

VARIATIONEN DER DEFEEKTKORREKTUR ZUR
EFFIZIENTEN NUMERISCHEN LÖSUNG
GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

WINFRIED AUZINGER
OTHMAR KOCH
STEFAN LAMMER
EWA B. WEINMÜLLER

TECHNICAL REPORT

ANUM PREPRINT No. 08/02



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
AND NUMERICAL ANALYSIS

Inhaltsverzeichnis

Teil 1. Theoretischer Teil	5
1. Grundlagen	6
2. Die Defektkorrektur und ihre Varianten	11
3. Konvergenzbeweis für die Integralvariante der Defektkorrektur	15
4. Eine weitere, asymptotisch genauere Variante	20
Teil 2. Praktischer Teil	23
5. Notation, Details der Umsetzung	24
6. Betrachtete Anfangs- und Randwertprobleme	27
7. Die Differentialvariante auf Euler-Basis	28
8. Die Integralvariante auf Euler-Basis ohne linken Punkt	47
9. Die Integralvariante auf Euler-Basis mit linkem Punkt	78
10. Die Defektkorrektur auf Basis der impliziten Mittelpunktsregel (IMR)	104
11. Ein Versuch: Die Defektkorrektur auf Basis des Raudau-IIa-Verfahrens	135
Literaturverzeichnis	143
Tabellenverzeichnis	145

Teil 1

Theoretischer Teil

1. Grundlagen

1.1. Einleitung, Überblick.

Defektkorrektur ist eine Methodik zur effizienten, iterativen Berechnung numerischer Lösungen hoher Ordnung für gewöhnliche (oder auch partielle) Differentialgleichungen. Die heuristische Begründung der Methode ist leicht zu verstehen (siehe Abschnitt 2.1); doch ist die Konvergenzanalyse nichttrivial, und das Verhalten der Iteration hängt entscheidend von der konkreten Wahl der beteiligten algorithmischen Komponenten ab.

In der ‘klassischen’ Variante der Defektkorrektur wird eine Art Residuum, der sogenannte *Defekt* einer gegebenen numerischen Näherungslösung bezüglich der gegebenen Differentialgleichung gebildet, was die Grundlage für eine iterative Verbesserung liefert. Zweck dieser Arbeit ist es, durch theoretische Überlegungen und gezielte numerische Experimente nachzuweisen, dass diese klassische Variante (‘Differentialvariante’), bei der mit einem ‘punktweise’ definierten Defekt gearbeitet wird, entscheidend verbessert werden kann. Diese Verbesserung beruht auf einer modifizierten Definition des Defektes, die durch lokale Aufintegration der punktweise Defekte entsteht (‘Integralvariante’).

Die Integralvariante ist heuristisch genauso begründbar wie die klassische Differentialvariante, und sie ist auch verwandt zu anderen bekannten Defektkorrekturalgorithmen, vgl. z.B. [9]. Der neue Aspekt in der vorliegenden Arbeit besteht jedoch darin, dass nachgewiesen wird, dass die Integralvariante auf ‘beliebigen’ (d.h. auf vernünftig verteilten *nichtäquidistanten*) Gittern optimal konvergiert, was für die Differentialvariante nur auf äquidistanten (bzw. asymptotisch ‘fast äquidistanten’) Gittern der Fall ist. Außerdem lässt sich das Verfahren leicht so modifizieren, dass eine um 1 höhere Ordnung erzielbar ist (im Vergleich zur bei der entsprechenden Differentialvariante günstigstenfalls erzielbaren Ordnung).

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im diesem grundlegenden Abschnitt wird die betrachtete Problemklasse spezifiziert und unsere Notation festgelegt, und es werden einige beweistechnische Werkzeuge betreffend Interpolation mit Polynomen zusammengestellt. In Abschnitt 2 wird die Idee der Defektkorrektur vorgestellt und ihr Zusammenhang mit Kollokationsverfahren diskutiert. Hier wird auch die oben bereits erwähnte Integralvariante der Defektkorrektur eingeführt. In Abschnitt 3 präsentieren wir unser zentrales theoretisches Resultat, nämlich betreffend die Konvergenz der Integralvariante basierend auf dem impliziten Euler-Verfahren, auf beliebigen nichtäquidistanten Gittern. Der vorliegende Beweis ist auf den linearen Fall beschränkt, lässt sich jedoch relativ leicht für nichtlineare Probleme verallgemeinern, siehe dazu [4]. Eine weitere, asymptotisch genauere Variante wird in Abschnitt 4 vorgestellt.

Unsere umfangreichen numerischen Experimente für verschiedene Testbeispiele, auf der Basis eines eigens für diesen Zweck entwickelten MATLAB-Codes, sind in Kapitel 2 dokumentiert. Teilweise dienten diese Experimente der Verifikation unserer theoretischen Überlegungen, aber es wurden auch weitere Varianten (etwa mit der impliziten Mittelpunktsregel als Basisverfahren) experimentell untersucht.

Weitere theoretische Überlegungen und Resultate für singuläre Randwertprobleme finden sich in [4]. Eine Anwendung der Integralvariante zur a-posteriori Fehlerschätzung bei Kollokationsverfahren ist in [3] beschrieben und analysiert.

1.2. Problemstellung, Notation.

Wir betrachten ein Randwertproblem für ein System von d gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit linearen Randbedingungen,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} z'(t) &= F(t, z(t)), & z &\in C[a, b] \cap C^1(a, b), & \text{mit} \\ & & B_a z(a) + B_b z(b) &= \beta, \end{aligned}$$

wobei wir uns (nicht aus prinzipiellen Gründen sondern aus Gründen der beweistechnischen Vereinfachung) hier auf lineare Differentialgleichungen beschränken, d.h.

$$(1.2) \quad F(t, z) = C(t)z + g(t).$$

Wir bezeichnen mit $|\cdot|$ die Maximum-Norm im \mathbb{R}^d , und L_C sei eine Lipschitzkonstante für F , d.h.

$$(1.3) \quad |F(t, z_1) - F(t, z_2)| = |C(t)(z_1 - z_2)| \leq L_C |z_1 - z_2|.$$

Für die numerische Behandlung wählen wir im Intervall $[a, b]$ ein Gitter

$$(1.4) \quad \Delta := (\tau_0, \tau_1 \dots \tau_N)$$

mit $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = b$ und verwenden die Notation

$$(1.5) \quad J_i := [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad h_i := \tau_i - \tau_{i-1}, \quad i = 1 \dots N.$$

Weiters sei

$$(1.6) \quad \mathbf{h} := \max_{1 \leq i \leq N} h_i,$$

und die zugehörigen Gittervektoren (Funktionen über dem Gitter) bezeichnen wir mit

$$(1.7) \quad u_\Delta := (u_0, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^{(N+1)d}.$$

Mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnen wir die Maximum-Norm von Funktionen über endlichen Intervallen, und die Norm im Raum der Gittervektoren sei definiert als

$$(1.8) \quad \|u_\Delta\|_\Delta := \max_{0 \leq i \leq N} |u_i|.$$

Für eine stetige Funktion $x(t) \in C[a, b]$ bezeichnen wir mit R_Δ die punktweise Projektion auf den Raum der Gittervektoren,

$$(1.9) \quad R_\Delta(x) := (x(\tau_0), \dots, x(\tau_N)).$$

Weiters legen wir $m-1$ (aufsteigend geordnete) Knoten $t_{i,j}$, $j = 1 \dots m-1$, in beliebiger Weise (also nicht notwendigerweise äquidistant) in das Innere jedes der Teilintervalle J_i ,¹ und bezeichnen die Inkremente in dem so definierten feinen Gitter Δ^m mit $\delta_{i,k}$, also:

$$(1.10) \quad \Delta^m := \{t_{i,j} := \tau_{i-1} + \sum_{k=1}^j \delta_{i,k}, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 0 \dots m\}.$$

Der Restriktionsoperator $R_{\Delta^m}(\cdot)$ und eine Norm $\|\cdot\|_{\Delta^m}$ für Gittervektoren über dem feinen Gitter seien analog zu 1.9 bzw. (1.8) definiert.

Anmerkung:

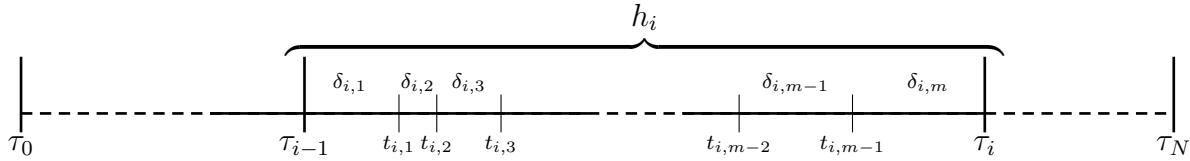
- In dem folgenden Konvergenzbeweis werden wir Ordnungsergebnisse für Defektkorrektur-Näherungen herleiten, wobei die Ordnung bezüglich Potenzen der maximalen Intervalllänge \mathbf{h} ausgedrückt wird. Diese Resultate gelten in dem üblichen Sinn, nämlich für $N \rightarrow \infty$, d.h. für $\mathbf{h} \rightarrow 0$. Allerdings benötigen wir dazu eine weitere Voraussetzung: Bei dem so gedachten Grenzprozess $\mathbf{h} \rightarrow 0$ – also auch $\delta_{i,j} \rightarrow 0$ – soll das maximale Verhältnis der Schrittweiten zueinander gleichmäßig beschränkt sein, d.h.

$$(1.11) \quad \frac{\max \delta_{i,j}}{\min \delta_{i,j}} \leq K$$

mit einer festen Konstanten K . Diese Voraussetzung ist deshalb erforderlich, weil ansonsten die gleichmäßige Stabilität der betrachteten Differenzenverfahren (insbesondere des Euler-Verfahrens) für $\mathbf{h} \rightarrow 0$ und Konvergenzresultate wie Satz 2.1 nicht gegeben wären.

¹Für $j = 0$ bzw. $j = m$ identifizieren wir in naheliegender Weise $t_{i,0}$ mit τ_{i-1} und $t_{i,m}$ mit τ_i .

- Unsere Betrachtungen machen nicht nur für $\mathbf{h} \rightarrow 0$ sondern auch für konkrete, feste Gitter Δ bzw. Δ^m Sinn, weil man die auftretenden Fehlerschranken im Prinzip konkret als (Problem-abhängige) Ausdrücke der Gestalt $C(\dots) \cdot \mathbf{h}^p$ anschreiben könnte – wobei jedoch $C(\dots)$ groß wird für große $\frac{\max \delta_{i,j}}{\min \delta_{i,j}}$.
- Abgesehen davon benötigen wir *keine* weitere Einschränkungen betreffend die verwendeten Gitter – insbesondere benötigt man keine lokal äquidistanten (oder asymptotisch 'fast' äquidistanten) Gitter, wie es für das Funktionieren klassischer Defektkorrektur-Varianten erforderlich wäre.



1.3. Verwendete Resultate.

LEMMA 1.1. (Lagrange-Interpolation) Gegeben seien m Punkte: $\{(t_j, f_j) : j = 1 \dots m, t_j < t_{j+1}\}$. Dann ist

$$(1.12) \quad p(t) := \sum_{j=1}^m f_j L_j(t) \quad \text{mit} \quad L_j(t) := \frac{\omega(t)}{(t - t_j) \omega'(t_j)}, \quad \omega(t) := \prod_{k=1}^m (t - t_k)$$

ein Polynom vom Grad $\leq m-1$, das die (t_j, f_j) interpoliert. Wenn die f_j Werte einer hinreichend glatten Funktion $f(t)$ sind, $f_j = f(t_j)$, dann gilt:

$$(1.13) \quad \|q - f\|_\infty = O((t_n - t_1)^m) \quad \text{und} \quad \|q' - f'\|_\infty = O((t_n - t_1)^{m-1}) \quad \text{in} \quad [t_1, t_m].$$

BEWEIS. Standardresultat der Numerik. □

LEMMA 1.2. (Interpolatorische Quadraturformeln)

(i) Zu gegebenen Abszissen $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ und einem Intervall $[t_L, t_R]$ gibt es eindeutig bestimmte (von diesen Daten abhängige) Koeffizienten α_k so dass für jedes Polynom $p(t)$ von Grad $\leq m-1$ gilt

$$(1.14) \quad \frac{1}{t_R - t_L} \int_{t_L}^{t_R} p(t) dt = \sum_{k=1}^m \alpha_k p(t_k).$$

(Die α_k sind in (1.16) angegeben.) Weiters gilt

$$(1.15) \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1.$$

(ii) Die zu $[t_L, t_R] = [t_{j-1}, t_j]$ gehörigen Quadraturkoeffizienten α_k seien mit $\alpha_{j,k}$ bezeichnet ($j, k = 1 \dots m$). Dann ist die $m \times m$ -Matrix $A = (\alpha_{j,k})$ regulär.

BEWEIS.

(i) Integration der Lagrange-Darstellung $p(t) = \sum_{k=1}^m p(t_k) L_k(t)$ (vgl. (1.12)) ergibt:

$$(1.16) \quad \int_{t_L}^{t_R} p(t) dt = \sum_{k=1}^m p(t_k) \int_{t_L}^{t_R} L_k(t) dt \quad \implies \quad \alpha_k = \frac{1}{t_R - t_L} \int_{t_L}^{t_R} L_k(t) dt.$$

Die Relation (1.15) folgt aus der Tatsache, dass (1.14) auch für $p(t) \equiv 1$ gelten muss.

(ii) Um die Regularität von $A = (\alpha_{j,k})$ zu zeigen, wählen wir einen beliebigen Vektor $d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^m$ und nehmen an: $Ad = 0$. Es sei nun $d(t)$ dasjenige Polynom vom Grad $\leq m-1$, das die Werte (t_j, d_j) , $j = 1 \dots m$, interpoliert. Dann bedeutet die Relation $Ad = 0$ nichts anderes als

$$(1.17) \quad \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} d(t_k) = 0, \quad j = 1 \dots m.$$

Gemäß (1.14) und wegen $t_{j-1} \neq t_j$ ist dies äquivalent zu

$$(1.18) \quad \int_{t_{j-1}}^{t_j} d(t) dt = 0, \quad j = 1 \dots m.$$

Für die Stammfunktion $D(t) := \int_{t_0}^t d(\tau) d\tau$ – ein Polynom vom Grad $\leq m$ – bedeutet das

$$(1.19) \quad D(t_j) - D(t_{j-1}) = 0, \quad j = 1 \dots m,$$

und daher

$$(1.20) \quad 0 = D(t_0) = D(t_1) = \dots = D(t_{n-1}) = D(t_m).$$

Daher ist $D(t) \equiv 0 = \text{const.}$ und somit $d(t) \equiv D'(t) \equiv 0$ und $d = (d(t_1), \dots, d(t_m)) = 0$.

Wir haben also gezeigt: $Ad = 0 \Rightarrow d = 0$, und daraus folgt die Regularität von A . \square

Korollar zu Lemma 1.2: Formel (1.14) kann man z.B. dazu verwenden, Differenzenquotienten eines Polynomes $q(t)$ vom Grad $\leq m$ als gewichtete Summe von Ableitungswerten zu schreiben:

$$(1.21) \quad \frac{q(t_R) - q(t_L)}{t_R - t_L} = \frac{1}{t_R - t_L} \int_{t_L}^{t_R} q'(t) dt = \sum_{k=1}^m \alpha_k q'(t_k).$$

Es gilt auch die ‘umgekehrte’ Darstellung:

LEMMA 1.3. (*Polynomableitung als gewichtete Summe von Differenzenquotienten*)

(i) Zu gegebenen Abszissen $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ und einer Stelle \bar{t} gibt es eindeutig bestimmte (von diesen Daten abhängige) Koeffizienten β_k so dass für jedes Polynom $q(t)$ vom Grad $\leq m$ gilt

$$(1.22) \quad q'(\bar{t}) = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

(Die β_k sind in (1.29) angegeben.) Weiters gilt

$$(1.23) \quad \sum_{k=1}^m \beta_k = 1.$$

(ii) Die zu $\bar{t} = t_j$ gehörigen Koeffizienten β_k seien mit $\beta_{j,k}$ bezeichnet ($j, k = 1 \dots m$). Dann ist die $m \times m$ -Matrix $B = (\beta_{j,k})$ genau die Inverse der Matrix $A = (\alpha_{j,k})$ aus Lemma 1.2.

BEWEIS.

(i) Ableiten der Lagrange-Darstellung $q(t) = \sum_{k=0}^m L_k(t) q(t_k)$ (mit den Lagrange-Basispolynomen $L_k(t)$ vom Grad m zu den Knoten t_0, \dots, t_m) an der Stelle \bar{t} ergibt:

$$(1.24) \quad q'(\bar{t}) = \sum_{k=0}^m L'_k(\bar{t}) q(t_k).$$

Dabei gilt: $\sum_{k=0}^m L'_k(\bar{t}) = 0$, weil (1.24) auch für $q(t) \equiv 1$ gelten muss. Mit der Notation

$$(1.25) \quad S_{-1} := 0, \quad S_k := \sum_{\ell=0}^k L'_\ell(\bar{t})$$

gilt

$$(1.26) \quad L'_k(\bar{t}) = S_k - S_{k-1}, \quad k = 0 \dots m, \quad \text{und} \quad S_m = 0.$$

Wir schreiben nun obige Darstellung für $q'(\bar{t})$ um als

$$(1.27) \quad q'(\bar{t}) = \sum_{k=0}^m (S_k - S_{k-1}) q(t_k),$$

und erhalten daraus mittels partieller Summation:

$$(1.28) \quad q'(\bar{t}) = \underbrace{S_m}_{=0} q(t_m) - \underbrace{S_{-1}}_{=0} q(t_0) - \sum_{k=1}^m S_{k-1} (q(t_k) - q(t_{k-1})).$$

Es gilt also die Darstellung (1.22) mit

$$(1.29) \quad \beta_k = -(t_k - t_{k-1}) \sum_{\ell=0}^{k-1} L'_\ell(\bar{t}).$$

Die Relation (1.23) folgt aus der Tatsache, dass (1.22) auch für $q(t) \equiv t$ gelten muss.

(ii) Dies folgt aus der Tatsache, dass das System der Identitäten

$$(1.30) \quad q'(t_j) = \sum_{k=1}^m \beta_{j,k} \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad j = 1 \dots m$$

genau die Inverse des Systems (vgl.(1.21))

$$(1.31) \quad \frac{q(t_j) - q(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} q'(t_k), \quad j = 1 \dots m$$

mit der regulären Matrix $A = (\alpha_{j,k})$ darstellt. □

Anmerkung:

- Man beachte, dass in den Darstellungen (1.16) bzw. (1.29) Lagrange-Basispolynome verschiedenen Grades eingehen (nämlich zu den Knoten t_1, \dots, t_m bzw. t_0, \dots, t_m).
- Die Koeffizienten $\alpha_{j,k}$ werden für die algorithmische Umsetzung der Integralvariante der Defektkorrektur benötigt. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, reicht es dabei aus, die Interpolation einmal für ein Normintervall vorzunehmen, um dann mit Hilfe von (5.2) sofort die benötigten $\alpha_{i,j}$ in der Hand zu haben.
- Die Größe der α_k aus Lemma 1.2 sowie der β_k aus Lemma 1.3 hängt auch von der Auswahl der Interpolationsstellen und somit vom zugrundegelegten Gitter ab. Wenn man universelle Schranken für die α_k und β_k benötigt, wie in Satz 3.1, dann dürfen die Schrittweiten nicht zu unterschiedlich groß sein. Auch das ist durch die Schranke K aus (1.11) gewährleistet.

2. Die Defektkorrektur und ihre Varianten

2.1. Heuristische Motivation der Defektkorrektur. (Historische Wurzeln dieser Idee: vgl. [11], [5], [6], [10].)

Wir betrachten folgendes abstraktes Schema (i.Allg. nichtlinear):

$$(2.1) \quad \tilde{F}u = 0$$

symbolisiere ein einfaches Basis-Verfahren (z.B. Euler-Verfahren) mit der Lösung \tilde{u} , das zwar einfach zu berechnen, aber auch mäßig genau ist. Sei weiters

$$(2.2) \quad \hat{F}u = 0$$

ein Verfahren höherer Ordnung, dessen Lösung \hat{u} eigentlich zu berechnen ist. Diese ist also eine genauere Approximation der exakten Lösung u^* der gegebenen Differentialgleichung. Ein typisches Beispiel hierfür sind Kollokationsverfahren (vgl. 2.11)). Die Idee der Defektkorrektur entspricht nun folgendem algorithmischen Ablauf:

- Durch Lösen von $\tilde{F}u = 0$ erhält man \tilde{u} als Basis-Lösung.
- Jetzt bildet man den Defekt $\hat{d}(\tilde{u}) := \hat{F}\tilde{u}$ und betrachtet das ‘Nachbarproblem’

$$(2.3) \quad \hat{F}v = \hat{d}(\tilde{u})$$

mit der exakten Lösung \tilde{u} (laut Konstruktion).

