helmholtz-Term (gemessen an der Feinheit des Gitters) in L stark überwiegt, also etwa $ch^2 \gg 1$ ist. Während nämlich die Konsistenzqualität von $Lu = f$ in der Gestalt (1.2) wegen des Bestehens der Differentialgleichung von $c(x,y)$ unabhängig ist, gilt das nicht mehr für (6.4): Mit $f' = Wf$ (W lokaler Mittelungsoperator) ist ja:

$$\begin{aligned} Lu^* - f' &= -\Delta_h u^* + cu^* - W(-\Delta u^* + cu^*) \\ &= -\Delta_h u^* + W\Delta u^* + \underline{(I - W)cu^*}, \end{aligned}$$

der letzte Anteil ist von c abhängig und zerstört für große ch^2 das Genauigkeitsniveau. Deshalb muß in diesem Fall die Glättung doch mit f als rechter Seite durchgeführt werden, was natürlich einen höheren Speicher- bzw. Rechenaufwand nach sich zieht.

Für die Defektbildung ist mehr "geometrische Information" erforderlich als für die Basis-Diskretisierung, da kompliziertere Differenzensterne Verwendung finden. Insbesondere sind

die Punkte $P \in B'_h$ zu identifizieren; die Punkte $P \in B_h$ sind daraufhin zu untersuchen, ob die in Kapitel 3 gemachten Voraussetzungen gelten. Die entsprechenden Steuerdaten für die Defektberechnung generiert man am besten vor Durchführung der Iteration und speichert sie in einer geeigneten Codierung ab.

Weitere Details hängen von der Organisation der verwendeten Multigrid-Software ab. Ergebnisse einer konkreten Implementierung finden sich in Abschnitt 6.3.

6.2 Full Multigrid

Abgesehen von den noch bestehenden Lücken in der Konvergenztheorie sowohl der Defektkorrektur als auch der Multigrid-Methoden, liegt in (6.2) bzw. (6.3) ein Iterationsverfahren vor, das unter geeigneten Voraussetzungen gegen eine $O(h^4)$ -Approximation des Randwertproblems (1.1) konvergiert.

Es ist klar, daß eine gegenüber dem Basisverfahren *erhöhte Anzahl von Iterationsschritten* erforderlich sein wird, um tatsächlich das $O(h^4)$ -Genauigkeitsniveau zu erreichen. Aus dieser Sicht ist es auch empfehlenswert, die Multigrid-Iteration in Form des sogenannten *W-Zyklus* durchzuführen (vgl. Stüben-Trottenberg [15]), um eine gute kombinierte Kontraktionsrate zu sichern (vgl. Abschnitt 2.1). Andererseits ist es auch möglich, daß der sparsame *V-Zyklus* vom Standpunkt der Effizienz her günstiger ist; allerdings ist diese Variante als weniger robust zu betrachten.

Der tatsächliche praktische Einsatz erfolgt nun natürlich in Form des sogenannten "Full Multigrid" (FMG), bei dem schrittweise zu immer feineren Gittern aufgestiegen wird. Interpolation der Näherungslösungen auf den gröberen Gittern liefert gute Anfangsapproximationen für die nächstfeineren Gitter;

auf jeder Ebene wird eine fixe Anzahl von Multigrid-Zyklen durchlaufen. Normalerweise verwendet man sukzessive Halbierung der Gitterweite h .