Wir stellen nun die folgende heuristische Überlegung an: Die Lösung \tilde{u} des Basis-Verfahrens $\tilde{F}\tilde{u} = 0$ ist eine mäßig genaue Approximation für die Lösung u^* der gegebenen Differentialgleichung, und damit auch eine mäßig genaue Approximation für die Lösung \hat{u} von $\hat{F}\hat{u} = 0$, die man eigentlich berechnen möchte. Man denkt sich nun auch das Nachbarproblem (2.3) mit Hilfe des Basis-Verfahrens gelöst, d.h. man berechnet die Lösung \tilde{v} von

$$(2.4) \quad \tilde{F}v = \hat{d}(\tilde{u}).$$

\tilde{v} ist also eine Approximation für \tilde{u} (die exakte Lösung von (2.3)), und man nimmt jetzt an, dass sich die Fehler bei der Approximation mittels \tilde{F} für $\hat{F}u = 0$ bzw. $\hat{F}u = \hat{d}(\tilde{u})$ ähnlich verhalten, also:

$$(2.5) \quad \tilde{u} - \hat{u} \approx \tilde{v} - \tilde{u}.$$

- Mit Hilfe dieser Relation können wir nun eine verbesserte Näherung für \hat{u} konstruieren:

$$(2.6) \quad \tilde{u}^{(1)} := \tilde{u} - (\tilde{v} - \tilde{u}).$$

- Für den 2. Iterationsschritt bilden wir wieder den Defekt, diesmal bezüglich der neuen Näherungslösung $\tilde{u}^{(1)}$, also $\hat{d}(\tilde{u}^{(1)}) := \hat{F}\tilde{u}^{(1)}$, betrachten das neue Nachbarproblem

$$(2.7) \quad \hat{F}v = \hat{d}(\tilde{u}^{(1)})$$

(mit der exakten Lösung $\tilde{u}^{(1)}$), lösen es wiederum näherungsweise mit dem Hilfe des Basis-Verfahrens und erhalten so die Näherungslösung $\tilde{v}^{(1)}$ für $\tilde{u}^{(1)}$. Die gleiche heuristische Überlegung wie oben führt dann zu der Beziehung

$$(2.8) \quad \tilde{u} - \hat{u} \approx \tilde{v}^{(1)} - \tilde{u}^{(1)}.$$

- Damit können wir eine weitere Verbesserung durch den nächsten Iterationsschritt,

$$(2.9) \quad \tilde{u}^{(2)} := \tilde{u} - (\tilde{v}^{(1)} - \tilde{u}^{(1)})$$

erwarten.

- Weiterführen dieser Überlegung liefert die iterative Vorschrift (in naheliegender Notation)

$$(2.10) \quad \tilde{u}^{(n+1)} := \tilde{u} - (\tilde{v}^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}).$$

Anmerkung:

- Die Differentialgleichung selbst kommt in obiger heuristischer Überlegung nicht explizit vor; es geht darum, das ‘genauere’ Diskretisierungsschema mit Hilfe eines ‘ungenauen’ aber einfachen Schemas näherungsweise zu lösen.
- In den klassischen Begründungen des Verfahrens bezieht man sich direkt auf die Differentialgleichung selbst. Der gedankliche Unterschied ist nicht wesentlich; wir haben hier für die Schreibweise mittels der genauen Diskretisierung \hat{F} gewählt, weil man damit verschiedene Varianten – basierend auf verschiedenen Arten den Defekt konkret zu berechnen – besser motivieren kann.
- Einen Konvergenzbeweis kann man entweder so organisieren, dass man den Fehler $\tilde{u}^n - \hat{u}$ studiert, oder direkt den Fehler von \tilde{u}^n im Vergleich zur exakten Lösung u^* der gegebenen Differentialgleichung abschätzen. Wir werden in Abschnitt 3 letztere Variante ausführen, weil diese den Vorteil bietet, dass man die Existenz und Eindeutigkeit von \hat{u} nicht explizit benötigt. (Auch in der obigen heuristischen Betrachtung könnte man mit u^* anstelle von \hat{u} argumentieren.)

2.2. Kollokation und verschiedene Varianten der Defektkorrektur. Wir beziehen uns nun wieder konkret auf die in Abschnitt 1 definierten Gitter. Konkret entspreche nun \hat{F} (vgl. (2.2)) einem Kollokationsschema basierend auf den m Kollokationsknoten $t_{i,1}, \dots, t_{i,m}$ in jedem Teilintervall $J_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, und wir definieren die Kollokationsfunktion $q(t)$ als stückweise zusammengesetzt aus Polynomen $q_i(t)$ vom Grad $\leq m$. $q(t)$ erfülle also die Kollokations-, Übergangs- und Randbedingungen

$$(2.11) \quad \begin{aligned} q'_i(t_{i,j}) &= F(t_{i,j}, q_i(t_{i,j})), & i = 1 \dots N, & \quad j = 1 \dots m, \\ q_i(\tau_i) &= q_{i-1}(\tau_i), & i = 1 \dots N, \\ B_a q_0(a) + B_b q_{N-1}(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Für reguläre Probleme mit hinreichend glatten Daten gilt jetzt der folgende Satz:

SATZ 2.1. *Sei $z(t)$ eine isolierte Lösung von (1.1). Dann gilt für jedes Kollokationsschema der Form (2.11): Es gibt Konstanten $\rho, h_0, \delta_0, K > 0$ so dass die folgenden Aussagen für alle Gitter Δ^m mit $\mathbf{h} \leq h_0$ und $\frac{\max \delta_{i,j}}{\min \delta_{i,j}} \leq K$:*

- *Es existiert eine eindeutige Lösung $q(t)$ des Kollokationsschemas (2.11) in einem Schlauch vom Radius ρ um $z(t)$.*
- *Die folgenden Fehlerabschätzungen gelten:*

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \|R_{\Delta^m}(q) - R_{\Delta^m}(z)\|_{\Delta^m} &= O(\mathbf{h}^m), \\ \|q(t) - z(t)\|_{\infty} &= O(\mathbf{h}^m). \end{aligned}$$

BEWEIS. Vgl. [1]. □

Die Kollokationsgleichungen (2.11) spielen nun die Rolle der genauen Diskretisierung (2.2). Es entspricht also $R_{\Delta^m}(q)$ dem \hat{u} aus (2.2), und Satz 2.1 stellt sicher dass \hat{u} eine $O(\mathbf{h}^m)$ -Approximation für $z(t)$ darstellt. Die direkte Bestimmung von \hat{u} durch Lösen der Kollokationsgleichungen ist aber algorithmisch aufwendig.

Es sei nun $\tilde{\eta}_{\Delta^m}$ eine mit dem rückwärtigen Euler-Verfahren über dem Gitter Δ^m gewonnene Basislösung, d.h.²

$$(2.13) \quad \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \eta_{i,j}), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m,$$

$$B_a \eta_{0,0} + B_b \eta_{N-1,m} = \beta.$$

Dieses Schema spielt nun die Rolle der einfachen (Basis-) Diskretisierung (2.1). Die $\eta_{i,j}$ entsprechen also dem \tilde{u} aus (2.1). Für (2.13) gilt ein Konvergenzresultat analog zu Satz 2.1, und das Verfahren hat die Ordnung 1.

Weiters sei $p(t)$ diejenige stückweise polynomiale Funktion, die durch Interpolation der $\eta_{i,j}$ auf den Teilintervallen J_i durch Polynome $p_i(t)$ vom Grad $\leq m$ erklärt ist. Der Defekt $\hat{d}(\tilde{u})$ ist dann über Δ^m als das Residuum erklärt, das bei Einsetzen von $p(t)$ an den Kollokationsknoten in die Kollokationsbedingungen entsteht:

$$(2.14) \quad \hat{d}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}) := p'_i(t_{i,j}) - F(t_{i,j}, \eta(t_{i,j})), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m.$$

Dies entspricht der ‘klassischen’ Definition des Defektes; es bedeutet genau dass $p(t)$ an den $t_{i,j}$ in die gegebene Differentialgleichung eingesetzt wird (vgl. [11]).

Die Formulierung der Kollokationsbedingungen – und damit die Bildung des Defektes – ist aber nicht eindeutig. Wir können die Kollokationsbedingungen z.B. auch in folgender Weise mittels lokaler Integration umschreiben:³

LEMMA 2.2. (*Kollokationsbedingungen in Integralschreibweise*) *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gibt es genau eine stückweise polynomiale Lösung $q(t)$ der Gleichungen*

$$(2.15) \quad \frac{q_i(t_{i,j}) - q_i(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} = \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k}^{(i)} F(t_{i,k}, q_i(t_{i,k})), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m,$$

$$q_i(\tau_i) = q_{i+1}(\tau_i), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$B_a q_0(0) + B_b q_{N-1}(1) = \beta,$$

und diese Lösung ist identisch mit der Lösung $q(t)$ von (2.11). (Dabei bezeichnen die $\alpha_{j,k}^{(i)}$ die Quadraturkoeffizienten gemäß Lemma 1.2, (ii), zu den Knoten $t_j := t_{i,j}$ ($j = 1 \dots m$) in den einzelnen Teilintervallen J_i .)

Anmerkung: In der Praxis wird man in jedem der Teilintervalle J_i die gleiche Verteilung von Kollokationsnoten wählen, etwa äquidistante oder Gauß-Knoten, so dass man – abgesehen von einer simplen Umskalierung – nur einen festen Satz von Koeffizienten $\alpha_{j,k}$ benötigt. Abgesehen davon verwenden wir im Folgenden der Einfachheit halber durchwegs die ‘generische’ Notation $\alpha_{j,k}$ anstelle von $\alpha_{j,k}^{(i)}$.

²Hier werden wiederum die $\eta_{i,m}$ mit den $\eta_{i+1,0}$ identifiziert (als Analogon zu der Stetigkeitsbedingung in (2.11)).

Wir hätten genauso gut das vorwärts gerichtete Euler-Verfahren; dieses inkludiert jedoch eine F-Auswertung an der Stelle $t = a$, was wir im Hinblick auf die Anwendung auf singuläre Probleme vermeiden wollen.

³Diese Umformulierung der Kollokationsgleichungen ist eng verwandt mit der zugehörigen *Runge-Kutta*-Formulierung (vgl. [1], [8]).

BEWEIS. (von Lemma 2.2) Für die Lösung $q(t)$ von (2.11) ergibt lokale Integration aufgrund von Lemma 1.2:

$$(2.16) \quad \frac{q_i(t_{i,j}) - q_i(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} = \int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} q'_i(t) dt = \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} q'_i(t_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, q_i(t_{i,k}))$$

($i = 1 \dots N, j = 1 \dots m$). Daher ist $q(t)$ auch eine Lösung der Gleichungen (2.15). Zu zeigen bleibt, dass dies die einzige Lösung von (2.15) ist: Wegen (2.16) gilt

$$(2.17) \quad \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} [q'_i(t_k) - F(t_{i,k}, q_i(t_{i,k}))] = 0, \quad j = 1 \dots m$$

auf allen Teilintervallen J_i . Wegen der Regularität der Matrizen $A = (\alpha_{j,k})$ (vgl. Lemma 1.2) gilt daher auch

$$(2.18) \quad q'_i(t_k) - F(t_{i,k}, q_i(t_{i,k})) = 0, \quad k = 1 \dots m$$

in allen J_i , d.h. $q(t)$ löst auch (2.11) – eine andere Lösung von (2.15) existiert nicht. \square

Die Lösungen der in unterschiedlicher Weise formulierten Kollokationsgleichungen sind also identisch – jedoch ist der Defekt $\hat{d}(\tilde{u})$ der obigen Basislösung bezüglich der Integralformulierung, d.h.

$$(2.19) \quad \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}) := \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}}{\delta_{i,j}} - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m$$

nicht identisch mit dem ‘differentiellen’ Defekt gemäß (2.14). Damit haben wir zwei verschiedene Varianten vor uns, die Defektkorrektur durchzuführen. Wir nennen erstere Differential- und die zweite Integralvariante der Defektkorrektur.

Anmerkung. Bei der Integralvariante ergibt sich offenbar eine weitere Option: Man kann auch den linken Randpunkt t_{i-1} des jeweiligen Teilintervalles J_i bei Quadratur des Defektes mit einbeziehen und erhält so eine genauere Quadraturformel. Wir werden diese Variante in Abschnitt 4 genauer diskutieren.

Wir sind in diesem Abschnitt ausführlich auf die Lösbarkeit der Kollokationsgleichungen (in den beiden äquivalenten Formulierungen) eingegangen. Im folgenden Abschnitt werden wir jedoch sehen, dass für den Konvergenzbeweis der Defektkorrektur die Existenz bzw. Eindeutigkeit dieser Lösung $\hat{u} \equiv q(t)$ eigentlich nicht explizit benötigt wird, wenn man die Existenz, Eindeutigkeit und ausreichende Glattheit der Lösung $u^*(t)$ der gegebenen Differentialgleichung voraussetzt, und wenn die Stabilität des verwendeten Basis-Verfahrens gegeben ist.

Konkret werden wir folgende Aussagen verwenden:

LEMMA 2.3. (*Stabilität des rückwärtigen Euler-Verfahrens*) Die Lösung η_{Δ^m} des rückwärtigen Euler-Schemas (2.13) existiert und ist eindeutig unter analogen Voraussetzungen wie in Satz 2.1. Betrachtet man die Lösung $\tilde{\eta}_{i,j}$ eines gestörten Schemas

$$(2.20) \quad \frac{\tilde{\eta}_{i,j} - \tilde{\eta}_{i,j-1}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \tilde{\eta}_{i,j}) + \sigma_{i,j}, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m,$$

$$B_a \eta_{0,0} + B_b \eta_{N-1,m} = \beta,$$

so gibt es Konstanten S und σ_0 , so dass $\tilde{\eta}_{\Delta^m}$ eindeutig existiert, mit

$$(2.21) \quad \|\tilde{\eta}_{\Delta^m} - \eta_{\Delta^m}\|_{\Delta^m} \leq S \|\sigma_{\Delta^m}\|_{\Delta^m}$$

für Störungen σ_{Δ^m} mit $\|\sigma_{\Delta^m}\|_{\Delta^m} \leq \sigma_0$ und für alle Gitter Δ^m mit $\mathbf{h} \leq h_0$ und $\frac{\max \delta_{i,j}}{\min \delta_{i,j}} \leq K$.

BEWEIS. Dies ist ein Standard-Resultat aus der Theorie der Differenzenverfahren für Randwertprobleme; vgl. z.B. [1], [2]. \square

Für Probleme mit hinreichend glatten Daten – so dass die exakte Lösung $u^* \equiv z(t)$ hinreichend oft differenzierbar ist – kann man den Defekt von $z(t)$ bezüglich der integrierten Kollokationsgleichungen (2.15) asymptotisch wie folgt abschätzen:

LEMMA 2.4. (*‘Stufenordnung’ der Kollokationsgleichungen in Integralschreibweise*) Für hinreichend oft differenzierbares $z(t)$ gilt die Ordnungsaussage

$$(2.22) \quad \hat{D}_{i,j}(R_{\Delta^m}(z)) = \frac{z(t_{i,j}) - z(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, z(t_{i,k})) = O(\mathbf{h}^m)$$

für alle $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots m$.

BEWEIS. Wir betrachten ein beliebiges Teilintervall J_i und bezeichnen mit $p(t)$ dasjenige Polynom vom Grad $\leq m-1$, das $z(t)$ an den Kollokationsknoten $t_{i,j}$, $j = 1 \dots m$ interpoliert. Gemäß Lemma 1.1 gilt

$$(2.23) \quad \|p - z'\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^m) \quad \text{in } J_i.$$

$\hat{D}_{i,j}(z)$ formen wir nun wie folgt um:

$$(2.24) \quad \hat{D}_{i,j}(z) = \frac{1}{\delta_{i,j}} \int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} z'(t) dt - \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} z'(t_{i,j})$$

mit

$$(2.25) \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} z'(t_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} p(t_{i,j}) = \frac{1}{\delta_{i,j}} \int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} p(t) dt.$$

Dabei haben wir die Interpolationseigenschaft von $p(t)$ und Lemma 1.2 verwendet. Mit Hilfe von (2.23) erhalten wir schließlich

$$(2.26) \quad \hat{D}_{i,j}(z) = \frac{1}{\delta_{i,j}} \int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} (z'(t) - p(t)) dt = \frac{1}{\delta_{i,j}} \delta_{i,j} O(\mathbf{h}^m) = O(\mathbf{h}^m).$$

\square

3. Konvergenzbeweis für die Integralvariante der Defektkorrektur

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Defektkorrektur-Iteration (2.10), mit dem rückwärtigen Euler-Verfahren als Basisverfahren und mit der Defektberechnung nach der Integralvariante, d.h. gemäß (2.19), für beliebige Gitter, die der Stabilitätsbedingung (1.11) genügen, im n -ten Schritt ein Verfahren der Ordnung $n+1$ ergibt – bis zum Erreichen der Ordnung m des für die Defektberechnung zugrunde gelegten Kollokationsschemas.

Es bezeichne nun $\eta_{\Delta^m}^{(0)}$ die mit dem rückwärtigen Eulerverfahren gewonnene Näherungslösung, d.h.⁴

$$(3.1) \quad \frac{\eta_{i,j}^{(0)} - \eta_{i,j-1}^{(0)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(0)}).$$

Für $n \geq 1$ ist die n -te Näherungslösung durch folgende Rekursion definiert:

$$(3.2) \quad \eta_{\Delta^m}^{(n+1)} := \eta_{\Delta^m}^{(0)} - (\pi_{\Delta^m}^{(n)} - \eta_{\Delta^m}^{(n)}),$$

wobei die $\pi_{\Delta^m}^{(n)}$ durch Lösung von

$$(3.3) \quad \frac{\pi_{i,j}^{(n)} - \pi_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \pi_{i,j}^{(n)}) + \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)})$$

gewonnen werden, mit dem Defekt d.h. (vgl. (2.19)):

$$(3.4) \quad \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)}) = \frac{\eta_{i,j}^{(n)} - \eta_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}^{(n)}).$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der $\pi_{\Delta^m}^{(n)}$ ergibt sich induktiv aus der asymptotischen Kleinheit der auftretenden Defekte (siehe Satz 3.1) aufgrund von Lemma 2.3.

Es sei weiters $q^{(n)}(t)$ stückweise zusammengesetzt aus Polynomen $q_i^{(n)}(t)$ vom Grad $\leq m$, die die $\eta_{\Delta^m}^{(n)}$ in den Intervallen J_i an den Stellen $\tau_{i-1} = t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,m} = \tau_i$ interpolieren.

$q^*(t)$ entstehe in gleicher Weise durch Interpolation der exakten Lösungswerte, d.h. von $R_{\Delta^m}(z)$. Es gilt also (vgl. Lemma 1.2 mit $m+1$ Interpolationsknoten):

$$(3.5) \quad \|q^* - z\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{m+1}), \quad \|q^{*'} - z'\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^m).$$

Notation: Gittervektoren die durch Bildung von rückwärtigen Differenzenquotienten aus Gittervektoren η_{Δ^m} entstehen, bezeichnen wir im Folgenden mit $\bar{\partial}\eta_{\Delta^m}$, d.h.

$$(3.6) \quad \bar{\partial}\eta_{i,j} := \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}}{\delta_{i,j}}.$$

Im Beweis des folgenden Satzes beschränken wir uns auf lineare Probleme, d.h. $F(t, z)$ habe die Form (1.2).

SATZ 3.1. *Es sei $z(t)$ die hinreichend glatte Lösung des Randwertproblems (1.1) Die $\eta_{\Delta^m}^{(n)}, q^{(n)}(t)$ und $\hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)})$ seien wie oben definiert. Das Gitter Δ^m genüge den in Abschnitt 1 angegebenen Voraussetzungen. Dann gibt es ein $h_0 > 0$, so dass für $\mathbf{h} \leq h_0$ und die durch die Defektkorrektur-Iteration (3.1)–(3.4) definierte Folge von Näherungslösungen für $n < m$ folgende Abschätzungen gelten:*

$$(3.7) \quad \|\eta_{\Delta^m}^{(n)} - R_{\Delta^m}(z)\|_{\Delta^m} = O(\mathbf{h}^{n+1})$$

$$(3.8) \quad \|\bar{\partial}\eta_{\Delta^m}^{(n)} - \bar{\partial}R_{\Delta^m}(z)\|_{\Delta^m} = O(\mathbf{h}^{n+1})$$

$$(3.9) \quad \|q^{(n)} - z\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{n+1})$$

$$(3.10) \quad \|q'^{(n)} - z'\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{n+1})$$

⁴Alle im Folgenden auftretenden Näherungslösungen erfüllen die linearen Randbedingungen gemäß (1.1) exakt; wir verzichten darauf, das jeweils explizit anzuschreiben.

Der Indexlauf ist durchwegs: $i = 1 \dots N, j = 1 \dots m$.

BEWEIS. Dieser wird für alle Behauptungen mittels Induktion nach n geführt. Zwecks übersichtlicher Notation verzichten wir in dem Beweis auf den Subscript Δ^m bei Gittervektoren, d.h. wir schreiben statt $\eta_{\Delta^m}^{(0)}$ einfach $\eta^{(0)}$, etc.

Folgende Notation wird durchgehend verwendet:

$$(3.11) \quad \varepsilon^{(n)} := \eta^{(n)} - R_{\Delta^m}(z), \quad \xi^{(n)} := \pi^{(n)} - \eta^{(n)}, \quad n \geq 0.$$

Die $\varepsilon^{(n)}$ und $\xi^{(n)}$ erfüllen homogene Randbedingungen, d.h.

$$(3.12) \quad B_a \varepsilon_{1,0}^{(n)} + B_b \varepsilon_{N,m}^{(n)} = 0, \quad B_a \xi_{1,0}^{(n)} + B_b \xi_{N,m}^{(n)} = 0.$$

Aufgrund von (3.2) gilt

$$(3.13) \quad \varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(0)} - \xi^{(n-1)}, \quad n \geq 1.$$

Weiters bezeichnen wir mit $\Phi^{(n)}(t)$ die Funktionen

$$(3.14) \quad \Phi^{(n)}(t) := F(t, q^{(n)}(t)) - F(t, z(t)) = F(t, (q^{(n)} - z)(t)), \quad n \geq 0.$$

(Die letztere Identität ergibt sich aus der Linearität von $F(t, \cdot)$.)

- Wir betrachten zuerst den Fall $n = 0$ (Induktionsanfang – Basisverfahren):
 - Die Konvergenzaussage (3.7), d.h. $\|\varepsilon^{(0)}\|_{\Delta^m} = O(\mathbf{h}^1)$, folgt in bekannter Weise aus der Stabilität und Konsistenz der Ordnung 1 des Euler-Verfahrens (vgl. z.B. [1]).

Als Vorbereitung für das folgende Induktionsargument schreiben wir die Differenzgleichung für den Fehler $\varepsilon^{(0)} = \eta^{(0)} - R_{\Delta^m}(z)$ in der Form

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{\varepsilon_{i,j}^{(0)} - \varepsilon_{i,j-1}^{(0)}}{\delta_{i,j}} &= F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(0)}) - \frac{z(t_{i,j}) - z(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} \\ &= F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(0)}) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, z(t_{i,k})) + O(\mathbf{h}^m) \\ &= C(t_{i,j}) \varepsilon_{i,j}^{(0)} + F(t_{i,j}, z(t_{i,j})) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, z(t_{i,k})) + O(\mathbf{h}^m). \end{aligned}$$

Die erste Zeile dieser Umformung folgt aus (3.1) und aus (3.11). In der zweiten Zeile wird Lemma 2.4, und in der dritten schließlich die Linearität aus (1.1) und wiederum (3.11) benützt.

- Um (3.8) zu zeigen, verwenden wir (3.15) und beachten, dass wegen $\sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} = 1$ (vgl. Lemma 1.2) in der letzten Zeile von (3.15) eine gewichtete Summe von Werten $F(t_{i,k}, z(t_{i,k})) = Z'(t_{i,k})$ mit Koeffizientensumme 0 auftritt. Mittels eines einfachen Taylor-Argumentes gelangen wir so zu der Abschätzung

$$(3.16) \quad \left| \frac{\varepsilon_{i,j}^{(0)} - \varepsilon_{i,j-1}^{(0)}}{\delta_{i,j}} \right| \leq L_C |\varepsilon_{i,j}^{(0)}| + M\mathbf{h} \|z''\|_{\infty} + O(\mathbf{h}^m) = O(\mathbf{h})$$

mit einer gewissen Konstanten M , mit (1.3) und aufgrund von (3.7). Also gilt (3.8) für $n = 0$.

- Zum Beweis von (3.9) schätzen wir ab

$$(3.17) \quad \|q^{(0)} - z\|_{\infty} \leq \|q^{(0)} - q^*\|_{\infty} + \|q^* - z\|_{\infty};$$

dabei ist $q^{(0)} - q^*$ auf jedem Teilintervall J_i ein Polynom vom Grad $\leq m$, das die Werte $\eta_{i,j}^{(0)} - z(t_{i,j}) = O(\mathbf{h})$, $j = 0..m$, interpoliert. Nach einem Standard-Resultat der Numerik ist dann auch $\|q^{(0)} - q^*\|_{\infty} = O(\mathbf{h})$. Darüber hinaus ist $\|q^* - z\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{m+1})$ (vgl. (3.5)), also gilt (3.9) für $n = 0$.

– Zum Beweis von (3.10) schätzen wir analog ab:

$$(3.18) \quad \|q^{(0)'} - z'\|_\infty \leq \|q^{(0)'} - q^{*'}\|_\infty + \|q^{*'} - z'\|_\infty.$$

Um den ersten Term abzuschätzen, beachten wir, dass für jedes $t \in J_i$ aufgrund von Lemma 1.3 schreiben können:

$$(3.19) \quad (q^{(0)'} - q^{*'})(t) = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{(q^{(0)} - q^*)(t_{i,k}) - (q^{(0)} - q^*)(t_{i,k-1})}{t_{i,k} - t_{i,k-1}} = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{\varepsilon_{i,k}^{(0)} - \varepsilon_{i,k-1}^{(0)}}{\delta_{i,k}}$$

mit (von t abhängigen, gleichmäßig beschränkten) Koeffizienten β_k . Für den zweiten Term in (3.18) gilt (vgl. (3.5)) $\|q^{*'} - z'\|_\infty = O(\mathbf{h}^m) \leq O(\mathbf{h}^{n+1})$. Damit ergibt sich (3.10) als Folgerung aus (3.8).

• Induktion $n - 1 \rightarrow n$ ($n < m$):

– Um (3.7) zu zeigen, nehmen wir für $\xi^{(n-1)} = \pi^{(n-1)} - \eta^{(n-1)}$ analoge Umformungen vor wie in (3.15) für $\varepsilon^{(0)}$:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \frac{\xi_{i,j}^{(n-1)} - \xi_{i,j-1}^{(n-1)}}{\delta_{i,j}} &= F(t_{i,j}, \pi_{i,j}^{(n-1)}) + \hat{D}_{i,j}(\eta^{(n-1)}) - \frac{\eta_{i,j}^{(n-1)} - \eta_{i,j-1}^{(n-1)}}{\delta_{i,j}} \\ &= F(t_{i,j}, \pi_{i,j}^{(n-1)}) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}^{(n-1)}) \\ &= C(t_{i,j}) \xi_{i,j}^{(n-1)} + F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(n-1)}) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Hier wurden auch (3.3) und (3.4) benützt. Aufgrund von (3.13) lässt sich nun die Differenz von (3.15) und (3.20) schreiben als (zur Definition von $\Phi^{(n-1)}(t)$ vgl. (3.14)):

$$(3.21) \quad \frac{\varepsilon_{i,j}^{(n)} - \varepsilon_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} = C(t_{i,j}) \varepsilon_{i,j}^{(n)} - [\Phi^{(n-1)}(t_{i,j}) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} \Phi^{(n-1)}(t_{i,k}) + O(\mathbf{h}^m)].$$

Wegen $\sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} = 1$ (vgl. Lemma 1.2) ist die Summe der Koeffizienten in der gewichteten Summe $\Phi^{(n-1)}(t_{i,j}) - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} \Phi^{(n-1)}(t_{i,k})$ gleich Null. Mittels eines einfachen Taylor-Argumentes gelangen wir dadurch zu der Abschätzung mit (vgl. (3.14))

$$(3.22) \quad \Phi^{(n-1)'}(t) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, (q^{(n-1)} - z)(t)) + \frac{\partial}{\partial z} F(t, (q^{(n-1)} - z)(t)) \cdot (q^{(0)'} - z')(t).$$

Somit können wir die Inhomogenität in (3.21) abschätzen durch

$$(3.23) \quad M\mathbf{h} (\|q^{(n-1)} - z\|_\infty + \|q^{(n-1)'} - z'\|_\infty) + O(\mathbf{h}^m).$$

Mit Hilfe der *Induktionsannahme*, d.h. der *Gültigkeit von (3.9) und (3.10) für $n - 1$* , erhalten wir nun aus (3.21) und (3.23):

$$(3.24) \quad \frac{\varepsilon_{i,j}^{(n)} - \varepsilon_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} = C(t_{i,j}) \varepsilon_{i,j}^{(n)} + O(\mathbf{h}^{n+1}).$$

Mit der Stabilität des Euler-Verfahrens (Lemma 2.3)⁵ folgt dann unmittelbar (3.7):

$$(3.25) \quad \|\varepsilon^{(n)}\|_{\Delta^m} = \|\eta^{(n)} - R_{\Delta^m}(z)\|_{\Delta^m} = O(\mathbf{h}^{n+1}).$$

– (3.8) ist nun eine unmittelbare Folgerung aus (3.7) und Gleichung (3.24):

$$(3.26) \quad \left| \frac{\varepsilon_{i,j}^{(n)} - \varepsilon_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} \right| \leq L_C |\varepsilon_{i,j}^{(n)}| + O(\mathbf{h}^{n+1}) = O(\mathbf{h}^{n+1}),$$

also gilt (3.8).

Der Beweis von (3.9) und (3.10) funktioniert beinahe wortwörtlich gleich wie für $n = 0$:

– Zum Beweis von (3.9) schätzen wir ab

$$(3.27) \quad \|q^{(n)} - z\|_{\infty} \leq \|q^{(n)} - q^*\|_{\infty} + \|q^* - z\|_{\infty};$$

dabei ist $q^{(n)} - q^*$ auf jedem Teilintervall J_i ein Polynom vom Grad $\leq m$, das die Werte $\eta_{i,j}^{(n)} - z(t_{i,j}) = O(\mathbf{h}^{n+1})$, $j = 0 \dots m$, interpoliert. Nach einem Standard-Resultat der Numerik ist dann auch $\|q^{(n)} - q^*\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{n+1})$. Darüber hinaus ist $\|q^* - z\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{m+1})$ (vgl. (3.5)), also gilt (3.9).

– Zum Beweis von (3.10) schätzen wir analog ab:

$$(3.28) \quad \|q^{(n)'} - z'\|_{\infty} \leq \|q^{(n)'} - q^{*'}\|_{\infty} + \|q^{*'} - z'\|_{\infty}.$$

Um den ersten Term abzuschätzen, beachten wir, dass für jedes $t \in J_i$ aufgrund von Lemma 1.3 schreiben können:

$$(3.29) \quad (q^{(n)'} - q^{*'})(t) = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{(q^{(n)} - q^*)(t_{i,k}) - (q^{(n)} - q^*)(t_{i,k-1})}{t_{i,k} - t_{i,k-1}} = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{\varepsilon_{i,k}^{(n)} - \varepsilon_{i,k-1}^{(n)}}{\delta_{i,k}}$$

mit (von t abhängigen, gleichmäßig beschränkten) Koeffizienten β_k . Für den zweiten Term in (3.28) gilt (vgl. (3.5)) $\|q^{*'} - z'\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^m) \leq O(\mathbf{h}^{n+1})$. Damit ergibt sich (3.10) als Folgerung aus (3.8). □

Anmerkungen

- Die Linearität von (1.1) ist für die Gültigkeit des Satzes nicht wirklich entscheidend, sie vereinfacht nur die Beweisführung.
- Würde man versuchen, die Konvergenz der Differentialvariante der Defektkorrektur analog zu beweisen, würde in der Abschätzung von dem (3.23) ein Term der Gestalt $\mathbf{h} \|q^{(n-1)''} - z''\|_{\infty}$ auftreten. Durch das Auftreten der zweiten Ableitung verliert aber eine Potenz von \mathbf{h} , was zum Zusammenbruch des Induktionsargumentes führt. Nur für lokal äquidistante Gitter hat, wie man mit Hilfe asymptotischer Fehlerentwicklungen zeigen kann, auch dieser Term die volle Ordnung, und die Differentialvariante funktioniert.

⁵Um genau zu sein: In diesem Argument wird $\varepsilon^{(n)}$ mit der Nulllösung verglichen, die sich für Inhomogenität und Randwerte 0 ergibt.

4. Eine weitere, asymptotisch genauere Variante

Wenn man, wie in Abschnitt 2.2 vorgeschlagen, jeweils den linken Randpunkt bei der Konstruktion der Quadraturformel mit einbezieht, erhält man eine um eine \mathbf{h} -Potenz genauere Quadraturformel und daher in Lemma 2.4 einen um diese eine \mathbf{h} -Potenz genaueren Fehlerterm

$$(4.1) \quad \hat{D}_{i,j}(R_{\Delta^m}(z)) = O(\mathbf{h}^{m+1}).$$

Damit kann man die Integralvariante in dieser modifizierten Form durchführen und kann auf das Erreichen der Fehlerordnung $O(\mathbf{h}^{m+1})$ nach m Iterationsschritten hoffen. Checkt man nun den Beweis von Satz 3.1 nochmals genau, so sieht man, dass dies tatsächlich funktioniert. Allerdings lässt sich dann (3.10) im letzten Induktionsschritt ($n = m$) nicht mehr beweisen. Dieser würde jedoch erst im einem nachfolgenden Induktionsschritt benötigt, der ohnehin nicht in Betracht gezogen wird. Die numerischen Resultate aus 9.3 bestätigen, dass (3.10) nicht gelten muss.

Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit sich der Fixpunkt der Variante ‘mit linkem Punkt’ als Lösung eines Kollokationsverfahrens interpretieren lässt.

Wir stellen die folgenden Überlegungen in einem Intervall $I := [l, r]$ an, das einem $J_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$ entspricht. Es gilt: $h := r - l$. Für $m = 1$ erfüllt der Fixpunkt $\eta^{(Fp)}$ unserer Variante wegen $\hat{D}(\eta^{(Fp)}) \equiv 0$ folgende Bedingung:

$$(4.2) \quad \eta_r^{(Fp)} = \eta_l^{(Fp)} + \frac{h}{2}[F(l, \eta_l^{(Fp)}) + F(r, \eta_r^{(Fp)})]$$

Dies entspricht nicht den Kollokationsbedingungen (2.11) vom Grad 1, denn wenn man ein Polynom vom Grad 1 ($q(t)$) durch η_l und η_r legt, so erhält man:

$$(4.3) \quad q'(l) = q'(r) = \frac{1}{2}[F(l, q(l)) + F(r, q(r))]$$

und nicht $q'(r) = F(r, q(r))$.

Konstruiert man aber eine Parabel ($Q(t)$) mit diesen Bedingungen:

$$(4.4) \quad Q'(l) = F(l, Q(l)), \quad Q'(r) = F(r, Q(r))$$

so erhält man:

$$(4.5) \quad Q'(t) = F(l, Q(l)) + \frac{t-l}{h}(F(r, Q(r)) - F(l, Q(l)))$$

und schließlich

$$(4.6) \quad Q(t) = Q(l) + (t-l)F(l, Q(l)) + \frac{(t-l)^2}{2h}(F(r, Q(r)) - F(l, Q(l)))$$

Auswerten an der Stelle r ergibt jetzt:

$$(4.7) \quad Q(r) = Q(l) + \frac{h}{2}(F(l, Q(l)) + F(r, Q(r)))$$

was äquivalent ist zu (4.2).

Dies motiviert folgende Definition:

Sei die ‘modifizierte’ Kollokationsfunktion $Q(t)$ stückweise zusammengesetzt aus Polynomen $Q_i(t)$ vom Grad $\leq m + 1$. $Q(t)$ erfülle also die ‘modifizierten’ Kollokations-, Übergangs- und Randbedingungen

$$(4.8) \quad \begin{aligned} Q'_i(t_{i,j}) &= F(t_{i,j}, Q_i(t_{i,j})), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 0 \dots m, \\ Q_i(\tau_i) &= Q_{i-1}(\tau_i), \quad i = 1 \dots N, \\ B_a Q_0(a) + B_b Q_{N-1}(b) &= \beta. \end{aligned}$$

vgl. (2.11).

Numerische Ergebnisse wie in Abschnitt 9 lassen vermuten, dass es hierzu analog zu Satz 2.1 eine eindeutige Lösung $Q(t)$ gibt, mit

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \|R_{\Delta^m}(Q) - R_{\Delta^m}(z)\|_{\Delta^m} &= O(\mathbf{h}^{m+1}), \\ \|Q(t) - z(t)\|_{\infty} &= O(\mathbf{h}^{m+1}). \end{aligned}$$

Auf mögliche Beweise wird hier nicht eingegangen.

Der Versuch, analog zu (2.14) hier eine Differentialvariante mit linkem Punkt zu konstruieren, scheitert auch daran, dass wir nur $m + 1$ Punkte zur Interpolation zur Verfügung haben, aber Polynome Q_i vom Grad $m + 1$ bräuchten.

LEMMA 4.1. (*Kollokationsbedingungen ‘mit linkem Punkt’ in Integralschreibweise*) Die stückweise polynomiale Lösung $Q(t)$ aus (4.8) erfüllt in den Punkten $t_{i,j}$, ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots m$) die Bedingungen:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{Q_i(t_{i,j}) - Q_i(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} &= \sum_{k=0}^n \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, Q_i(t_{i,k})), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots m, \\ Q_i(\tau_i) &= Q_{i+1}(\tau_i), \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ B_a Q_0(0) + B_b Q_{N-1}(1) &= \beta. \end{aligned}$$

(Dabei bezeichnen die $\alpha_{j,k}$ wieder die Quadraturkoeffizienten gemäß Lemma 1.2, vgl. Anmerkung in Lemma 2.2.)

Anmerkung: Die ‘modifizierten’ Kollokationsbedingungen entsprechen einem Runge Kutta Verfahren von einem ‘Lobatto’ Typus.

BEWEIS. Für die Lösung $Q(t)$ von (4.8) ergibt lokale Integration aufgrund von Lemma 1.2:

$$(4.11) \quad \frac{Q_i(t_{i,j}) - Q_i(t_{i,j-1})}{\delta_{i,j}} = \int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} Q'_i(t) dt = \sum_{k=0}^m \alpha_{j,k} Q'_i(t_k) = \sum_{k=0}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, Q_i(t_{i,k}))$$

($i = 1 \dots N, j = 1 \dots m$). Daher ist $Q(t)$ auch eine Lösung der Gleichungen (4.10). \square

Ein ‘modifiziertes’ Fixpunktpolynom kann durch eine zusätzliche Hermite-Interpolation im Punkt $t_{i,0}$ (oder einem anderen Punkt) errechnet werden, also: Wir haben das ‘klassische’ Fixpunktpolynom $q_i(t)$, und gewinnen das modifizierte $Q_i(t)$ vom Grad $m + 1$ durch die $m + 2$ Interpolationsbedingungen:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} Q_i(t_{i,j}) &= q_i(t_{i,j}), \quad j = 0 \dots m \\ Q'_i(t_{i,0}) &= F(t_{i,0}, q_i(t_{i,0})). \end{aligned}$$

Mit (4.9) kann man dann für so ein Q , das durch unsere Variante mit linkem Punkt entsteht, auch

$$(4.13) \quad \|Q'(t) - z'(t)\|_{\infty} = O(\mathbf{h}^{m+1})$$

(vgl. (3.10)) beweisen.

Teil 2

Praktischer Teil

Dieser Teil enthält einige numerische Ergebnisse, die mit MATLAB errechnet wurden.

5. Notation, Details der Umsetzung

5.1. Programmaufruf und Parameter: Die MATLAB-Funktion

```
tex_ausgabe(file,rwp,verfahren,gitterart,grobanz,feinanz,  
            grobvar,feinvar,dk_it_start,dk_it,verfein_it,start_t);
```

liefert den Latex Sourcecode für sogenannte Ordnungstabellen. Sie benötigt folgende Parameter:

- *file*: Der Name der ‘.tex’-Datei in die der Latex-Source geschrieben werden soll z.B. ‘Tabelle.tex’.
- *rwp*: Der Name des zu testenden Rand- oder Anfangswertproblems z.B. ‘l2drwp’. Hier muss eine entsprechende ‘.m’-Datei für MATLAB zu finden sein, unser Beispiel entspricht (6.2).
- *verfahren*: Der Name der MATLAB-Datei, die die durchzuführende Variante der Defektkorrektur enthält.
- *gitterart* Der Dateiname der Funktion für die Konstruktion des zugrundegelegten Gitters. Zur Zeit stehen dafür ‘zf_gitter’, ‘sym_zf_gitter’ und ‘gauss’ zur Verfügung. ‘zf_gitter.m’ ist für die Erzeugung von Zufallsgittern zuständig, ‘sym_zf_gitter.m’ erzeugt lokal symmetrische Zufallsknoten, und ‘Gauss.m’ erzeugt lokal gesehen Gauß-Knoten. Mit ‘lokal’ ist gemeint, dass die $t_{i,j}$ für jedes i innerhalb der $j = 1..m$ (vgl. 1.2) symmetrisch bzw. wie Gauß-Knoten verteilt sind. Die nächsten 4 Parameter beziehen sich ebenfalls auf die Gitterstruktur.
- *grobanz*: Der erste gibt die Anzahl der sogenannten ‘mesh-points’ an, bevor mit dem ‘verfeinern’ zur Ermittlung der Verfahrensordnung begonnen wird, entspricht das außerdem dem N aus 1.2 Die Werte an diesen ‘mesh-points’, in der Ausgabe-Tabelle als T_i bezeichnet, werden errechnet und ausgegeben.
- *feinanz*: Es folgt der Parameter, der dem m aus 1.2 entspricht, also unter anderem den Polynomgrad des für die Defektkorrektur benutzten Polynoms festlegt.
- *grobvar*: Die nächsten beiden Parameter entsprechen in ihrem Produkt dem K aus (1.11), wobei der erste die Bedingungen $\frac{\max(h_i)}{\min(h_i)} \leq grobvar$, bzw. $\frac{\max(T_i - T_{i-1})}{\min(T_i - T_{i-1})} \leq grobvar$ fordert. Dieser ist von untergeordneter Bedeutung, da die τ_i durch das ‘verfeinern’ ohnehin bald ‘blockweise’ äquidistant werden. Wollte man die Zufallsverteilung der τ_i verbessern müsste man bei jedem Verfeinerungsschritt lokal neue $grobvar_i$ für alle i berechnen, und dann unter diesen Bedingungen die Intervalle ‘zufällig’ teilen. Dies wurde nicht durchgeführt.
- *feinvar*: Der andere Parameter fordert die Bedingung $\frac{\max_j(\delta_{i,j})}{\min_j(\delta_{i,j})} \leq feinvar$ für alle i . Dieser Parameter in Verbindung mit ‘gauss’ als ‘gitterart’ wird naheliegenderweise ignoriert. Die nächsten beiden Parameter geben an, welche Iterationsschritte ausgegeben werden sollen, konkret gibt
- *dk_it_start* den ersten Iterationsschritt an, wobei man 0 angibt, wenn auch das Basisverfahren ausgegeben werden soll.
- *dk_it* gibt an, wieviele Iterationsschritte aufsteigend, von *dk_it_start* weg, ausgegeben werden sollen.
- *verfein.it* bestimmt, wie oft das Gitter ‘verfeinert’ und die Ordnung errechnet werden soll, und ist damit auch maßgeblich für die Spaltenanzahl und damit die Breite der Ausgabetablelle.