Lemma 6.1 bei Stüben/Trottenberg [15] liefert eine theoretische Aussage über Full Multigrid. Das Resultat läßt sich auf Multigrid mit oder ohne Defektkorrektur anwenden und besagt folgendes:

- Die Multigrid-Iteration ((6.1), (6.2) oder (6.3)) sei gegeben durch

$$(u^{(i+1)} - \hat{u}) = M (u^{(i)} - \hat{u}) ,$$

wobei \hat{u} den Fixpunkt bezeichne. Es sei $\|M\| \leq m < 1$. Der FMG-Interpolationsoperator P sei beschränkt: $\|P\| \leq p$. Es gelte

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - u^*\| &\leq K_1 h^{\kappa_1} \\ \|Pu^* - u^*\| &\leq K_2 h^{\kappa_2} , \quad \kappa_2 \geq \kappa_1 . \end{aligned}$$

Sei $a := p \cdot 2^{\kappa_1}$ und r so gewählt, daß $m^r < \frac{1}{a}$. Dann gilt für das Resultat \tilde{u} der FMG-Prozedur (mit r Zyklen pro Gitterebene):

$$\|\tilde{u} - u^*\| \leq \delta h^{\kappa_1} , \quad \delta := \frac{K_2 m^r}{1 - a m^r} + o(1) ,$$

mit

$$K := \begin{cases} K_1(1+a) + K_2 , & \text{falls } \kappa_2 = \kappa_1 \\ K_1(1+a) , & \text{falls } \kappa_2 > \kappa_1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Genauere Betrachtung (siehe [15] und Hackbusch [9]) lehrt, daß in (6.5) der von K_2 herrührende Anteil empfindlich auf Unglattheiten von u^* reagiert, während sich der von K_1 stammende Beitrag unter etwas strengeren Voraussetzungen unabhängig von u^* beschränken läßt.

Daher wählt man (in der hier betrachteten Situation) für die Lösung der Basis-Diskretisierung ($\kappa_1 = 2$) einen FMG-Interpolationsoperator der Ordnung $\kappa_2 > 2$, etwa $\kappa_2 = 4$. Bei der Implementierung der Defektkorrektur-Variante ($\kappa_1 = 4$) wird man sich ebenfalls mit $\kappa_2 = 4$ zufriedengeben, da diese ja ohnedies nur für glatte Lösungen u^* (also nicht zu großes K_2) wirklich die volle Konsistenzordnung erreicht.

Anmerkung: In der Forderung

$$m^r < \frac{1}{a} = \frac{1}{p \cdot 2^{\kappa_1}}$$

drückt sich wiederum die Tatsache aus, daß das Erreichen des asymptotisch besseren Genauigkeitsniveaus einen höheren Aufwand erfordert.

Im Fall $r = 1$ sieht man, daß in (6.2) bzw. (6.3) f' pro Gitter nur einmal benötigt wird. Deshalb kann man auf den zusätzlichen Speicher für f' verzichten und bei der Defektberechnung jeweils f' durch $d^{(i)}$ überschreiben. Damit benötigt man nicht mehr Speicherplatz als für die Lösung der Basis-Diskretisierung. Allerdings wird $r = 1$ nicht immer genügen, um optimale Genauigkeit zu erreichen.

Zusammenfassung:

Die Kombination der Defektkorrektur mit Full Multigrid liefert ein "quasi direktes" Verfahren zur Bestimmung einer $O(h^4)$ -Approximation der Randwertaufgabe (1.1).

6.3 Numerische Ergebnisse: Full Multigrid, Kontraktionsverhalten, Fixpunkt

Die folgenden Resultate entstammen einer Implementierung der Defektkorrekturmethode unter Verwendung des Multigrid-Solvers MGO1 für die Lösung der Basis-Diskretisierung von (1.1). Bezüglich MGO1 siehe z.B. Stüben/Trottenberg [15], Kapitel 10. Die vom Standard-Solver MGO1 (ohne Defektkorrektur) gelieferten Resultate sind zum Vergleich mit angegeben.

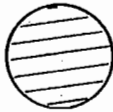



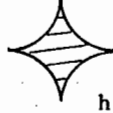
Als Beispiel wurden die Ergebnisse für $u^*(x,y) = \sin(\pi(x+2y))$, $c = 0$ (Poisson-Gleichung) herausgegriffen. Verwendet wurde der W-Zyklus mit 2 Glättungsschritten vor bzw. 1 Glättungsschritt nach der Korrektur auf dem gröberen Gitter. MGO1 verwendet als Glättungsprozedur Gauß/Seidel-Relaxation mit schachbrettartigem Durchlauf ("red/black"-relaxation).