- *start_t*: Der letzte Parameter gibt lediglich das kleinste (erste) i von den T_i an, das ausgegeben werden soll. Dies wird normalerweise 0 sein, aber bei Anfangswertproblemen macht es z.B. keinen Sinn den Fehler im Anfangswert zu errechnen.

Durch geeignete Wahl der letzten 4 Parameter kann man jetzt jedenfalls die Größe der Tabellen unabhängig von der gewünschten Feinheit des Gitters wählen.

5.2. Der Programmablauf. Nach Aufruf obiger Programmzeile wird als erstes die Gitterstruktur erzeugt. Wir konstruieren m paarweise voneinander verschiedene und aufsteigend sortierte Gitterpunkte im Intervall $(0, 1]$: ϑ_j , ($j = 1 \dots m$). Für diese gilt $\vartheta_m = 1$ und außerdem wird die Bedingung $\frac{\max_j(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})}{\min_j(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})} \leq \kappa$ erfüllt, wobei κ der Eingangsparameter *feinvar* ist. Weiters konstruieren wir die τ_i bzw. T_i die zu diesem Zeitpunkt die gleichen Werte annehmen, aber natürlich auch ihre Gitterbedingung erfüllen müssen. Die $t_{i,j}$ (vgl. 1.2) ergeben sich jetzt nach folgendem Schema:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} t_{i,j} &= \tau_{i-1} + h_i \vartheta_j, \\ \delta_{i,j} &= h_i (\vartheta_j - \vartheta_{j-1}), \\ &\text{jeweils mit } i = 1 \dots N, j = 1 \dots m. \end{aligned}$$

Wir verwenden folgende Notation: $L_{k,t_{i,1\dots m}}(t)$ sei das k -te Lagrangepolynom (vgl. Lemma 1.1) zu den Punkten $t_{i,1} \dots t_{i,m}$.

Für die ϑ_j bilden wir jetzt durch Interpolation die $L_{k,\vartheta_{1\dots m}}(t)$, $k = 1 \dots m$ und die $L_{k,\vartheta_{0\dots m}}(t)$, $k = 0 \dots m$, sowie deren Ableitungen und Integrale. Es gilt nämlich:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} L_{k,t_{i,1\dots m}}(t) &= L_{k,\vartheta_{1\dots m}}(t), & L_{k,t_{i,0\dots m}}(t) &= L_{k,\vartheta_{0\dots m}}(t), \\ L'_{k,t_{i,1\dots m}}(t) &= \frac{L'_{k,\vartheta_{1\dots m}}(t)}{h_i}, & L'_{k,t_{i,0\dots m}}(t) &= \frac{L'_{k,\vartheta_{0\dots m}}(t)}{h_i}, \\ \int_{t_{i,a}}^{t_{i,b}} L_{k,t_{i,1\dots m}}(t) dt &= h_i \int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} L_{k,\vartheta_{1\dots m}}(t) dt, \\ \int_{t_{i,a}}^{t_{i,b}} L_{k,t_{i,0\dots m}}(t) dt &= h_i \int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} L_{k,\vartheta_{0\dots m}}(t) dt. \end{aligned}$$

Damit sind wir in der Lage, ohne weitere Interpolation auf beliebig verfeinerten Gittern jede Variante der Defektkorrektur durchzuführen.

Wir wollen jetzt Schätzungen für die Verfahrensordnung unseres n -schrittigen Verfahrens errechnen. Dazu definieren wir: Sei v der aktuelle Verfeinerungsschritt. Dieser ist anfangs 0 und wird beim Verfeinern des Gitters um 1 erhöht. Sei \mathbf{h}_v das zugehörige \mathbf{h} . Das schreiben wir jetzt als oberen Index für jene Größen an, die davon abhängen.

In jedem Verfeinerungsschritt v wird jetzt folgendes berechnet:

- Es wird mit dem angegebenen Verfahren und der gewünschten Iterationstiefe (n , beim ersten Durchlauf entspricht diese dem Parameter *start_it*) eine Näherungslösung $(\eta_{i,j}^{(n,\mathbf{h}_v)})$ des angegebenen Randwertproblems errechnet.
- Folgende Fehlerschätzungen werden berechnet.

$$(5.3) \quad \hat{e}_{\Delta^m}^{(n,\mathbf{h}_v)} := \|\eta_{\Delta^m}^{(n,\mathbf{h}_v)} - R_{\Delta^m}(z)\|_2$$

$$(5.4) \quad \hat{e}^{(n,\mathbf{h}_v)} := \|\hat{e}_{\Delta}^{(n,\mathbf{h}_v)}\|_{\Delta}$$

$$(5.5) \quad \hat{E}^{(n,\mathbf{h}_v)} := \|\hat{e}_{\Delta^m}^{(n,\mathbf{h}_v)}\|_{\Delta^m}$$

- Ab dem ersten Verfeinerungsschritt ($v \geq 1$) gewinnen wir dann mit der Annahme $2\mathbf{h}_v = \mathbf{h}_{v-1}$ und dem Ansatz (wir schreiben C für $C_{\Delta_m}^{(n,v)}$ und p für $p_{\Delta_m}^{(n,v)}$):

$$(5.6) \quad \hat{e}_{\Delta_m}^{(n,\mathbf{h}_v)} = C\mathbf{h}_v^p, \quad \hat{e}_{\Delta_m}^{(n,\mathbf{h}_{v-1})} = C(2\mathbf{h}_v)^p$$

die Formel:

$$(5.7) \quad p_{\Delta_m}^{(n,v)} = \log_2(\hat{e}_{\Delta_m}^{(n,\mathbf{h}_{v-1})}) - \log_2(\hat{e}_{\Delta_m}^{(n,\mathbf{h}_v)})$$

$p_{\Delta_m}^{(n,v)}$ ist zwar die zum Verfeinerungsschritt v gehörende Schätzung, wir nehmen aber für (5.6) an, dass die Verfahrensordnung p Gitter-unabhängig ist. Mit zu (5.6) analogen Ansätzen errechnen wir auch Schätzungen für die Ordnungen bezüglich (5.4) ($p^{(n,v)}$) und (5.5) ($P^{(n,v)}$):

$$(5.8) \quad p^{(n,v)} = \log_2(\hat{e}^{(n,\mathbf{h}_{v-1})}) - \log_2(\hat{e}^{(n,\mathbf{h}_v)}),$$

$$(5.9) \quad P^{(n,v)} = \log_2(\hat{E}^{(n,\mathbf{h}_{v-1})}) - \log_2(\hat{E}^{(n,\mathbf{h}_v)})$$

- Jetzt müssen wir noch das Gitter verfeinern, um in den nächsten Verfeinerungsschritt v zu kommen. Dazu wird genau in die Mitte zwischen je 2 τ ein neues τ eingefügt. In dieses neue grobe Gitter werden jetzt wieder gemäß (5.1) die unveränderten ϑ eingefügt. Die Anzahl der $t_{i,j}$ hat sich somit genau verdoppelt.

5.3. Die Ausgabe: Wie in 5.1 bereits erwähnt, wird L^AT_EX-Code erzeugt. Dieser kann mit dem `\input`-Befehl in eine umfassende Datei eingebunden werden. Eine so entstandene Tabelle liest sich wie folgt:

- Die Tabellenüberschrift besteht im Normalfall nur aus ‘Tabelle Nr.’. Das dient zum Vergleich mit dem
- Tabellenverzeichnis, das mit dem Befehl `\listoftables` automatisch generiert wird. Auch darin sind die grundlegenden Tabellendaten aufgelistet.
- In der ersten Zeile des Tabellenkopfes steht der Name des benützten Verfahrens und ein Verweis (als `\label` dient dabei der Name der entsprechenden MATLAB-Funktion.)
- Es folgt eine Kurzbeschreibung des getesteten Anfang- oder Randwertproblems, wieder mit Verweis darauf.
- In der dritten Kopfzeile findet sich eine Zeichnung, die die lokale Struktur des zugrundeliegenden Gitters darstellt. Die eingezeichneten Punkte sind die $\vartheta_{1\dots m}$ aus (5.1).
- Ab hier ist die Tabelle in Blöcke eingeteilt, wobei innerhalb eines Blockes jeweils ein bestimmter Iterationsschritt (n) des Verfahrens (vgl.(3.2)), was in der Kopfzeile jedes Blockes zu lesen ist.
- Es folgt die Einteilung in Spalten, wobei die jeweiligen Spalten den Verfeinerungsschritten entsprechen. Diese sind durch die Gesamtanzahl der $t_{i,j}$ gekennzeichnet, Die mit ‘Punkte:’ beschriftete Zeile gibt diese Anzahl an.
- Es folgt die Beschriftung der Spaltenfeineinteilung, je nachdem ob darunter der Fehler ‘ $\|\eta_{T_i} - y(T_i)\|$ ’ vgl. (5.3) - (5.5) oder die Fehlerordnung ‘ p ’ vgl. (5.7) - (5.9) zu lesen ist.
- Die nächsten Zeilen geben dann den Fehler bzw. die Fehlerordnung an konkreten Punkten, den T_i wie in der ganz linken Spalte angeführt an: In den anderen Spalten steht also dann: $\hat{e}_{T_i}^{(n,v)}$ bzw. $p_{T_i}^{(n,v)}$.
- In der vorletzten Spalte jedes Blocks finden sich dann noch die $\hat{e}^{(n,v)}$ vgl. (5.4), bzw. $p^{(n,v)}$, vgl. (5.8),
- und in der letzten Spalte natürlich noch die $\hat{E}^{(n,v)}$, vgl. (5.5) bzw. $P^{(n,v)}$, vgl. (5.9).

6. Betrachtete Anfangs- und Randwertprobleme

Dieser Abschnitt enthält eine Auflistung aller getesteten Anfangs- und Randwertprobleme, die Beispieltabellen referenzieren dann darauf.

Zuerst ein ganz einfaches Problem:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} y' &= -y, \\ y(0) + y(1) &= 1 + \frac{1}{e} \\ \text{mit der Lösung: } y &= e^{-t} \end{aligned}$$

Weiters ein einfaches zweidimensionales, lineares und reguläres Randwertproblem. Wenn diese Eigenschaften erwünscht waren, wurde in erster Linie folgendes verwendet.

$$(6.2) \quad \begin{aligned} y' &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} (\pi - t) \cos(\pi t) - \sin(\pi t) \\ -(\pi + t^2) \sin(\pi t) \end{pmatrix}, \\ y(0) + y(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \text{mit der Lösung: } y &= \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine kleine Modifikation führt zu einem zweidimensionalen, linearen und regulären Randwertproblem mit oszillierender Lösung. Das hat den Vorteil, dass man durch Wahl des Parameters k die Glattheit der Lösung und damit die Größe der Fehler der Näherungslösungen steuern kann. So kann man den Bereichen ausweichen, in denen der Rundungsfehler dominiert.

$$(6.3) \quad \begin{aligned} y' &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} (k\pi - t) \cos(k\pi t) - \sin(k\pi t) \\ -(k\pi + t^2) \sin(k\pi t) \end{pmatrix}, \\ y(0) + y(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 2(k \bmod 2) \end{pmatrix}, \\ \text{mit der Lösung: } y &= \begin{pmatrix} \sin(k\pi t) \\ \cos(k\pi t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(6.4) \quad \text{mit } k = 4$$

$$(6.5) \quad \text{mit } k = 8$$

$$(6.6) \quad \text{oder mit } k = 15$$

Es folgt ein weiteres zweidimensionales, lineares und reguläres Randwertproblem, mit komplizierterem Aufbau, um möglichst kein 'Spezialfall' zu sein.

$$(6.7) \quad y' = \begin{pmatrix} \ln(1+t) & \arcsin(t) \\ e^{-t^2} & \sqrt{\sin(t)} \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} \ln(t+1) \cos(10t^2) + \arcsin(t) \ln(t^2+1) + 20t \sin(10t^2) \\ e^{-t^2} \cos(10t^2) + \sqrt{\sin(t)} \ln(t^2+1) - \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix},$$

$$y(0) + y(1) = \begin{pmatrix} \cos(10) + 1 \\ \ln(2) \end{pmatrix},$$

mit $k = 8$.

$$\text{und der Lösung: } y = \begin{pmatrix} \cos(10t^2) \\ \ln(t^2+1) \end{pmatrix}$$

Dann noch ein eindimensionales, reguläres, aber nichtlineares Randwertproblem:

$$(6.8) \quad y' = \sin(y) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$$

mit: $y(0) + y(1) = \arcsin(\frac{1}{2})$

und der Lösung: $y = \arcsin(\frac{t}{2})$

Das nächste lineare zweidimensionale und reguläre Anfangswertproblem ist ‘steif’, das heißt, die Matrix A aus $y' = Ay + g$ hat zumindest einen stark negativen Eigenwert (λ). Durch die Wahl des Parameters λ kann man die Steifheit steuern.

$$(6.9) \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi t) + \sin(\pi t) \\ -\pi \sin(\pi t) + \lambda \cos(\pi t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mit der Lösung: $y = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix}$

Dabei wurden mehrere Werte für λ verwendet:

$$(6.10) \quad \lambda = 10,$$

$$(6.11) \quad \lambda = 100,$$

$$(6.12) \quad \lambda = 1000$$

$$(6.13) \quad \text{oder: } \lambda = 100000$$

7. Die Differentialvariante auf Euler-Basis

Wie in Abschnitt 2.2 ist die klassische Art die Defektkorrektur durchzuführen folgende:

$$(7.1) \quad \hat{d}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}) := p'_i(t_{i,j}) - F(t_{i,j}, \eta(t_{i,j}))$$

Damit führen wir analog zu (3.1)–(3.3) die Defektkorrekturiteration durch. $\eta_{\Delta^m}^{(0)}$ sei wieder, unter Berücksichtigung der Randbedingungen, durch das implizite Eulerverfahren gewonnen:

$$(7.2) \quad \frac{\eta_{i,j}^{(0)} - \eta_{i,j-1}^{(0)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(0)}).$$

Für $n \geq 1$ ist die n -te Näherungslösung wieder durch folgende Rekursion definiert:

$$(7.3) \quad \eta_{\Delta^m}^{(n+1)} := \eta_{\Delta^m}^{(0)} - (\pi_{\Delta^m}^{(n)} - \eta_{\Delta^m}^{(n)}),$$

wobei die $\pi_{\Delta^m}^{(n)}$ durch Lösung von

$$(7.4) \quad \frac{\pi_{i,j}^{(n)} - \pi_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \pi_{i,j}^{(n)}) + \hat{d}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)})$$

gewonnen werden, mit dem Defekt: vgl. (2.14)

$$(7.5) \quad \hat{d}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)}) := p'_i(t_{i,j}) - F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(n)})$$

wobei die $p_i(t)$ wieder durch Interpolation der $t_{i,j}$ gewonnen werden.

7.1. Äquidistantes Gitter: Wir fangen ganz einfach an, zuerst mit Polynomgrad $m = 5$:

Tabelle 1:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
Primitives Randwertproblem (6.1)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.5438e-003	3.3161e-003	0.98	1.6694e-003	0.99	8.3756e-004	1.00	4.1950e-004	1.00
$T_1=0.2500$	4.0183e-004	1.9295e-004	1.06	9.4375e-005	1.03	4.6648e-005	1.02	2.3187e-005	1.01
$T_2=0.5000$	3.3653e-003	1.7165e-003	0.97	8.6700e-004	0.99	4.3571e-004	0.99	2.1841e-004	1.00
$T_3=0.7500$	5.5029e-003	2.7952e-003	0.98	1.4088e-003	0.99	7.0725e-004	0.99	3.5434e-004	1.00
$T_4=1.0000$	6.5438e-003	3.3161e-003	0.98	1.6694e-003	0.99	8.3756e-004	1.00	4.1950e-004	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.5438e-003	3.3161e-003	0.98	1.6694e-003	0.99	8.3756e-004	1.00	4.1950e-004	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.5438e-003	3.3161e-003	0.98	1.6694e-003	0.99	8.3756e-004	1.00	4.1950e-004	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.7718e-004	7.1746e-005	1.95	1.8256e-005	1.97	4.6046e-006	1.99	1.1563e-006	1.99
$T_1=0.2500$	2.3752e-005	6.6025e-006	1.85	1.7396e-006	1.92	4.4640e-007	1.96	1.1306e-007	1.98
$T_2=0.5000$	1.8506e-004	4.8352e-005	1.94	1.2362e-005	1.97	3.1256e-006	1.98	7.8586e-007	1.99
$T_3=0.7500$	2.5802e-004	6.7038e-005	1.94	1.7091e-005	1.97	4.3150e-006	1.99	1.0841e-006	1.99
$T_4=1.0000$	2.7718e-004	7.1746e-005	1.95	1.8256e-005	1.97	4.6046e-006	1.99	1.1563e-006	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.7718e-004	7.1746e-005	1.95	1.8256e-005	1.97	4.6046e-006	1.99	1.1564e-006	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.7718e-004	7.1746e-005	1.95	1.8256e-005	1.97	4.6049e-006	1.99	1.1564e-006	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5058e-005	1.9988e-006	2.91	2.5758e-007	2.96	3.2682e-008	2.98	4.0890e-009	3.00
$T_1=0.2500$	2.8002e-006	3.8898e-007	2.85	5.1279e-008	2.92	6.5843e-009	2.96	8.3559e-010	2.98
$T_2=0.5000$	1.1546e-005	1.5492e-006	2.90	2.0074e-007	2.95	2.5545e-008	2.97	3.2079e-009	2.99
$T_3=0.7500$	1.4845e-005	1.9794e-006	2.91	2.5567e-007	2.95	3.2480e-008	2.98	4.0704e-009	3.00
$T_4=1.0000$	1.5058e-005	1.9988e-006	2.91	2.5758e-007	2.96	3.2682e-008	2.98	4.0890e-009	3.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.5058e-005	2.0257e-006	2.89	2.6134e-007	2.95	3.3179e-008	2.98	4.1545e-009	3.00

$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.5233e-005	2.0257e-006	2.91	2.6134e-007	2.95	3.3179e-008	2.98	4.1548e-009	3.00
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.3887e-007	6.3889e-008	3.88	4.1716e-009	3.94	2.7106e-010	3.94	2.6607e-011	3.35
$T_1=0.2500$	2.4052e-007	1.7077e-008	3.82	1.1384e-009	3.91	7.2937e-011	3.96	4.2845e-012	4.09
$T_2=0.5000$	7.8246e-007	5.3914e-008	3.86	3.5418e-009	3.93	2.2912e-010	3.95	1.9645e-011	3.54
$T_3=0.7500$	9.5878e-007	6.5597e-008	3.87	4.2944e-009	3.93	2.7852e-010	3.95	2.5680e-011	3.44
$T_4=1.0000$	9.3887e-007	6.3889e-008	3.88	4.1716e-009	3.94	2.7106e-010	3.94	2.6607e-011	3.35
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	9.5878e-007	6.5887e-008	3.86	4.3234e-009	3.93	2.8049e-010	3.95	2.6687e-011	3.39
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	9.6741e-007	6.6090e-008	3.87	4.3236e-009	3.93	2.8049e-010	3.95	2.6687e-011	3.39
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.5877e-008	2.2999e-009	4.84	7.3315e-011	4.97	3.4412e-012	4.41	1.1683e-011	-1.76
$T_1=0.2500$	1.9451e-008	7.0860e-010	4.78	2.4088e-011	4.88	1.1150e-012	4.43	1.1025e-012	0.02
$T_2=0.5000$	5.7211e-008	2.0249e-009	4.82	6.5908e-011	4.94	8.6231e-013	6.26	5.5023e-012	-2.67
$T_3=0.7500$	6.8423e-008	2.4031e-009	4.83	7.7273e-011	4.96	2.2304e-012	5.11	9.5049e-012	-2.09
$T_4=1.0000$	6.5877e-008	2.2999e-009	4.84	7.3315e-011	4.97	3.4414e-012	4.41	1.1683e-011	-1.76
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.8423e-008	2.4031e-009	4.83	7.7273e-011	4.96	3.4414e-012	4.49	1.1683e-011	-1.76
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.0194e-008	2.4354e-009	4.85	7.7796e-011	4.97	3.4550e-012	4.49	1.1703e-011	-1.76
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.9267e-009	2.3496e-010	5.25	5.5649e-012	5.40	1.1897e-012	2.23	2.9223e-012	-1.30
$T_1=0.2500$	1.3178e-009	2.0701e-011	5.99	2.2549e-013	6.52	8.1046e-014	1.48	3.8014e-013	-2.23
$T_2=0.5000$	6.4266e-009	1.5544e-010	5.37	3.4031e-012	5.51	4.0945e-013	3.06	1.4940e-012	-1.87
$T_3=0.7500$	8.5224e-009	2.1670e-010	5.30	4.9138e-012	5.46	1.0025e-012	2.29	2.5259e-012	-1.33
$T_4=1.0000$	8.9267e-009	2.3496e-010	5.25	5.5648e-012	5.40	1.1899e-012	2.23	2.9220e-012	-1.30
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.9267e-009	2.3496e-010	5.25	5.5649e-012	5.40	1.2201e-012	2.19	2.9270e-012	-1.26
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0305e-008	2.5579e-010	5.33	5.8464e-012	5.45	1.2447e-012	2.23	2.9621e-012	-1.25
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.1496e-009	1.6482e-010	4.97	4.7101e-012	5.13	1.1458e-012	2.04	2.6268e-012	-1.20
$T_1=0.2500$	1.4203e-010	7.5320e-012	4.24	1.2801e-013	5.88	5.8731e-014	1.12	1.0703e-013	-0.87
$T_2=0.5000$	2.8201e-009	8.7109e-011	5.02	2.6436e-012	5.04	7.1365e-013	1.89	1.4175e-012	-0.99
$T_3=0.7500$	4.4258e-009	1.3994e-010	4.98	4.0598e-012	5.11	9.3575e-013	2.12	2.0935e-012	-1.16
$T_4=1.0000$	5.1496e-009	1.6482e-010	4.97	4.7101e-012	5.13	1.1459e-012	2.04	2.6263e-012	-1.20
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.1496e-009	1.6482e-010	4.97	4.7101e-012	5.13	1.1459e-012	2.04	2.6268e-012	-1.20
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.2405e-009	1.8196e-010	5.10	5.0373e-012	5.17	1.2079e-012	2.06	2.7107e-012	-1.17

und mit Polynomgrad $m = 6$:

Tabelle 2:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)

Primitives Randwertproblem (6.1)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	24	48			96		192		384
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.4775e-003	2.7697e-003	0.98	1.3927e-003	0.99	6.9836e-004	1.00	3.4968e-004	1.00
$T_1=0.2500$	3.3054e-004	1.5964e-004	1.05	7.8348e-005	1.03	3.8798e-005	1.01	1.9304e-005	1.01
$T_2=0.5000$	2.8230e-003	1.4353e-003	0.98	7.2372e-004	0.99	3.6340e-004	0.99	1.8209e-004	1.00
$T_3=0.7500$	4.6098e-003	2.3355e-003	0.98	1.1756e-003	0.99	5.8977e-004	1.00	2.9538e-004	1.00
$T_4=1.0000$	5.4775e-003	2.7697e-003	0.98	1.3927e-003	0.99	6.9836e-004	1.00	3.4968e-004	1.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	5.4775e-003	2.7697e-003	0.98	1.3927e-003	0.99	6.9836e-004	1.00	3.4968e-004	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.4775e-003	2.7697e-003	0.98	1.3927e-003	0.99	6.9836e-004	1.00	3.4968e-004	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	24	48			96		192		384
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9472e-004	5.0116e-005	1.96	1.2715e-005	1.98	3.2025e-006	1.99	8.0375e-007	1.99
$T_1=0.2500$	1.7091e-005	4.6662e-006	1.87	1.2186e-006	1.94	3.1135e-007	1.97	7.8676e-008	1.98
$T_2=0.5000$	1.3040e-004	3.3829e-005	1.95	8.6171e-006	1.97	2.1747e-006	1.99	5.4634e-007	1.99
$T_3=0.7500$	1.8148e-004	4.6858e-005	1.95	1.1907e-005	1.98	3.0015e-006	1.99	7.5361e-007	1.99
$T_4=1.0000$	1.9472e-004	5.0116e-005	1.96	1.2715e-005	1.98	3.2025e-006	1.99	8.0375e-007	1.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9472e-004	5.0116e-005	1.96	1.2715e-005	1.98	3.2025e-006	1.99	8.0380e-007	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.9472e-004	5.0116e-005	1.96	1.2716e-005	1.98	3.2027e-006	1.99	8.0382e-007	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	24	48			96		192		384
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.8900e-006	1.1685e-006	2.93	1.4979e-007	2.96	1.8886e-008	2.99	2.2189e-009	3.09
$T_1=0.2500$	1.6782e-006	2.2912e-007	2.87	2.9944e-008	2.94	3.8334e-009	2.97	4.9473e-010	2.95
$T_2=0.5000$	6.8405e-006	9.0731e-007	2.91	1.1686e-007	2.96	1.4789e-008	2.98	1.7800e-009	3.05
$T_3=0.7500$	8.7770e-006	1.1580e-006	2.92	1.4874e-007	2.96	1.8785e-008	2.99	2.2317e-009	3.07
$T_4=1.0000$	8.8900e-006	1.1685e-006	2.93	1.4979e-007	2.96	1.8886e-008	2.99	2.2189e-009	3.09
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	8.8900e-006	1.1847e-006	2.91	1.5201e-007	2.96	1.9181e-008	2.99	2.2672e-009	3.08
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9965e-006	1.1847e-006	2.92	1.5201e-007	2.96	1.9183e-008	2.99	2.2712e-009	3.08
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	24	48			96		192		384
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6369e-007	3.1216e-008	3.89	2.0901e-009	3.90	2.6558e-010	2.98	2.8133e-010	-0.08
$T_1=0.2500$	1.2114e-007	8.4156e-009	3.85	5.5262e-010	3.93	2.8098e-011	4.30	1.2498e-011	1.17
$T_2=0.5000$	3.8870e-007	2.6411e-008	3.88	1.7568e-009	3.91	1.8041e-010	3.28	1.5109e-010	0.26
$T_3=0.7500$	4.7474e-007	3.2087e-008	3.89	2.1408e-009	3.91	2.4703e-010	3.12	2.3988e-010	0.04
$T_4=1.0000$	4.6369e-007	3.1216e-008	3.89	2.0901e-009	3.90	2.6558e-010	2.98	2.8133e-010	-0.08
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.7474e-007	3.2210e-008	3.88	2.1576e-009	3.90	2.6558e-010	3.02	2.8133e-010	-0.08
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7878e-007	3.2313e-008	3.89	2.1581e-009	3.90	2.6558e-010	3.02	2.8133e-010	-0.08
Iterationsschritt 4:									

Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	2.6333e-008	9.0088e-010	4.87	1.8338e-011	5.62	2.2282e-011	-0.28	4.7095e-011	-1.08						
$T_1=0.2500$	8.2788e-009	2.9529e-010	4.81	9.0141e-012	5.03	6.2494e-013	3.85	1.6920e-012	-1.44						
$T_2=0.5000$	2.3361e-008	8.0980e-010	4.85	1.9060e-011	5.41	1.1044e-011	0.79	2.4553e-011	-1.15						
$T_3=0.7500$	2.7621e-008	9.5050e-010	4.86	2.0742e-011	5.52	1.8425e-011	0.17	3.9768e-011	-1.11						
$T_4=1.0000$	2.6333e-008	9.0088e-010	4.87	1.8338e-011	5.62	2.2282e-011	-0.28	4.7095e-011	-1.08						
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.7621e-008	9.5050e-010	4.86	2.1196e-011	5.49	2.2282e-011	-0.07	4.7095e-011	-1.08						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.7703e-008	9.5325e-010	4.86	2.2972e-011	5.37	2.4484e-011	-0.09	4.9226e-011	-1.01						
Iterationsschritt 5:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.6236e-009	3.7271e-011	5.45	2.0288e-011	0.88	4.0084e-011	-0.98	7.9588e-011	-0.99						
$T_1=0.2500$	5.5914e-010	8.8615e-012	5.98	4.4598e-013	4.31	1.0358e-012	-1.22	2.3236e-012	-1.17						
$T_2=0.5000$	1.4827e-009	3.1175e-011	5.57	1.3013e-011	1.26	1.9933e-011	-0.62	4.3481e-011	-1.13						
$T_3=0.7500$	1.7234e-009	3.8012e-011	5.50	1.8329e-011	1.05	3.4641e-011	-0.92	6.8587e-011	-0.99						
$T_4=1.0000$	1.6236e-009	3.7271e-011	5.45	2.0288e-011	0.88	4.0084e-011	-0.98	7.9589e-011	-0.99						
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.7234e-009	3.8502e-011	5.48	2.0288e-011	0.92	4.0084e-011	-0.98	7.9589e-011	-0.99						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7455e-009	3.8560e-011	5.50	2.0288e-011	0.93	4.0084e-011	-0.98	7.9589e-011	-0.99						
Iterationsschritt 6:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.5588e-010	7.3432e-012	4.41	1.0054e-011	-0.45	1.5286e-011	-0.60	3.3084e-011	-1.11						
$T_1=0.2500$	3.5505e-011	4.1434e-013	6.42	9.0572e-013	-1.13	9.4791e-013	-0.07	1.9782e-012	-1.06						
$T_2=0.5000$	1.2326e-010	4.0976e-012	4.91	3.1226e-012	0.39	9.0898e-012	-1.54	1.6591e-011	-0.87						
$T_3=0.7500$	1.5450e-010	6.1124e-012	4.66	8.0141e-012	-0.39	1.1458e-011	-0.52	2.7836e-011	-1.28						
$T_4=1.0000$	1.5588e-010	7.3433e-012	4.41	1.0053e-011	-0.45	1.5286e-011	-0.60	3.3085e-011	-1.11						
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.5588e-010	7.3433e-012	4.41	1.0054e-011	-0.45	1.5286e-011	-0.60	3.3085e-011	-1.11						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7917e-010	7.3433e-012	4.61	1.0054e-011	-0.45	1.5286e-011	-0.60	3.3085e-011	-1.11						

Wir erkennen sofort, dass besonders die zweite Tabelle völlig unbrauchbar ist, da der Fehler so schnell im Rundungsfehlerbereich ist, dass die zu erwartende Fehlerordnung 6 nicht nachzuweisen ist. Daher noch einmal beide Beispiele mit einem Randwertproblem, bei dem der Verfahrensfehler nicht so schnell in den Rundungsfehlerbereich kommt.

Tabelle 3:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)															
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)															
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00						
$T_1=0.2500$	1.4814e-001	7.5872e-002	0.97	3.8336e-002	0.98	1.9265e-002	0.99	9.6565e-003	1.00						

$T_2=0.5000$	8.5821e-002	4.3598e-002	0.98	2.1942e-002	0.99	1.1005e-002	1.00	5.5105e-003	1.00
$T_3=0.7500$	5.8240e-002	2.8264e-002	1.04	1.3942e-002	1.02	6.9263e-003	1.01	3.4522e-003	1.00
$T_4=1.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0735e-001	5.2259e-001	-1.33	2.5936e-001	1.01	1.2923e-001	1.00	6.4509e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0106e+000	5.2259e-001	0.95	2.5936e-001	1.01	1.2934e-001	1.00	6.4606e-002	1.00

Iterationsschritt 1:

Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	5.6098e-001	1.7245e-002	5.02	3.1936e-003	2.43	6.8845e-004	2.21	1.5947e-004	2.11						
$T_1=0.2500$	3.3578e-001	1.6947e-002	4.31	3.4702e-003	2.29	7.8991e-004	2.14	1.8855e-004	2.07						
$T_2=0.5000$	1.1631e-001	1.1971e-002	3.28	2.6398e-003	2.18	6.2346e-004	2.08	1.5174e-004	2.04						
$T_3=0.7500$	1.8687e-001	1.6308e-003	6.84	5.0622e-004	1.69	1.4361e-004	1.82	3.8139e-005	1.91						
$T_4=1.0000$	5.6098e-001	1.7245e-002	5.02	3.1936e-003	2.43	6.8845e-004	2.21	1.5947e-004	2.11						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.6098e-001	1.3192e-001	2.09	3.4469e-002	1.94	8.7320e-003	1.98	2.2211e-003	1.98						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1109e+000	1.3689e-001	3.02	3.5098e-002	1.96	8.8513e-003	1.99	2.2235e-003	1.99						

Iterationsschritt 2:

Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	6.1075e-001	1.0239e-002	5.90	1.2965e-003	2.98	1.6202e-004	3.00	2.0280e-005	3.00						
$T_1=0.2500$	3.9731e-001	7.2412e-003	5.78	9.5334e-004	2.93	1.2072e-004	2.98	1.5198e-005	2.99						
$T_2=0.5000$	1.3742e-001	4.3298e-003	4.99	5.6594e-004	2.94	7.1736e-005	2.98	9.0356e-006	2.99						
$T_3=0.7500$	2.2308e-001	3.1160e-003	6.16	3.4535e-004	3.17	4.1215e-005	3.07	5.0527e-006	3.03						
$T_4=1.0000$	6.1075e-001	1.0239e-002	5.90	1.2965e-003	2.98	1.6202e-004	3.00	2.0280e-005	3.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.1075e-001	6.0352e-002	3.34	6.9666e-003	3.11	8.4645e-004	3.04	1.0461e-004	3.02						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1051e+000	6.1228e-002	4.17	6.9696e-003	3.14	8.5036e-004	3.03	1.0522e-004	3.01						

Iterationsschritt 3:

Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.4027e+000	7.6680e-004	10.84	3.3542e-006	7.84	1.3332e-006	1.33	1.1967e-007	3.48						
$T_1=0.2500$	9.6170e-001	5.3949e-004	10.80	3.7615e-005	3.84	2.8619e-006	3.72	1.9853e-007	3.85						
$T_2=0.5000$	4.4410e-001	1.0426e-003	8.73	4.9146e-005	4.41	3.0081e-006	4.03	1.9066e-007	3.98						
$T_3=0.7500$	3.0401e-001	1.0468e-003	8.18	3.4549e-005	4.92	1.6068e-006	4.43	8.6123e-008	4.22						
$T_4=1.0000$	1.4027e+000	7.6680e-004	10.84	3.3542e-006	7.84	1.3332e-006	1.33	1.1967e-007	3.48						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4027e+000	2.2233e-002	5.98	9.9416e-004	4.48	5.6868e-005	4.13	3.5241e-006	4.01						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4027e+000	2.2233e-002	5.98	9.9416e-004	4.48	5.8857e-005	4.08	3.5460e-006	4.05						

Iterationsschritt 4:

Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.2594e+000	3.3654e-003	8.55	7.5002e-005	5.49	2.1573e-006	5.12	6.5838e-008	5.03						
$T_1=0.2500$	6.2788e-001	2.4484e-003	8.00	5.5726e-005	5.46	1.6146e-006	5.11	4.9421e-008	5.03						
$T_2=0.5000$	2.3449e-001	1.3827e-003	7.41	3.2480e-005	5.41	9.5041e-007	5.09	2.9199e-008	5.02						
$T_3=0.7500$	6.7019e-001	8.7024e-004	9.59	1.8516e-005	5.55	5.2395e-007	5.14	1.5882e-008	5.04						
$T_4=1.0000$	1.2594e+000	3.3654e-003	8.55	7.5002e-005	5.49	2.1573e-006	5.12	6.5838e-008	5.03						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.2594e+000	1.7053e-002	6.21	3.8820e-004	5.46	1.1156e-005	5.12	3.3996e-007	5.04						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3202e+000	1.7053e-002	6.27	3.8820e-004	5.46	1.1156e-005	5.12	3.3996e-007	5.04						

Iterationsschritt 5:

Punkte:	20			40			80			160			320		
---------	----	--	--	----	--	--	----	--	--	-----	--	--	-----	--	--

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3384e+000	3.3166e-003	8.66	7.5455e-005	5.46	2.1882e-006	5.11	6.7026e-008	5.03
$T_1=0.2500$	7.0591e-001	2.3457e-003	8.23	5.4480e-005	5.43	1.5918e-006	5.10	4.8910e-008	5.02
$T_2=0.5000$	2.4998e-001	1.2690e-003	7.62	3.0493e-005	5.38	9.0068e-007	5.08	2.7790e-008	5.02
$T_3=0.7500$	6.5194e-001	9.3246e-004	9.45	2.0271e-005	5.52	5.7769e-007	5.13	1.7559e-008	5.04
$T_4=1.0000$	1.3384e+000	3.3166e-003	8.66	7.5455e-005	5.46	2.1882e-006	5.11	6.7026e-008	5.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3384e+000	1.5820e-002	6.40	3.6907e-004	5.42	1.0707e-005	5.11	3.2734e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3384e+000	1.5820e-002	6.40	3.6907e-004	5.42	1.0707e-005	5.11	3.2734e-007	5.03

Iterationsschritt 6:

Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3270e+000	3.3245e-003	8.64	7.5517e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$T_1=0.2500$	6.9484e-001	2.3536e-003	8.21	5.4552e-005	5.43	1.5927e-006	5.10	4.8922e-008	5.02
$T_2=0.5000$	2.4240e-001	1.2751e-003	7.57	3.0546e-005	5.38	9.0132e-007	5.08	2.7798e-008	5.02
$T_3=0.7500$	6.5181e-001	9.3161e-004	9.45	2.0247e-005	5.52	5.7725e-007	5.13	1.7551e-008	5.04
$T_4=1.0000$	1.3270e+000	3.3245e-003	8.64	7.5517e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3270e+000	1.5912e-002	6.38	3.6979e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3270e+000	1.5912e-002	6.38	3.6979e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03

Tabelle 4:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$T_1=0.2500$	1.2452e-001	6.3453e-002	0.97	3.2001e-002	0.99	1.6068e-002	0.99	8.0504e-003	1.00
$T_2=0.5000$	7.1935e-002	3.6414e-002	0.98	1.8304e-002	0.99	9.1751e-003	1.00	4.5933e-003	1.00
$T_3=0.7500$	4.8032e-002	2.3445e-002	1.03	1.1593e-002	1.02	5.7658e-003	1.01	2.8754e-003	1.00
$T_4=1.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7348e-001	4.3438e-001	-1.32	2.1588e-001	1.01	1.0763e-001	1.00	5.3743e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8046e-001	4.3438e-001	1.02	2.1588e-001	1.01	1.0777e-001	1.00	5.3828e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6072e-001	1.0227e-002	3.97	2.0978e-003	2.29	4.6579e-004	2.17	1.0931e-004	2.09
$T_1=0.2500$	8.6479e-002	1.0600e-002	3.03	2.3259e-003	2.19	5.3988e-004	2.11	1.2993e-004	2.05
$T_2=0.5000$	3.6155e-002	7.8018e-003	2.21	1.7942e-003	2.12	4.2895e-004	2.06	1.0492e-004	2.03
$T_3=0.7500$	8.2259e-002	1.2688e-003	6.02	3.6988e-004	1.78	1.0187e-004	1.86	2.6752e-005	1.93
$T_4=1.0000$	1.6072e-001	1.0227e-002	3.97	2.0978e-003	2.29	4.6579e-004	2.17	1.0931e-004	2.09
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6072e-001	9.3887e-002	0.78	2.4063e-002	1.96	6.0767e-003	1.99	1.5436e-003	1.98

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.5499e-001	9.6238e-002	2.24	2.4410e-002	1.98	6.1544e-003	1.99	1.5452e-003	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.6773e-001	5.3681e-003	6.10	7.3686e-004	2.86	9.3414e-005	2.98	1.1729e-005	2.99
$T_1=0.2500$	1.8993e-001	3.8360e-003	5.63	5.4431e-004	2.82	6.9743e-005	2.96	8.7981e-006	2.99
$T_2=0.5000$	1.8710e-002	2.2908e-003	3.03	3.2337e-004	2.82	4.1456e-005	2.96	5.2313e-006	2.99
$T_3=0.7500$	1.9777e-001	1.5853e-003	6.96	1.9339e-004	3.04	2.3597e-005	3.03	2.9123e-006	3.02
$T_4=1.0000$	3.6773e-001	5.3681e-003	6.10	7.3686e-004	2.86	9.3414e-005	2.98	1.1729e-005	2.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.6773e-001	3.1302e-002	3.55	3.9295e-003	2.99	4.8611e-004	3.01	6.0382e-005	3.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.5780e-001	3.1302e-002	4.16	3.9295e-003	2.99	4.8826e-004	3.01	6.0765e-005	3.01
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.2747e-001	1.1577e-003	8.14	3.7835e-005	4.94	1.7292e-006	4.45	9.1297e-008	4.24
$T_1=0.2500$	1.7353e-001	1.0759e-003	7.33	4.1078e-005	4.71	2.0839e-006	4.30	1.1776e-007	4.15
$T_2=0.5000$	5.8239e-002	7.3265e-004	6.31	3.1390e-005	4.54	1.7026e-006	4.20	1.0005e-007	4.09
$T_3=0.7500$	1.5211e-001	8.5932e-005	10.79	6.2454e-006	3.78	4.7936e-007	3.70	3.2597e-008	3.88
$T_4=1.0000$	3.2747e-001	1.1577e-003	8.14	3.7835e-005	4.94	1.7292e-006	4.45	9.1297e-008	4.24
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.2747e-001	7.0452e-003	5.54	4.0798e-004	4.11	2.5946e-005	3.97	1.6618e-006	3.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.2709e-001	8.5194e-003	5.65	4.1804e-004	4.35	2.6441e-005	3.98	1.6618e-006	3.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.6851e-001	7.8010e-004	8.88	1.5681e-005	5.64	4.2675e-007	5.20	1.2638e-008	5.08
$T_1=0.2500$	1.9936e-001	6.3734e-004	8.29	1.2530e-005	5.67	3.3612e-007	5.22	9.8783e-009	5.09
$T_2=0.5000$	5.9558e-002	4.0216e-004	7.21	7.8053e-006	5.69	2.0792e-007	5.23	6.0966e-009	5.09
$T_3=0.7500$	1.9809e-001	1.3843e-004	10.48	2.9554e-006	5.55	8.5584e-008	5.11	2.6330e-009	5.02
$T_4=1.0000$	3.6851e-001	7.8010e-004	8.88	1.5681e-005	5.64	4.2675e-007	5.20	1.2638e-008	5.08
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.6851e-001	3.9618e-003	6.54	8.0354e-005	5.62	2.2347e-006	5.17	6.8650e-008	5.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.1230e-001	3.9618e-003	6.70	8.7405e-005	5.50	2.3393e-006	5.22	6.9066e-008	5.08
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.9470e-001	1.3284e-004	11.86	1.5057e-006	6.46	2.2611e-008	6.06	3.5367e-010	6.00
$T_1=0.2500$	3.3727e-001	1.7890e-004	10.88	1.9822e-006	6.50	2.8950e-008	6.10	4.4966e-010	6.01
$T_2=0.5000$	1.4068e-001	1.6074e-004	9.77	1.7509e-006	6.52	2.5080e-008	6.13	3.8636e-010	6.02
$T_3=0.7500$	1.4301e-001	6.3065e-005	11.15	6.5274e-007	6.59	8.7888e-009	6.21	1.3175e-010	6.06
$T_4=1.0000$	4.9470e-001	1.3284e-004	11.86	1.5057e-006	6.46	2.2611e-008	6.06	3.5367e-010	6.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.9470e-001	2.0939e-003	7.88	2.4331e-005	6.43	3.5598e-007	6.09	5.5686e-009	6.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.9470e-001	2.2411e-003	7.79	2.4924e-005	6.49	3.5744e-007	6.12	5.5724e-009	6.00
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6203e-001	1.8338e-004	11.30	2.0248e-006	6.50	2.9789e-008	6.09	4.5974e-010	6.02
$T_1=0.2500$	3.0754e-001	2.1701e-004	10.47	2.3968e-006	6.50	3.4800e-008	6.11	5.3277e-010	6.03

$T_2=0.5000$	1.1908e-001	1.8146e-004	9.36	1.9974e-006	6.51	2.8682e-008	6.12	4.3644e-010	6.04
$T_3=0.7500$	1.4248e-001	6.0892e-005	11.19	6.4058e-007	6.57	8.7381e-009	6.20	1.2971e-010	6.07
$T_4=1.0000$	4.6203e-001	1.8338e-004	11.30	2.0248e-006	6.50	2.9789e-008	6.09	4.5974e-010	6.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6203e-001	2.1093e-003	7.78	2.4358e-005	6.44	3.5582e-007	6.10	5.5048e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.6203e-001	2.2574e-003	7.68	2.5062e-005	6.49	3.5805e-007	6.13	5.5189e-009	6.02

Anmerkung: Im folgenden sprechen wir von ‘Ordnungsfolgen’. Damit ist die jeweilige Verfahrensordnung p vgl.(5.9) in Bezug zu den durchgeführten Iterationsschritten (n) vgl.(7.3) gemeint.