Alle Zahlen beziehen sich auf Gebiete mit Durchmesser $d = 1$. In Tabelle 1 bedeuten:

- h ... (feinste) Gitterweite
- $\|ERR\|^{FMG}$... Euklidische Norm des Fehlers nach FMG (mit 1 Zyklus pro Ebene)
- $\|ERR\|^{FM+1}$... Euklidische Norm des Fehlers nach FMG (wie zuvor) und einem zusätzlichen Multigrid-Zyklus auf dem feinsten Gitter
- $\|ERR\|^{FIX}$... Euklidische Norm des Fehlers des Fixpunktes der Iteration auf der feinsten Ebene
- p^{FIX} ... beobachtete Ordnung von $\|ERR\|^{FIX}$ beim Übergang von $2h$ auf h
- IDC ... 0 = Basisverfahren
1 = Defektkorrektur ohne Glättung
2 = Defektkorrektur mit Glättung (1 Schritt der "red/black"-Relaxation vor der Defektberechnung)

Mit "Fehler" ist natürlich jeweils der Fehler bezüglich der exakten Lösung $u^*(x,y)$ gemeint.

TABELLE 1:

| $\Omega;h$ | $\ ERR\ ^{FMG}$ | $\ ERR\ ^{FM+1}$ | $\ ERR\ ^{FIX}$ | p^{FIX} | IDC |
|--|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------|----------------------|-------------|
| 1  $h = 1/64$ | .304E-3 .139E-5 .143E-5 | - .110E-5 .115E-5 | .307E-3 .110E-5 .115E-5 | 1.95 4.20 4.15 | 0 1 2 |
| 2  $h = 0.6/64$ | .934E-2 .327E-3 .148E-3 | - .108E-3 .109E-3 | .954E-2 .104E-3 .109E-3 | 1.98 4.04 4.00 | 0 1 2 |
| 3  $h = 1/64$ | .248E-2 .933E-4 .682E-4 | - .967E-5 .100E-4 | .250E-2 .113E-4 .921E-5 | 2.01 4.41 4.56 | 0 1 2 |
| 4  $h = 1/64$ | .272E-2 .401E-4 .484E-4 | - .435E-4 .446E-4 | .270E-2 .449E-4 .448E-4 | 1.99 3.89 3.89 | 0 1 2 |
| 5  $h = 1/64$ | .103E-2 .343E-4 .163E-4 | - .115E-4 .108E-4 | .105E-2 .105E-4 .108E-4 | 1.92 4.23 4.24 | 0 1 2 |

Der Mehraufwand für FMG (gemessen in Rechenzeit für Generierungsphase + Lösungsphase) gegenüber IDC = 0 beträgt etwa

- 15 - 20% bei IDC = 1 ,
- 20 - 25% bei IDC = 2 ,

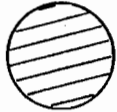




und noch einmal etwa gleich viel bei Durchführung eines zusätzlichen Iterationsschrittes auf dem feinsten Gitter.



Die Ergebnisse zeigen:

- Bei glatten Problemen liefert die Defektkorrektur eine erhebliche Genauigkeitssteigerung bei relativ geringem Mehraufwand.
- Die Fixpunkte für IDC = 1 und IDC = 2 unterscheiden sich minimal. (Beachte: IDC = 2 verwendet einen einzigen Glättungsschritt.)
- In manchen Fällen liefert FMG mit Defektkorrektur mit 1 W-Zyklus pro Ebene einen Fehler auf dem Niveau des Diskretisierungsfehlers $\|ERR\|^{FIX}$. Es treten jedoch auch Situationen auf, wo das nicht der Fall ist (etwa in Beispiel 3). Die Diskrepanz ist dabei für IDC = 2 jeweils geringer. Der zusätzliche Iterationsschritt liefert durchwegs eine vollauf zufriedenstellende Lösung, d.h. die Abweichung beträgt nur mehr einige % des Diskretisierungsfehlers. (Beim Basisverfahren ist der zusätzliche Iterationsschritt überflüssig.)