In den obigen Tabellen kann man jetzt die erwarteten Ordnungsfolgen 1, 2, 3, 4, 5, 5, ... bzw. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ablesen. Allgemein kann festgehalten werden, dass die Differentialvariante für einfache, reguläre und lineare Beispiele auf äquidistantem Gitter funktioniert, also obige Ordnungsfolgen zeigt.

Die Linearität des Randwertproblem spielt keine Rolle, wie folgende Beispiele mit nichtlinearem Randwertproblem zeigen:

Tabelle 5:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.4237e-003	1.5759e-003	1.12	7.5727e-004	1.06	3.7133e-004	1.03	1.8388e-004	1.01
$T_1=1.0000$	3.4237e-003	1.5759e-003	1.12	7.5727e-004	1.06	3.7133e-004	1.03	1.8388e-004	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4237e-003	1.5759e-003	1.12	8.5930e-004	0.87	4.2151e-004	1.03	2.0877e-004	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.8546e-003	1.7805e-003	1.11	8.5930e-004	1.05	4.2151e-004	1.03	2.0877e-004	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3090e-003	2.8326e-004	2.21	6.5956e-005	2.10	1.5920e-005	2.05	3.9112e-006	2.03
$T_1=1.0000$	1.3090e-003	2.8326e-004	2.21	6.5956e-005	2.10	1.5920e-005	2.05	3.9112e-006	2.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3090e-003	2.8326e-004	2.21	6.5956e-005	2.10	1.5920e-005	2.05	3.9114e-006	2.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3222e-003	2.8455e-004	2.22	6.6084e-005	2.11	1.5934e-005	2.05	3.9135e-006	2.03
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.0218e-004	3.9400e-005	3.35	4.3626e-006	3.17	5.1275e-007	3.09	6.2130e-008	3.04
$T_1=1.0000$	4.0218e-004	3.9400e-005	3.35	4.3626e-006	3.17	5.1275e-007	3.09	6.2130e-008	3.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.0218e-004	3.9400e-005	3.35	4.7415e-006	3.05	5.5666e-007	3.09	6.7410e-008	3.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.1652e-004	4.2630e-005	3.29	4.7415e-006	3.17	5.5666e-007	3.09	6.7410e-008	3.05
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	1.0907e-004	5.8414e-006	4.22	3.4022e-007	4.10	2.0466e-008	4.06	1.2523e-009	4.03
$T_1=1.0000$	1.0907e-004	5.8414e-006	4.22	3.4022e-007	4.10	2.0466e-008	4.06	1.2523e-009	4.03
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.0907e-004	5.8414e-006	4.22	3.6581e-007	4.00	2.2077e-008	4.05	1.3527e-009	4.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4866e-004	6.2645e-006	4.57	3.6678e-007	4.09	2.2094e-008	4.05	1.3532e-009	4.03
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.0244e-005	1.5039e-006	5.32	4.2353e-008	5.15	1.2482e-009	5.08	3.6671e-011	5.09
$T_1=1.0000$	6.0244e-005	1.5039e-006	5.32	4.2353e-008	5.15	1.2482e-009	5.08	3.6671e-011	5.09
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	6.0244e-005	1.5878e-006	5.25	4.8450e-008	5.03	1.4574e-009	5.05	4.3083e-011	5.08
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.0244e-005	1.5878e-006	5.25	4.8450e-008	5.03	1.4574e-009	5.05	4.3083e-011	5.08
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.3491e-005	7.4872e-007	4.97	2.2596e-008	5.05	6.8338e-010	5.05	2.0724e-011	5.04
$T_1=1.0000$	2.3491e-005	7.4872e-007	4.97	2.2596e-008	5.05	6.8338e-010	5.05	2.0724e-011	5.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	2.3491e-005	1.0185e-006	4.53	3.0060e-008	5.08	9.0233e-010	5.06	2.7397e-011	5.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3491e-005	1.0185e-006	4.53	3.0060e-008	5.08	9.0233e-010	5.06	2.7397e-011	5.04
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.6931e-005	7.8863e-007	5.09	2.3189e-008	5.09	6.9251e-010	5.07	2.0916e-011	5.05
$T_1=1.0000$	2.6931e-005	7.8863e-007	5.09	2.3189e-008	5.09	6.9251e-010	5.07	2.0916e-011	5.05
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	2.6931e-005	9.9323e-007	4.76	3.0057e-008	5.05	9.0441e-010	5.05	2.7453e-011	5.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6931e-005	9.9323e-007	4.76	3.0057e-008	5.05	9.0441e-010	5.05	2.7453e-011	5.04

Tabelle 6:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.7741e-003	1.2959e-003	1.10	6.2695e-004	1.05	3.0844e-004	1.02	1.5299e-004	1.01
$T_1=1.0000$	2.7741e-003	1.2959e-003	1.10	6.2695e-004	1.05	3.0844e-004	1.02	1.5299e-004	1.01
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	2.7741e-003	1.2959e-003	1.10	7.1151e-004	0.86	3.5015e-004	1.02	1.7370e-004	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1072e-003	1.4698e-003	1.08	7.1151e-004	1.05	3.5015e-004	1.02	1.7371e-004	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.6949e-004	1.9221e-004	2.18	4.5272e-005	2.09	1.0991e-005	2.04	2.7083e-006	2.02
$T_1=1.0000$	8.6949e-004	1.9221e-004	2.18	4.5272e-005	2.09	1.0991e-005	2.04	2.7083e-006	2.02

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.6949e-004	1.9221e-004	2.18	4.5272e-005	2.09	1.0991e-005	2.04	2.7083e-006	2.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.7510e-004	1.9292e-004	2.18	4.5342e-005	2.09	1.1001e-005	2.04	2.7098e-006	2.02
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.1367e-004	2.1958e-005	3.28	2.4763e-006	3.15	2.9377e-007	3.08	3.5758e-008	3.04
$T_1=1.0000$	2.1367e-004	2.1958e-005	3.28	2.4763e-006	3.15	2.9377e-007	3.08	3.5758e-008	3.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.1367e-004	2.1958e-005	3.28	2.6909e-006	3.03	3.1888e-007	3.08	3.8793e-008	3.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3289e-004	2.3903e-005	3.28	2.6909e-006	3.15	3.1888e-007	3.08	3.8793e-008	3.04
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.3858e-005	3.1434e-006	4.34	1.7320e-007	4.18	1.0118e-008	4.10	5.8608e-010	4.11
$T_1=1.0000$	6.3858e-005	3.1434e-006	4.34	1.7320e-007	4.18	1.0118e-008	4.10	5.8608e-010	4.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.3858e-005	3.1434e-006	4.34	1.8805e-007	4.06	1.0966e-008	4.10	6.3405e-010	4.11
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.3858e-005	3.4001e-006	4.23	1.8805e-007	4.18	1.0969e-008	4.10	6.3429e-010	4.11
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0220e-005	3.3871e-007	4.92	1.0768e-008	4.98	3.3320e-010	5.01	5.6773e-012	5.88
$T_1=1.0000$	1.0220e-005	3.3871e-007	4.92	1.0768e-008	4.98	3.3320e-010	5.01	5.6772e-012	5.88
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0220e-005	3.3871e-007	4.92	1.1996e-008	4.82	3.7330e-010	5.01	6.6689e-012	5.81
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.8825e-005	4.1877e-007	5.49	1.2198e-008	5.10	3.7504e-010	5.02	6.6689e-012	5.81
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.0078e-006	1.2402e-007	6.01	1.8776e-009	6.05	2.4311e-011	6.27	7.5155e-012	1.69
$T_1=1.0000$	8.0078e-006	1.2402e-007	6.01	1.8776e-009	6.05	2.4311e-011	6.27	7.5160e-012	1.69
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.0078e-006	1.3976e-007	5.84	2.2205e-009	5.98	3.0555e-011	6.18	8.2322e-012	1.89
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.4389e-006	1.3976e-007	5.92	2.2205e-009	5.98	3.0555e-011	6.18	8.3619e-012	1.87
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.9868e-006	9.1347e-008	6.03	1.3850e-009	6.04	1.9344e-011	6.16	2.3441e-012	3.04
$T_1=1.0000$	5.9868e-006	9.1347e-008	6.03	1.3850e-009	6.04	1.9345e-011	6.16	2.3440e-012	3.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.9868e-006	1.1643e-007	5.68	1.7687e-009	6.04	2.5050e-011	6.14	2.5402e-012	3.30
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.9868e-006	1.1643e-007	5.68	1.7687e-009	6.04	2.5050e-011	6.14	2.6108e-012	3.26

Das durch das implizite Euler-Verfahren anfallende nichtlineare Gleichungssystem wird durch Newton-Iteration gelöst, die so lange durchgeführt wird, bis das Residuum kleiner als 10^{-18} ist. Zusätzliche Unschärfen durch den Verfahrensfehler der Newtoniteration treten daher nicht auf.

Beim Ablesen der Ordnungsfolgen ist jetzt dennoch zu beachten, dass der ausgegebene Fehler noch größer als der durch die Maschinengenauigkeit entstehende Rundungsfehler ist. Dieser dürfte für das obige Beispiel etwa bei 10^{-12} liegen. Man liest also aus der am weitesten rechts

stehenden Spalte aus, bei der der errechnete Fehler echt größer als der Rundungsfehler ist.

7.2. Nicht äquidistante Gitter: Als nächstes wollen wir das Verhalten der Differentialvariante auf nicht äquidistanten Gitterstrukturen (wieder mit linearen Beispielen) untersuchen. Die ϑ vgl.(5.1) sind also jetzt zufällig auf dem Intervall verteilt, wobei $\frac{\max_j(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})}{\min_j(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})} \leq 10$ gilt. Die T_i sind weiterhin äquidistant verteilt, was aber wie erwähnt ohnehin keine Rolle spielt, da ‘äquidistant’ verfeinert wird. Es ergeben sich folgende Tabellen:

Tabelle 7:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.7921e-001	1.3458e-001	1.05	6.5199e-002	1.05	3.2085e-002	1.02	1.5917e-002	1.01
$T_1=1.0000$	2.7921e-001	1.3458e-001	1.05	6.5199e-002	1.05	3.2085e-002	1.02	1.5917e-002	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.7921e-001	1.3458e-001	1.05	7.2121e-002	0.90	3.6019e-002	1.00	1.7992e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.0160e-001	1.5079e-001	1.00	7.2121e-002	1.06	3.6024e-002	1.00	1.8017e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6678e-002	3.2104e-002	0.54	1.9353e-002	0.73	1.0491e-002	0.88	5.4560e-003	0.94
$T_1=1.0000$	4.6678e-002	3.2104e-002	0.54	1.9353e-002	0.73	1.0491e-002	0.88	5.4560e-003	0.94
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6678e-002	6.4133e-002	-0.46	2.6055e-002	1.30	1.2858e-002	1.02	6.4284e-003	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.5835e-001	1.4091e-001	1.99	4.4043e-002	1.68	1.5996e-002	1.46	7.0051e-003	1.19
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.2241e-001	2.1254e-001	1.30	9.4433e-002	1.17	4.4991e-002	1.07	2.2032e-002	1.03
$T_1=1.0000$	5.2241e-001	2.1254e-001	1.30	9.4433e-002	1.17	4.4991e-002	1.07	2.2032e-002	1.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.2241e-001	2.1254e-001	1.30	1.0079e-001	1.08	4.9695e-002	1.02	2.4712e-002	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2738e-001	2.6855e-001	1.44	1.1021e-001	1.28	5.1982e-002	1.08	2.5253e-002	1.04
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.3705e-001	1.9927e-001	1.13	8.2812e-002	1.27	3.7881e-002	1.13	1.8159e-002	1.06
$T_1=1.0000$	4.3705e-001	1.9927e-001	1.13	8.2812e-002	1.27	3.7881e-002	1.13	1.8159e-002	1.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.3705e-001	1.9927e-001	1.13	8.2812e-002	1.27	4.0300e-002	1.04	1.9991e-002	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1940e+000	3.0910e-001	1.95	1.0005e-001	1.63	4.3698e-002	1.20	2.0672e-002	1.08
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10	20	40	80				

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.0012e-001	1.7852e-001	2.16	6.2405e-002	1.52	2.6631e-002	1.23	1.2376e-002	1.11
$T_1=1.0000$	8.0012e-001	1.7852e-001	2.16	6.2405e-002	1.52	2.6631e-002	1.23	1.2376e-002	1.11
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.0012e-001	1.7852e-001	2.16	6.2405e-002	1.52	2.7707e-002	1.17	1.3390e-002	1.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.2307e+000	2.1139e-001	2.54	6.8358e-002	1.63	2.8500e-002	1.26	1.3538e-002	1.07
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.9345e-001	1.0890e-001	2.67	5.6598e-002	0.94	2.7480e-002	1.04	1.3456e-002	1.03
$T_1=1.0000$	6.9345e-001	1.0890e-001	2.67	5.6598e-002	0.94	2.7480e-002	1.04	1.3456e-002	1.03
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.9345e-001	1.0890e-001	2.67	6.5226e-002	0.74	3.1019e-002	1.07	1.5197e-002	1.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0051e+000	2.9905e-001	1.75	8.7375e-002	1.78	3.4678e-002	1.33	1.5908e-002	1.12
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.8755e-001	3.5088e-001	0.74	1.3001e-001	1.43	5.5912e-002	1.22	2.5996e-002	1.10
$T_1=1.0000$	5.8755e-001	3.5088e-001	0.74	1.3001e-001	1.43	5.5912e-002	1.22	2.5996e-002	1.10
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.8755e-001	3.5088e-001	0.74	1.3001e-001	1.43	5.9132e-002	1.14	2.8375e-002	1.06
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.9679e+000	5.3170e-001	1.89	1.5640e-001	1.77	6.3869e-002	1.29	2.9289e-002	1.12

Tabelle 8:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.3377e-001	1.0478e-001	1.16	5.0544e-002	1.05	2.4893e-002	1.02	1.2360e-002	1.01
$T_1=1.0000$	2.3377e-001	1.0478e-001	1.16	5.0544e-002	1.05	2.4893e-002	1.02	1.2360e-002	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.3377e-001	1.0478e-001	1.16	5.6681e-002	0.89	2.8119e-002	1.01	1.4012e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.3377e-001	1.1321e-001	1.05	5.6681e-002	1.00	2.8119e-002	1.01	1.4012e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6932e-002	1.6275e-002	1.53	7.7523e-003	1.07	3.9466e-003	0.97	2.0109e-003	0.97
$T_1=1.0000$	4.6932e-002	1.6275e-002	1.53	7.7523e-003	1.07	3.9466e-003	0.97	2.0109e-003	0.97
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.6932e-002	2.6955e-002	0.80	1.0190e-002	1.40	4.8282e-003	1.08	2.3685e-003	1.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.2576e-002	2.8760e-002	1.34	1.0961e-002	1.39	4.9560e-003	1.15	2.3927e-003	1.05
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	5.8990e-002	1.3507e-002	2.13	4.9888e-003	1.44	2.2004e-003	1.18	1.0424e-003	1.08
$T_1=1.0000$	5.8990e-002	1.3507e-002	2.13	4.9888e-003	1.44	2.2004e-003	1.18	1.0424e-003	1.08
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	5.8990e-002	1.3507e-002	2.13	5.2449e-003	1.36	2.4080e-003	1.12	1.1636e-003	1.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.6323e-002	1.8868e-002	2.19	5.5284e-003	1.77	2.4080e-003	1.20	1.1636e-003	1.05
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.4111e-002	2.9132e-002	1.69	1.2499e-002	1.22	5.8763e-003	1.09	2.8579e-003	1.04
$T_1=1.0000$	9.4111e-002	2.9132e-002	1.69	1.2499e-002	1.22	5.8763e-003	1.09	2.8579e-003	1.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	9.4111e-002	2.9132e-002	1.69	1.3392e-002	1.12	6.4897e-003	1.05	3.2034e-003	1.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.4111e-002	2.9132e-002	1.69	1.3392e-002	1.12	6.4897e-003	1.05	3.2034e-003	1.02
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.7404e-002	1.4773e-002	1.68	6.6272e-003	1.16	3.1877e-003	1.06	1.5685e-003	1.02
$T_1=1.0000$	4.7404e-002	1.4773e-002	1.68	6.6272e-003	1.16	3.1877e-003	1.06	1.5685e-003	1.02
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	4.7404e-002	1.4773e-002	1.68	7.5123e-003	0.98	3.6082e-003	1.06	1.7784e-003	1.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.1814e-002	1.4773e-002	1.81	7.5123e-003	0.98	3.6082e-003	1.06	1.7784e-003	1.02
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9133e-002	7.2931e-003	1.39	3.4789e-003	1.07	1.7059e-003	1.03	8.4574e-004	1.01
$T_1=1.0000$	1.9133e-002	7.2931e-003	1.39	3.4789e-003	1.07	1.7059e-003	1.03	8.4574e-004	1.01
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.9133e-002	7.5349e-003	1.34	3.9570e-003	0.93	1.9406e-003	1.03	9.6212e-004	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1952e-002	8.5391e-003	1.36	3.9570e-003	1.11	1.9406e-003	1.03	9.6212e-004	1.01
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.4533e-003	2.9787e-003	1.32	1.6894e-003	0.82	8.7607e-004	0.95	4.4405e-004	0.98
$T_1=1.0000$	7.4533e-003	2.9787e-003	1.32	1.6894e-003	0.82	8.7607e-004	0.95	4.4405e-004	0.98
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	7.4533e-003	4.0224e-003	0.89	2.0148e-003	1.00	1.0209e-003	0.98	5.1138e-004	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5493e-002	4.7600e-003	1.70	2.0658e-003	1.20	1.0209e-003	1.02	5.1138e-004	1.00

Auch für spezielle, nicht äquidistante Knoten, also z.B. Gauss-Knoten, die ja immerhin auch symmetrisch sind, liefert die Differentialvariante keine besseren Ergebnisse.

Tabelle 9:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	3.8060e-001	1.6567e-001	1.20	7.7996e-002	1.09	3.8048e-002	1.04	1.8817e-002	1.02
$T_1=1.0000$	3.8060e-001	1.6567e-001	1.20	7.7996e-002	1.09	3.8048e-002	1.04	1.8817e-002	1.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.8060e-001	1.6567e-001	1.20	8.5731e-002	0.95	4.2605e-002	1.01	2.1246e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.0639e-001	1.7781e-001	1.19	8.6299e-002	1.04	4.2752e-002	1.01	2.1283e-002	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.3748e-002	7.4804e-003	2.85	2.0033e-003	1.90	1.8825e-003	0.09	1.1707e-003	0.69
$T_1=1.0000$	5.3748e-002	7.4804e-003	2.85	2.0033e-003	1.90	1.8825e-003	0.09	1.1707e-003	0.69
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.3748e-002	3.1524e-002	0.77	9.4086e-003	1.74	3.5693e-003	1.40	1.6245e-003	1.14
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.0205e-001	5.6668e-002	1.83	1.5289e-002	1.89	4.8562e-003	1.65	1.8513e-003	1.39
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.6958e-002	1.8977e-002	1.82	8.0973e-003	1.23	3.6954e-003	1.13	1.7572e-003	1.07
$T_1=1.0000$	6.6958e-002	1.8977e-002	1.82	8.0973e-003	1.23	3.6954e-003	1.13	1.7572e-003	1.07
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.6958e-002	1.8977e-002	1.82	8.0973e-003	1.23	3.9385e-003	1.04	1.9265e-003	1.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.4849e-001	4.1843e-002	1.83	1.1140e-002	1.91	4.3380e-003	1.36	1.9828e-003	1.13
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.4357e-003	9.0515e-004	2.59	1.5105e-003	-0.74	9.6859e-004	0.64	5.2907e-004	0.87
$T_1=1.0000$	5.4357e-003	9.0515e-004	2.59	1.5105e-003	-0.74	9.6859e-004	0.64	5.2907e-004	0.87
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.4357e-003	1.0129e-002	-0.90	2.8565e-003	1.83	1.3161e-003	1.12	6.4333e-004	1.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.8128e-001	2.8122e-002	2.69	6.6736e-003	2.08	1.9997e-003	1.74	7.5890e-004	1.40
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.0740e-002	4.9756e-003	3.03	1.4038e-003	1.83	4.7803e-004	1.55	1.8621e-004	1.36
$T_1=1.0000$	4.0740e-002	4.9756e-003	3.03	1.4038e-003	1.83	4.7803e-004	1.55	1.8621e-004	1.36
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.0740e-002	4.9756e-003	3.03	1.6260e-003	1.61	5.0926e-004	1.67	1.8859e-004	1.43
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.4632e-001	2.3743e-002	2.62	4.6074e-003	2.37	1.0653e-003	2.11	2.7964e-004	1.93
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.7864e-002	2.3235e-003	3.58	1.0369e-003	1.16	4.9507e-004	1.07	2.3930e-004	1.05
$T_1=1.0000$	2.7864e-002	2.3235e-003	3.58	1.0369e-003	1.16	4.9507e-004	1.07	2.3930e-004	1.05
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.7864e-002	4.1802e-003	2.74	1.2017e-003	1.80	5.3754e-004	1.16	2.6366e-004	1.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3944e-001	3.0464e-002	2.19	4.8723e-003	2.64	1.1394e-003	2.10	3.6105e-004	1.66
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.3838e-002	2.1878e-003	3.45	2.5902e-004	3.08	1.8922e-005	3.77	4.0863e-005	-1.11
$T_1=1.0000$	2.3838e-002	2.1878e-003	3.45	2.5902e-004	3.08	1.8922e-005	3.77	4.0863e-005	-1.11
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.3838e-002	6.3813e-003	1.90	9.6307e-004	2.73	2.3837e-004	2.01	8.8245e-005	1.43

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.9711e-001	2.5446e-002	2.95	4.0234e-003	2.66	9.0788e-004	2.15	2.2959e-004	1.98
-----------------------------	-------------	-------------	------	-------------	------	-------------	------	-------------	------

Tabelle 10:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.0713e-001	1.3562e-001	1.18	6.4370e-002	1.08	3.1518e-002	1.03	1.5615e-002	1.01
$T_1=1.0000$	3.0713e-001	1.3562e-001	1.18	6.4370e-002	1.08	3.1518e-002	1.03	1.5615e-002	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.0713e-001	1.3562e-001	1.18	7.1182e-002	0.93	3.5392e-002	1.01	1.7654e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.3095e-001	1.4584e-001	1.18	7.1537e-002	1.03	3.5482e-002	1.01	1.7678e-002	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.0936e-002	6.7380e-003	2.60	9.2007e-004	2.87	9.1242e-004	0.01	6.1455e-004	0.57
$T_1=1.0000$	4.0936e-002	6.7380e-003	2.60	9.2007e-004	2.87	9.1242e-004	0.01	6.1455e-004	0.57
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.0936e-002	2.0451e-002	1.00	5.8795e-003	1.80	2.1341e-003	1.46	9.1913e-004	1.22
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5901e-001	3.5959e-002	2.14	1.0284e-002	1.81	3.0002e-003	1.78	1.0765e-003	1.48
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.2937e-002	1.0386e-002	1.67	4.5672e-003	1.19	2.1115e-003	1.11	1.0106e-003	1.06
$T_1=1.0000$	3.2937e-002	1.0386e-002	1.67	4.5672e-003	1.19	2.1115e-003	1.11	1.0106e-003	1.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.2937e-002	1.0386e-002	1.67	4.6438e-003	1.16	2.2587e-003	1.04	1.1110e-003	1.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.6550e-002	2.1613e-002	2.16	6.2363e-003	1.79	2.4506e-003	1.35	1.1346e-003	1.11
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.1418e-002	6.4415e-004	4.15	1.1105e-003	-0.79	6.9135e-004	0.68	3.7309e-004	0.89
$T_1=1.0000$	1.1418e-002	6.4415e-004	4.15	1.1105e-003	-0.79	6.9135e-004	0.68	3.7309e-004	0.89
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1418e-002	5.3603e-003	1.09	1.8700e-003	1.52	9.0507e-004	1.05	4.4854e-004	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.1335e-002	1.5904e-002	2.52	3.9396e-003	2.01	1.2368e-003	1.67	5.0515e-004	1.29
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6412e-002	1.6384e-003	3.32	4.6892e-004	1.80	1.6568e-004	1.50	6.6562e-005	1.32
$T_1=1.0000$	1.6412e-002	1.6384e-003	3.32	4.6892e-004	1.80	1.6568e-004	1.50	6.6562e-005	1.32
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6412e-002	1.6384e-003	3.32	4.6892e-004	1.80	1.6777e-004	1.48	6.8946e-005	1.28
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.0986e-002	9.5574e-003	3.25	1.6655e-003	2.52	4.2021e-004	1.99	1.1226e-004	1.90

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.6868e-003	2.0809e-004	5.38	3.5736e-004	-0.78	2.2811e-004	0.65	1.2161e-004	0.91
$T_1=1.0000$	8.6868e-003	2.0809e-004	5.38	3.5736e-004	-0.78	2.2811e-004	0.65	1.2161e-004	0.91
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.6868e-003	2.0084e-003	2.11	5.5338e-004	1.86	2.8256e-004	0.97	1.4271e-004	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.1973e-002	1.4408e-002	2.67	2.6176e-003	2.46	6.5485e-004	2.00	2.0921e-004	1.65

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.1935e-002	7.9069e-004	4.79	4.3184e-004	0.87	2.3330e-004	0.89	1.1949e-004	0.97
$T_1=1.0000$	2.1935e-002	7.9069e-004	4.79	4.3184e-004	0.87	2.3330e-004	0.89	1.1949e-004	0.97
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.1935e-002	1.2976e-003	4.08	4.5640e-004	1.51	2.5847e-004	0.82	1.3449e-004	0.94
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0062e-001	1.1141e-002	3.17	1.4291e-003	2.96	4.1390e-004	1.79	1.6145e-004	1.36

7.3. Steife Randwertprobleme: Hier sind, wegen der guten Stabilitätseigenschaften des impliziten-Eulerverfahrens, keine größeren Schwierigkeiten zu erwarten. Allerdings funktioniert die Differentialvariante natürlich auch für steife Probleme nur auf äquidistantem Gitter.

Tabelle 11:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.4546e-002	2.8682e-002	0.93	1.4725e-002	0.96	7.4627e-003	0.98	3.7570e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.5262e-002	2.8073e-002	0.98	1.4156e-002	0.99	7.1090e-003	0.99	3.5624e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.5262e-002	2.9050e-002	0.93	1.6701e-002	0.80	8.4555e-003	0.98	4.2546e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1819e-002	3.2505e-002	0.93	1.6701e-002	0.96	8.4555e-003	0.98	4.2548e-003	0.99

Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.3163e-002	3.5029e-003	1.91	9.0633e-004	1.95	2.3065e-004	1.97	5.8187e-005	1.99
$T_2=1.0000$	6.2765e-003	1.6966e-003	1.89	4.4058e-004	1.95	1.1228e-004	1.97	2.8344e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3163e-002	3.5029e-003	1.91	9.4711e-004	1.89	2.4105e-004	1.97	6.0826e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3741e-002	3.6630e-003	1.91	9.4790e-004	1.95	2.4129e-004	1.97	6.0874e-005	1.99

Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.4798e-004	1.0303e-004	2.86	1.3455e-005	2.94	1.7176e-006	2.97	2.1694e-007	2.99
$T_2=1.0000$	1.5853e-003	2.1126e-004	2.91	2.7526e-005	2.94	3.5201e-006	2.97	4.4525e-007	2.98
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.5853e-003	2.1126e-004	2.91	2.8123e-005	2.91	3.6132e-006	2.96	4.5755e-007	2.98

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5853e-003	2.1542e-004	2.88	2.8281e-005	2.93	3.6188e-006	2.97	4.5774e-007	2.98
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.5698e-005	5.7764e-006	3.27	4.5413e-007	3.67	3.1808e-008	3.84	2.1068e-009	3.92
$T_2=1.0000$	3.9698e-005	4.6398e-006	3.10	3.7840e-007	3.62	2.6753e-008	3.82	1.7762e-009	3.91
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.5698e-005	5.9642e-006	3.22	5.1854e-007	3.52	3.6233e-008	3.84	2.3964e-009	3.92
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1017e-004	6.8567e-006	4.01	5.2374e-007	3.71	3.6325e-008	3.85	2.3982e-009	3.92
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.3757e-005	2.4998e-007	5.78	5.7774e-009	5.44	1.5892e-010	5.18	7.2918e-012	4.45
$T_2=1.0000$	3.4412e-005	1.3517e-006	4.67	4.7190e-008	4.84	1.5611e-009	4.92	5.2646e-011	4.89
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4412e-005	1.3517e-006	4.67	4.7190e-008	4.84	1.5611e-009	4.92	5.2646e-011	4.89
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0057e-004	3.0452e-006	5.05	7.9162e-008	5.27	2.1032e-009	5.23	2.0519e-010	3.36
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.5932e-005	1.7296e-006	4.73	6.2885e-008	4.78	2.1508e-009	4.87	7.1340e-011	4.91
$T_2=1.0000$	3.8750e-005	1.6988e-006	4.51	6.1994e-008	4.78	2.0867e-009	4.89	6.8020e-011	4.94
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5932e-005	1.7593e-006	4.71	7.1728e-008	4.62	2.4465e-009	4.87	8.0933e-011	4.92
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1434e-004	2.7814e-006	5.36	8.9004e-008	4.97	2.7150e-009	5.03	8.5173e-011	4.99
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.4226e-005	1.9407e-006	4.80	6.7160e-008	4.85	2.2270e-009	4.91	7.2317e-011	4.94
$T_2=1.0000$	3.9505e-005	1.7472e-006	4.50	6.3139e-008	4.79	2.1080e-009	4.90	6.8771e-011	4.94
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.4226e-005	1.9407e-006	4.80	7.5958e-008	4.68	2.5219e-009	4.91	8.1911e-011	4.94
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1976e-004	2.9051e-006	5.37	9.2697e-008	4.97	2.7863e-009	5.06	8.6000e-011	5.02

Tabelle 12:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.6208e-002	2.4110e-002	0.94	1.2326e-002	0.97	6.2331e-003	0.98	3.1344e-003	0.99
$T_2=1.0000$	4.6289e-002	2.3459e-002	0.98	1.1814e-002	0.99	5.9286e-003	0.99	2.9698e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6289e-002	2.4396e-002	0.92	1.3975e-002	0.80	7.0611e-003	0.98	3.5493e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.2163e-002	2.7384e-002	0.93	1.3975e-002	0.97	7.0611e-003	0.98	3.5496e-003	0.99

Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.3018e-003	2.4596e-003	1.92	6.3310e-004	1.96	1.6066e-004	1.98	4.0469e-005	1.99
$T_2=1.0000$	4.4917e-003	1.1937e-003	1.91	3.0793e-004	1.95	7.8225e-005	1.98	1.9715e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	9.3018e-003	2.4596e-003	1.92	6.6161e-004	1.89	1.6790e-004	1.98	4.2304e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	9.7080e-003	2.5701e-003	1.92	6.6228e-004	1.96	1.6807e-004	1.98	4.2338e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.6776e-004	6.1030e-005	2.94	7.8563e-006	2.96	9.9788e-007	2.98	1.2580e-007	2.99
$T_2=1.0000$	9.2543e-004	1.2352e-004	2.91	1.6037e-005	2.95	2.0447e-006	2.97	2.5814e-007	2.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	9.2543e-004	1.2352e-004	2.91	1.6391e-005	2.91	2.0988e-006	2.97	2.6528e-007	2.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	9.5023e-004	1.2715e-004	2.90	1.6497e-005	2.95	2.1025e-006	2.97	2.6540e-007	2.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.9795e-005	3.9494e-006	3.92	2.5930e-007	3.93	1.6707e-008	3.96	1.1189e-009	3.90
$T_2=1.0000$	4.5415e-005	3.3286e-006	3.77	2.2076e-007	3.91	1.4189e-008	3.96	9.5551e-010	3.89
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.9795e-005	4.0367e-006	3.89	2.9561e-007	3.77	1.9018e-008	3.96	1.2730e-009	3.90
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.1320e-005	4.4299e-006	3.79	2.9561e-007	3.91	1.9018e-008	3.96	1.2730e-009	3.90
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.6096e-006	2.9520e-007	4.48	1.1423e-008	4.69	3.9446e-010	4.86	3.9775e-012	6.63
$T_2=1.0000$	9.9138e-007	4.6016e-008	4.43	3.3991e-009	3.76	1.4925e-010	4.51	1.5956e-011	3.23
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.6096e-006	2.9520e-007	4.48	1.1423e-008	4.69	4.0348e-010	4.82	1.5956e-011	4.66
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.6096e-006	2.9520e-007	4.48	1.1494e-008	4.68	4.0348e-010	4.83	3.3857e-010	0.25
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.1609e-006	5.1934e-008	5.38	9.6533e-010	5.75	8.8099e-012	6.78	1.6967e-011	-0.95
$T_2=1.0000$	3.1843e-006	5.9085e-008	5.75	1.0212e-009	5.85	2.5402e-011	5.33	1.9165e-011	0.41
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.1843e-006	7.1729e-008	5.47	1.2827e-009	5.81	2.6456e-011	5.60	1.9553e-011	0.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0926e-005	1.5721e-007	6.12	1.9588e-009	6.33	3.9240e-011	5.64	1.1555e-010	-1.56
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.5772e-006	8.6163e-008	5.38	1.6222e-009	5.73	2.3014e-011	6.14	8.0689e-012	1.51
$T_2=1.0000$	4.8678e-006	1.0033e-007	5.60	1.8401e-009	5.77	3.4362e-011	5.74	8.6214e-012	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.8678e-006	1.1999e-007	5.34	2.2314e-009	5.75	3.8220e-011	5.87	9.6128e-012	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3285e-005	1.9957e-007	6.06	2.8473e-009	6.13	4.1729e-011	6.09	3.9664e-011	0.07

8. Die Integralvariante auf Euler-Basis ohne linken Punkt

Wir behandeln also jetzt genau jene Variante, deren Funktionieren wir in Abschnitt 3 bewiesen haben. Vgl. (3.1)-(3.4) Der verwendete Defekt sieht also so aus:

$$(8.1) \quad \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)}) = \frac{\eta_{i,j}^{(n)} - \eta_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} - \sum_{k=1}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}^{(n)}).$$

8.1. Das Phänomen des Ordnungssprunges: Wann immer man die Integralvariante verwendet, sei es mit oder ohne linkem Punkt, es hängt auch nicht vom Basisverfahren ab, kann es für bestimmte Randwertprobleme zu folgendem Phänomen kommen: (Es wird oBdA. angenommen, dass wir die in diesem Abschnitt untersuchte Integralvariante ohne linkem Punkt auf Euler-Basis vor uns haben.) Das Verfahren, vom dem man weiß, dass es eine Ordnung von, m erreichen soll, erreicht diese nicht im $m - 1$ ten Iterationsschritt, schon früher, abhängig vom Randwertproblem, sagen wir, im Schritt $\frac{m}{2}$. Bis zu diesem Schritt stieg die Ordnung wie erwartet jeweils um eins an, ‘springt’ aber dann auf’s zu erwartende Maximum. (Dies motiviert die Bezeichnung ‘Ordnungssprung’.) Zur Illustration zwei Beispieltabellen. Zuerst die Integralvariante, wo der ‘Ordnungssprung’ deutlich zu sehen ist:

Tabelle 13:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)															
stark oszillierendes Randwertproblem (6.6)															
Gitter: 7 äquidistante Knoten ($m = 8$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	48			96			192			384			768		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	3.5733e-001	1.7607e-001	1.02	8.7571e-002	1.01	4.3693e-002	1.00	2.1826e-002	1.00	2.1826e-002	1.00	2.1826e-002	1.00		
$T_1=0.1667$	3.4870e-001	1.7341e-001	1.01	8.6729e-002	1.00	4.3400e-002	1.00	2.1712e-002	1.00	2.1712e-002	1.00	2.1712e-002	1.00		
$T_2=0.3333$	3.5695e-001	1.7527e-001	1.03	8.7074e-002	1.01	4.3426e-002	1.00	2.1689e-002	1.00	2.1689e-002	1.00	2.1689e-002	1.00		
$T_3=0.5000$	3.5212e-001	1.7351e-001	1.02	8.6389e-002	1.01	4.3136e-002	1.00	2.1557e-002	1.00	2.1557e-002	1.00	2.1557e-002	1.00		
$T_4=0.6667$	3.6283e-001	1.7927e-001	1.02	8.9219e-002	1.01	4.4520e-002	1.00	2.2239e-002	1.00	2.2239e-002	1.00	2.2239e-002	1.00		
$T_5=0.8333$	3.4405e-001	1.7064e-001	1.01	8.5310e-002	1.00	4.2691e-002	1.00	2.1359e-002	1.00	2.1359e-002	1.00	2.1359e-002	1.00		
$T_6=1.0000$	3.5733e-001	1.7607e-001	1.02	8.7571e-002	1.01	4.3693e-002	1.00	2.1826e-002	1.00	2.1826e-002	1.00	2.1826e-002	1.00		
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.6283e-001	1.7927e-001	1.02	8.9219e-002	1.01	4.4955e-002	0.99	2.2467e-002	1.00	2.2467e-002	1.00	2.2467e-002	1.00		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6399e-001	1.8046e-001	1.01	9.0005e-002	1.00	4.4955e-002	1.00	2.2467e-002	1.00	2.2467e-002	1.00	2.2467e-002	1.00		
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	48			96			192			384			768		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	8.1385e-002	1.0212e-003	6.32	2.3339e-004	2.13	5.8560e-005	1.99	1.4668e-005	2.00	1.4668e-005	2.00	1.4668e-005	2.00		
$T_1=0.1667$	1.0151e-001	5.2915e-004	7.58	1.3956e-004	1.92	3.3151e-005	2.07	8.0814e-006	2.04	8.0814e-006	2.04	8.0814e-006	2.04		
$T_2=0.3333$	9.2961e-002	1.0401e-003	6.48	2.6855e-004	1.95	6.6852e-005	2.01	1.6667e-005	2.00	1.6667e-005	2.00	1.6667e-005	2.00		
$T_3=0.5000$	9.7435e-002	5.7252e-004	7.41	1.5425e-004	1.89	3.7013e-005	2.06	9.0520e-006	2.03	9.0520e-006	2.03	9.0520e-006	2.03		
$T_4=0.6667$	7.7050e-002	1.2994e-003	5.89	3.0245e-004	2.10	7.6986e-005	1.97	1.9423e-005	1.99	1.9423e-005	1.99	1.9423e-005	1.99		
$T_5=0.8333$	1.0959e-001	8.2220e-004	7.06	2.2288e-004	1.88	5.3455e-005	2.06	1.3089e-005	2.03	1.3089e-005	2.03	1.3089e-005	2.03		
$T_6=1.0000$	8.1385e-002	1.0212e-003	6.32	2.3339e-004	2.13	5.8560e-005	1.99	1.4668e-005	2.00	1.4668e-005	2.00	1.4668e-005	2.00		