Tabelle 2 zeigt die beobachteten Kontraktionsraten für den W-Zyklus (bezüglich der Euklidischen Norm) bei 5 Iterationsschritten im Anschluß an die FMG-Interpolation. Die Tabelle enthält auch 2 Beispiele für Gebiete mit einspringenden Ecken.

TABELLE 2:

| $\Omega; h$ | 1. SCHRITT | 2. SCHRITT | 3. SCHRITT | 4. SCHRITT | 5. SCHRITT | IDC |
|--|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------|
| 1  $h = 1/64$ | .005 .027 .017 | .013 .093 .018 | .026 .147 .032 | .016 .210 .036 | .031 .237 .038 | 0 1 2 |
| 2  $h = .6 \times 1/64$ | .011 .060 .020 | .012 .093 .020 | .032 .168 .033 | .020 .221 .038 | .031 .246 .041 | 0 1 1 |
| 3  $h = 1/64$ | .003 .075 .070 | .006 .087 .045 | .012 .188 .046 | .023 .217 .047 | .030 .236 .048 | 0 1 2 |
| 4  $h = 1/64$ | .019 .051 .035 | .088 .084 .063 | .090 .151 .067 | .091 .231 .067 | .091 .245 .067 | 0 1 2 |
| 5  $h = 1/64$ | .008 .041 .017 | .007 .076 .023 | .019 .156 .026 | .016 .209 .031 | .020 .239 .030 | 0 1 2 |

| $\Omega; h$ | 1. SCHRITT | 2. SCHRITT | 3. SCHRITT | 4. SCHRITT | 5. SCHRITT | IDC |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|-----|
| 6  $h = 1/64$ | .062 | .048 | .049 | .048 | .048 | 0 |
| | .046 | .060 | .301 | .248 | .257 | 1 |
| | .039 | .030 | .031 | .030 | .031 | 2 |
| | | | | | | |
| 7  $h = 1/64$ | .105 | .093 | .094 | .094 | .094 | 0 |
| | .089 | .052 | .153 | .388 | .290 | 1 |
| | .076 | .069 | .070 | .069 | .070 | 2 |
| | | | | | | |

Es ist deutlich zu sehen, daß bei IDC = 1 im Verlauf der Iteration die hochfrequenten Fehlerkomponenten (die den größten Eigenwerten des Defektkorrektur-Operators entsprechen) immer stärker hervortreten und das anfangs recht gute Kontraktionsverhalten zunichte machen. Man beachte insbesondere den Wert $.388 > \frac{1}{3}$ in Beispiel 7.

Bei IDC = 2 ist die Kontraktion fast durchwegs besser als bei IDC = 1 und bleibt gleichmäßig gut. Der Unterschied zwischen IDC = 1 und IDC = 2 ist beim 1. Schritt meist nicht allzu groß, beim 2. Schritt jedoch bereits signifikant.

Die Kontraktionsraten für IDC = 2 sind denen für IDC = 0 einerseits und den für den Rechtecksfall hergeleiteten theoretischen Schranken (siehe Abschnitt 2.3) durchaus vergleichbar.

Als wichtige Ergänzung zu Tabelle 2 sei noch folgende Beobachtung angegeben. Wendet man in Beispiel 3 (Ω = auf die Spitze gestelltes Quadrat) die Defektkorrektur auf einen (künstlich vorgegebenen) in beiden Koordinatenrichtungen maximal stark

oszillierenden Fehler an, so ergibt sich als "Kontraktionsrate":

- 0,34 bezüglich der Norm $|\cdot|_{H^1}$, jedoch
- 2,02 bezüglich der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_{H^0}$!

Damit haben wir ein Beispiel für $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^0+H^0} > 1$ in einer eher harmlos aussehenden Situation. Hingegen scheint sich $\|L^{-1}\Delta L\|_{H^1+H^1}$ auch hier in der Nähe des bekannten Wertes $\frac{1}{3}$ zu bewegen. Diese letzte Beobachtung ist ein weiteres Argument für die Verwendung von IDC = 2, bei der ein solcher Effekt natürlich nicht auftritt.

Anmerkung: Wie bereits mehrmals angedeutet, verlieren die Ordnungsaussagen ihren Sinn, wenn die Größenordnung des Helmholtz-Faktors $c(x,y)$ (deutlich) größer ist als h^{-2} . Genauere Betrachtung und auch die numerische Erfahrung lehren, daß die Defektkorrektur in diesem Fall ineffizient wird: Die bereits von der Basis-Diskretisierung gelieferte hohe Approximationsqualität läßt sich nur mehr geringfügig verbessern.

Was das Kontraktionsverhalten (für IDC = 1) in einer solchen Extremsituation betrifft, so zeigt sich in der Praxis durchwegs die Verschlechterung gegen den von der Modellproblemanalyse bekannten Wert $\frac{2}{3}$ hin.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Auzinger, W., Stetter, H.J.: Defect corrections and multigrid iterations. Lecture Notes in Mathematics 960, 327-351 (1982)
- [2] Böhmer, K.: Asymptotic expansions for the discretization error in linear elliptic boundary value problems on general regions. Mathematische Zeitschrift 177, 235-255 (1981)
- [3] Bramble, J.H., Hubbard, B.E.: On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation. Numerische Mathematik 4, 313-327 (1962)
- [4] Brandt, A.: Guide to multigrid development. Lecture Notes in Mathematics 960, 220-312 (1982)
- [5] Christiansen, J., Russel, R.D.: Deferred corrections using uncentered end formulas. Numerische Mathematik 35, 21-33 (1980)
- [6] Frank, R.: The method of iterated defect-correction and its application to two-point boundary value problems. Part I: Numerische Mathematik 25, 409-419 (1976); Part II: Numerische Mathematik 27, 407-420 (1977)
- [7] Frank, R., Hertling, J.: Die Anwendung der Iterierten Defektkorrektur auf das Dirichletproblem. Beiträge zur Numerischen Mathematik 7, 19-31 (1979)
- [8] Frank, R., Hertling, J., Monnet, J.P.: The application of iterated defect correction to variational methods for elliptic boundary value problems. Computing 30, 121-135 (1983)
- [9] Hackbusch, W.: Multigrid convergence theory. Lecture Notes in Mathematics 960, 177-219 (1982)
- [10] Hackbusch, W.: On multigrid iterations with defect corrections. Lecture Notes in Mathematics 960, 461-473 (1982)
- [11] Hackbusch, W.: Analysis of discretizations by the concept of discrete regularity. The Mathematics of Finite Elements and Applications IV, 369-376 (1982)
- [12] Hackbusch, W.: On the regularity of difference schemes. Part II: Regularity estimates for linear and nonlinear problems. Arkiv för matematik 21, 1-28 (1983)
- [13] Pereyra, V., Proskurowski, W., Widlund, O.: High Order fast Laplace solvers for the Dirichlet problem on general regions. Mathematics of Computation 31, 1-16 (1977)
- [14] Stetter, H.J.: The defect correction principle and discretization methods. Numerische Mathematik 29, 425-443 (1978)
- [15] Stüben, K., Trottenberg, U.: Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. Lecture Notes in Mathematics 960, 1-176 (1982)
- [16] Temam, R.: Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North-Holland: Studies in Mathematics and its applications 2 (1979)
- [17] Van Linde, H.J.: High order finite difference methods for Poisson's equation. Mathematics of Computation 28, 369-391 (1974)