$\max_{T_i}(\ \cdots\)$	1.0959e-001	1.6535e-003	6.05	4.0910e-004	2.01	1.0183e-004	2.01	2.6756e-005	1.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0959e-001	1.6535e-003	6.05	4.2523e-004	1.96	1.0708e-004	1.99	2.6840e-005	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3407e-002	1.6301e-004	9.00	5.6221e-007	8.18	7.0749e-008	2.99	8.8876e-009	2.99
$T_1=0.1667$	9.7985e-002	1.7511e-004	9.13	5.8010e-007	8.24	2.9444e-008	4.30	3.5028e-009	3.07
$T_2=0.3333$	9.0856e-002	1.6419e-004	9.11	7.6096e-007	7.75	7.3255e-008	3.38	9.1579e-009	3.00
$T_3=0.5000$	9.4355e-002	1.7102e-004	9.11	8.8903e-007	7.59	6.4002e-008	3.80	7.6393e-009	3.07
$T_4=0.6667$	8.1163e-002	1.6288e-004	8.96	1.0054e-006	7.34	1.4180e-007	2.83	1.8027e-008	2.98
$T_5=0.8333$	1.0381e-001	1.7597e-004	9.20	5.2188e-007	8.40	1.0508e-008	5.63	7.5908e-010	3.79
$T_6=1.0000$	8.3407e-002	1.6301e-004	9.00	5.6221e-007	8.18	7.0749e-008	2.99	8.8876e-009	2.99
$\max_{T_i}(\ \cdots\)$	1.0381e-001	1.7597e-004	9.20	2.0797e-006	6.40	2.4253e-007	3.10	3.1491e-008	2.95
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0381e-001	1.8805e-004	9.11	2.0797e-006	6.50	2.5099e-007	3.05	3.1638e-008	2.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3396e-002	1.6458e-004	8.99	3.7347e-007	8.78	1.3714e-009	8.09	4.8149e-011	4.83
$T_1=0.1667$	9.8016e-002	1.7317e-004	9.14	3.8846e-007	8.80	1.3472e-009	8.17	4.5104e-011	4.90
$T_2=0.3333$	9.0865e-002	1.6331e-004	9.12	3.7890e-007	8.75	1.3547e-009	8.13	4.6678e-011	4.86
$T_3=0.5000$	9.4411e-002	1.6671e-004	9.15	3.8216e-007	8.77	1.3085e-009	8.19	4.3345e-011	4.92
$T_4=0.6667$	8.1138e-002	1.6654e-004	8.93	3.7301e-007	8.80	1.4521e-009	8.00	5.4529e-011	4.73
$T_5=0.8333$	1.0386e-001	1.7367e-004	9.22	3.9401e-007	8.78	1.3984e-009	8.14	4.8212e-011	4.86
$T_6=1.0000$	8.3396e-002	1.6458e-004	8.99	3.7347e-007	8.78	1.3714e-009	8.09	4.8151e-011	4.83
$\max_{T_i}(\ \cdots\)$	1.0386e-001	1.7384e-004	9.22	3.9820e-007	8.77	1.7171e-009	7.86	7.2169e-011	4.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0386e-001	1.8261e-004	9.15	4.1325e-007	8.79	1.8421e-009	7.81	7.6242e-011	4.59
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6052e-011	4.87
$T_1=0.1667$	9.8015e-002	1.7318e-004	9.14	3.8921e-007	8.80	1.3848e-009	8.13	4.7252e-011	4.87
$T_2=0.3333$	9.0865e-002	1.6331e-004	9.12	3.7921e-007	8.75	1.3693e-009	8.11	4.6928e-011	4.87
$T_3=0.5000$	9.4410e-002	1.6673e-004	9.15	3.8340e-007	8.76	1.3768e-009	8.12	4.7125e-011	4.87
$T_4=0.6667$	8.1139e-002	1.6651e-004	8.93	3.7130e-007	8.81	1.3317e-009	8.12	4.5634e-011	4.87
$T_5=0.8333$	1.0386e-001	1.7369e-004	9.22	3.9450e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7846e-011	4.87
$T_6=1.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6052e-011	4.87
$\max_{T_i}(\ \cdots\)$	1.0386e-001	1.7383e-004	9.22	3.9575e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7964e-011	4.87
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0386e-001	1.8261e-004	9.15	4.1169e-007	8.79	1.4244e-009	8.18	4.7964e-011	4.89
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6052e-011	4.87
$T_1=0.1667$	9.8015e-002	1.7318e-004	9.14	3.8921e-007	8.80	1.3847e-009	8.13	4.7249e-011	4.87
$T_2=0.3333$	9.0865e-002	1.6331e-004	9.12	3.7921e-007	8.75	1.3693e-009	8.11	4.6929e-011	4.87
$T_3=0.5000$	9.4410e-002	1.6673e-004	9.15	3.8340e-007	8.76	1.3768e-009	8.12	4.7123e-011	4.87
$T_4=0.6667$	8.1139e-002	1.6651e-004	8.93	3.7131e-007	8.81	1.3319e-009	8.12	4.5640e-011	4.87
$T_5=0.8333$	1.0386e-001	1.7369e-004	9.22	3.9450e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7847e-011	4.87

$T_6=1.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6052e-011	4.87
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.0386e-001	1.7383e-004	9.22	3.9576e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7969e-011	4.87
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0386e-001	1.8261e-004	9.15	4.1169e-007	8.79	1.4246e-009	8.17	4.7969e-011	4.89
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6051e-011	4.87
$T_1=0.1667$	9.8015e-002	1.7318e-004	9.14	3.8921e-007	8.80	1.3847e-009	8.13	4.7250e-011	4.87
$T_2=0.3333$	9.0865e-002	1.6331e-004	9.12	3.7921e-007	8.75	1.3693e-009	8.11	4.6929e-011	4.87
$T_3=0.5000$	9.4410e-002	1.6673e-004	9.15	3.8340e-007	8.76	1.3768e-009	8.12	4.7124e-011	4.87
$T_4=0.6667$	8.1139e-002	1.6651e-004	8.93	3.7131e-007	8.81	1.3319e-009	8.12	4.5639e-011	4.87
$T_5=0.8333$	1.0386e-001	1.7369e-004	9.22	3.9450e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7847e-011	4.87
$T_6=1.0000$	8.3397e-002	1.6457e-004	8.99	3.7303e-007	8.79	1.3426e-009	8.12	4.6052e-011	4.87
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.0386e-001	1.7383e-004	9.22	3.9576e-007	8.78	1.4031e-009	8.14	4.7968e-011	4.87
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0386e-001	1.8261e-004	9.15	4.1169e-007	8.79	1.4246e-009	8.17	4.7968e-011	4.89

Genau dasselbe mit der ‘Differentialvariante’. Hier gibt es keinen Ordnungssprung:

Tabelle 14:

Differentialvariante impl.-Euler (7.5)									
stark oszillierendes Randwertproblem (6.6)									
Gitter: 7 äquidistante Knoten ($m = 8$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.5733e-001	1.7607e-001	1.02	8.7571e-002	1.01	4.3693e-002	1.00	2.1826e-002	1.00
$T_1=0.1667$	3.4870e-001	1.7341e-001	1.01	8.6729e-002	1.00	4.3400e-002	1.00	2.1712e-002	1.00
$T_2=0.3333$	3.5695e-001	1.7527e-001	1.03	8.7074e-002	1.01	4.3426e-002	1.00	2.1689e-002	1.00
$T_3=0.5000$	3.5212e-001	1.7351e-001	1.02	8.6389e-002	1.01	4.3136e-002	1.00	2.1557e-002	1.00
$T_4=0.6667$	3.6283e-001	1.7927e-001	1.02	8.9219e-002	1.01	4.4520e-002	1.00	2.2239e-002	1.00
$T_5=0.8333$	3.4405e-001	1.7064e-001	1.01	8.5310e-002	1.00	4.2691e-002	1.00	2.1359e-002	1.00
$T_6=1.0000$	3.5733e-001	1.7607e-001	1.02	8.7571e-002	1.01	4.3693e-002	1.00	2.1826e-002	1.00
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	3.6283e-001	1.7927e-001	1.02	8.9219e-002	1.01	4.4955e-002	0.99	2.2467e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6399e-001	1.8046e-001	1.01	9.0005e-002	1.00	4.4955e-002	1.00	2.2467e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5095e-001	4.1799e-002	1.85	1.0406e-002	2.01	2.6025e-003	2.00	6.5105e-004	2.00
$T_1=0.1667$	1.6096e-001	4.4446e-002	1.86	1.0915e-002	2.03	2.7082e-003	2.01	6.7465e-004	2.01
$T_2=0.3333$	1.5369e-001	4.3402e-002	1.82	1.0824e-002	2.00	2.7070e-003	2.00	6.7706e-004	2.00
$T_3=0.5000$	1.5644e-001	4.3856e-002	1.83	1.0878e-002	2.01	2.7125e-003	2.00	6.7738e-004	2.00
$T_4=0.6667$	1.5108e-001	4.1134e-002	1.88	1.0210e-002	2.01	2.5521e-003	2.00	6.3840e-004	2.00
$T_5=0.8333$	1.6320e-001	4.5415e-002	1.85	1.1163e-002	2.02	2.7689e-003	2.01	6.8957e-004	2.01
$T_6=1.0000$	1.5095e-001	4.1799e-002	1.85	1.0406e-002	2.01	2.6025e-003	2.00	6.5105e-004	2.00

$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.6320e-001	4.5415e-002	1.85	1.1217e-002	2.02	2.7931e-003	2.01	6.9713e-004	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1205e-001	4.5465e-002	2.22	1.1229e-002	2.02	2.7963e-003	2.01	6.9783e-004	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.1662e-002	1.0996e-002	3.06	1.3473e-003	3.03	1.6704e-004	3.01	2.0799e-005	3.01
$T_1=0.1667$	9.8461e-002	1.0328e-002	3.25	1.2975e-003	2.99	1.6337e-004	2.99	2.0507e-005	2.99
$T_2=0.3333$	1.0175e-001	1.0915e-002	3.22	1.3263e-003	3.04	1.6402e-004	3.02	2.0404e-005	3.01
$T_3=0.5000$	1.0164e-001	1.0492e-002	3.28	1.2875e-003	3.03	1.6021e-004	3.01	1.9998e-005	3.00
$T_4=0.6667$	8.7355e-002	1.1511e-002	2.92	1.4188e-003	3.02	1.7617e-004	3.01	2.1941e-005	3.01
$T_5=0.8333$	1.0445e-001	9.8460e-003	3.41	1.2323e-003	3.00	1.5528e-004	2.99	1.9509e-005	2.99
$T_6=1.0000$	9.1662e-002	1.0996e-002	3.06	1.3473e-003	3.03	1.6704e-004	3.01	2.0799e-005	3.01
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.0445e-001	1.1511e-002	3.18	1.4188e-003	3.02	1.8077e-004	2.97	2.2567e-005	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7983e-001	1.1675e-002	3.95	1.4496e-003	3.01	1.8077e-004	3.00	2.2567e-005	3.00
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.2808e-001	2.2926e-003	5.80	1.5179e-004	3.92	9.5446e-006	3.99	5.9863e-007	3.99
$T_1=0.1667$	1.3764e-001	2.6801e-003	5.68	1.6975e-004	3.98	1.0417e-005	4.03	6.4470e-007	4.01
$T_2=0.3333$	1.2817e-001	2.4751e-003	5.69	1.6452e-004	3.91	1.0352e-005	3.99	6.4882e-007	4.00
$T_3=0.5000$	1.2912e-001	2.5523e-003	5.66	1.6674e-004	3.94	1.0393e-005	4.00	6.4814e-007	4.00
$T_4=0.6667$	1.3333e-001	2.2328e-003	5.90	1.4596e-004	3.94	9.1570e-006	3.99	5.7447e-007	3.99
$T_5=0.8333$	1.3325e-001	2.7780e-003	5.58	1.7677e-004	3.97	1.0860e-005	4.02	6.7185e-007	4.01
$T_6=1.0000$	1.2808e-001	2.2926e-003	5.80	1.5179e-004	3.92	9.5446e-006	3.99	5.9863e-007	3.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3764e-001	2.7780e-003	5.63	1.7754e-004	3.97	1.1031e-005	4.01	6.8653e-007	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4423e-001	3.1137e-003	5.53	1.7804e-004	4.13	1.1041e-005	4.01	6.8708e-007	4.01
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.2561e-001	7.0247e-004	7.48	2.0774e-005	5.08	6.3932e-007	5.02	1.9543e-008	5.03
$T_1=0.1667$	1.3016e-001	6.2866e-004	7.69	1.9178e-005	5.03	6.1397e-007	4.97	1.9151e-008	5.00
$T_2=0.3333$	1.2316e-001	7.1140e-004	7.44	2.0334e-005	5.13	6.2074e-007	5.03	1.8930e-008	5.04
$T_3=0.5000$	1.2262e-001	6.6632e-004	7.52	1.9124e-005	5.12	5.9312e-007	5.01	1.8198e-008	5.03
$T_4=0.6667$	1.3857e-001	7.2680e-004	7.57	2.2463e-005	5.02	6.9535e-007	5.01	2.1364e-008	5.02
$T_5=0.8333$	1.2260e-001	6.0023e-004	7.67	1.7526e-005	5.10	5.6255e-007	4.96	1.7723e-008	4.99
$T_6=1.0000$	1.2561e-001	7.0247e-004	7.48	2.0774e-005	5.08	6.3932e-007	5.02	1.9543e-008	5.03
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3857e-001	7.4998e-004	7.53	2.2463e-005	5.06	7.2206e-007	4.96	2.2240e-008	5.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.9355e-001	8.4631e-004	7.84	2.3293e-005	5.18	7.2229e-007	5.01	2.2240e-008	5.02
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.1704e-002	1.6927e-004	8.73	2.2213e-006	6.25	3.5028e-008	5.99	4.8655e-010	6.17
$T_1=0.1667$	7.5368e-002	1.9911e-004	8.56	2.6957e-006	6.21	4.0274e-008	6.06	6.6169e-010	5.93
$T_2=0.3333$	8.2075e-002	1.7436e-004	8.88	2.5045e-006	6.12	3.9541e-008	5.99	4.9063e-010	6.33
$T_3=0.5000$	8.1009e-002	1.8087e-004	8.81	2.5733e-006	6.14	3.9748e-008	6.02	4.7299e-010	6.39
$T_4=0.6667$	6.6890e-002	1.7182e-004	8.60	2.0983e-006	6.36	3.2625e-008	6.01	6.0182e-010	5.76
$T_5=0.8333$	8.0206e-002	1.9853e-004	8.66	2.8371e-006	6.13	4.2664e-008	6.06	6.0670e-010	6.14

$T_6=1.0000$	7.1704e-002	1.6927e-004	8.73	2.2213e-006	6.25	3.5028e-008	5.99	4.8654e-010	6.17
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	8.2075e-002	1.9911e-004	8.69	2.8371e-006	6.13	4.3557e-008	6.03	7.3119e-010	5.90
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.2075e-002	4.4903e-004	7.51	3.1719e-006	7.15	4.3807e-008	6.18	7.4115e-010	5.89
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	48	96		192		384		768	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.9004e-002	1.7307e-004	8.83	4.9579e-007	8.45	2.9077e-009	7.41	1.4297e-010	4.35
$T_1=0.1667$	9.1590e-002	1.7572e-004	9.03	5.3066e-007	8.37	3.0550e-009	7.44	7.4564e-011	5.36
$T_2=0.3333$	8.0383e-002	1.6577e-004	8.92	4.8606e-007	8.41	2.6356e-009	7.53	1.4630e-010	4.17
$T_3=0.5000$	8.4846e-002	1.6628e-004	9.00	4.8917e-007	8.41	2.8299e-009	7.43	6.7784e-011	5.38
$T_4=0.6667$	8.2846e-002	1.8472e-004	8.81	5.3681e-007	8.43	3.1657e-009	7.41	1.2360e-010	4.68
$T_5=0.8333$	9.5355e-002	1.7005e-004	9.13	5.0959e-007	8.38	2.7395e-009	7.54	1.9339e-010	3.82
$T_6=1.0000$	7.9004e-002	1.7307e-004	8.83	4.9579e-007	8.45	2.9078e-009	7.41	1.4299e-010	4.35
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	9.5355e-002	1.8830e-004	8.98	5.6176e-007	8.39	3.2678e-009	7.43	2.2498e-010	3.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1690e-001	1.8830e-004	9.28	7.6389e-007	7.95	4.0327e-009	7.57	2.2953e-010	4.13

Ohne das durch weitere Tabellen zu belegen, seien ein paar Beobachtungen bzw. Vermutungen zu diesem Phänomen abgeführt:

- Der Ordnungssprung tritt nur bei Verwendung der Integralvariante, nicht bei Verwendung der Differentialvariante auf.
- Er tritt völlig unabhängig von der Gitterstruktur und auch vom Basisverfahren auf.
- In dem Iterationsschritt, in dem der Sprung erfolgt, ist die abzulesende Ordnung sehr unscharf. Es scheint, dass es eine Grenze \mathbf{H} gibt, und nur für $\mathbf{h} \geq \mathbf{H}$ zeigt sich das Phänomen, für kleinere \mathbf{h} zeigt sich die eigentlich in diesem Iterationsschritt zu erwartende Ordnung.
- Der Iterationsschritt in dem der Ordnungssprung zuerst auftritt, hängt vom zugrundeliegenden Randwertproblem ab, und da speziell von den Glattheit der Lösung. Bei weniger glatter Lösung erfolgt er früher.
- Außerdem hängt der Zeitpunkt des Sprunges in geringerem Maße von den Eigenwerten der Matrix A in $y' = Ay + g$ ab. Für Betragsgroße Eigenwerte tritt er früher auf. Für nichtlineare Randwertprobleme gilt diese Beobachtung analog.
- Die letzten 3 Punkte lassen die Vermutung zu, dass es zu jedem Iterationsschritt ein \mathbf{H} gibt, wobei dieses für die frühen Iterationsschritte größer als 1 ist, und für die späten jenseits des Rundungsfehlerbereiches liegt. Und abgesehen vom Iterationsschritt hängt dieses \mathbf{H} dann eben noch vom zugrundeliegenden Randwertproblem ab.

Wenn man dieses Phänomen unterdrücken will, um die 'echte' Ordnung im jeweiligen Iterationsschritt zu sehen zu bekommen, müßte man ein möglichst einfaches Randwertproblem mit möglichst glatter Lösung als Beispiel verwenden. Auf diese Weise ist die Approximation schon auf groben Gittern und für Verfahren niedriger Ordnung so gut, dass der Fehler zu schnell im Rundungsfehlerbereich liegt, und so die Ergebnisse völlig unbrauchbar werden. Wir haben daher bei der Auswahl der Beispiele normalerweise einen Kompromiss bei der Glattheit der Lösung gewählt, im Zweifelsfall der Ordnungssprung zugelassen.

8.2. Äquidistantes Gitter: Hier gibt es keine Überraschungen. Die Ordnungsfolge $1, 2, \dots, m, m, \dots$ tritt für jeden Polynomgrad m auf. Symmetrieeffekte sind ohne Hinzunahme des linken Punktes nicht sichtbar.

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00
$T_1=0.2500$	1.4814e-001	7.5872e-002	0.97	3.8336e-002	0.98	1.9265e-002	0.99	9.6565e-003	1.00
$T_2=0.5000$	8.5821e-002	4.3598e-002	0.98	2.1942e-002	0.99	1.1005e-002	1.00	5.5105e-003	1.00
$T_3=0.7500$	5.8240e-002	2.8264e-002	1.04	1.3942e-002	1.02	6.9263e-003	1.01	3.4522e-003	1.00
$T_4=1.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0735e-001	5.2259e-001	-1.33	2.5936e-001	1.01	1.2923e-001	1.00	6.4509e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0106e+000	5.2259e-001	0.95	2.5936e-001	1.01	1.2934e-001	1.00	6.4606e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3340e+000	6.1694e-004	11.08	6.1252e-004	0.01	1.6869e-004	1.86	4.2480e-005	1.99
$T_1=0.2500$	7.0993e-001	1.3070e-004	12.41	5.5812e-004	-2.09	1.5149e-004	1.88	3.8185e-005	1.99
$T_2=0.5000$	2.7237e-001	8.0435e-004	8.40	4.6528e-004	0.79	1.2316e-004	1.92	3.1015e-005	1.99
$T_3=0.7500$	6.4438e-001	1.2817e-003	8.97	2.1151e-004	2.60	5.2635e-005	2.01	1.3185e-005	2.00
$T_4=1.0000$	1.3340e+000	6.1694e-004	11.08	6.1252e-004	0.01	1.6869e-004	1.86	4.2480e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3340e+000	1.0993e-002	6.92	1.6417e-003	2.74	4.8114e-004	1.77	1.2435e-004	1.95
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3340e+000	1.2928e-002	6.69	1.7455e-003	2.89	4.9013e-004	1.83	1.2485e-004	1.97
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3279e+000	3.3728e-003	8.62	8.1629e-005	5.37	2.9448e-006	4.79	1.6091e-007	4.19
$T_1=0.2500$	6.9557e-001	2.4043e-003	8.18	6.0995e-005	5.30	2.3928e-006	4.67	1.4864e-007	4.01
$T_2=0.5000$	2.4309e-001	1.3251e-003	7.52	3.6936e-005	5.16	1.7123e-006	4.43	1.3138e-007	3.70
$T_3=0.7500$	6.5221e-001	9.1586e-004	9.48	1.8805e-005	5.61	6.7431e-007	4.80	7.5578e-008	3.16
$T_4=1.0000$	1.3279e+000	3.3728e-003	8.62	8.1629e-005	5.37	2.9448e-006	4.79	1.6091e-007	4.19
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3279e+000	1.6012e-002	6.37	3.8424e-004	5.38	1.2573e-005	4.93	5.6520e-007	4.48
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3279e+000	1.6012e-002	6.37	3.8424e-004	5.38	1.2573e-005	4.93	5.6520e-007	4.48
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3282e+000	3.3236e-003	8.64	7.5473e-005	5.46	2.1863e-006	5.11	6.6873e-008	5.03
$T_1=0.2500$	6.9606e-001	2.3526e-003	8.21	5.4498e-005	5.43	1.5894e-006	5.10	4.8718e-008	5.03
$T_2=0.5000$	2.4390e-001	1.2739e-003	7.58	3.0482e-005	5.39	8.9744e-007	5.09	2.7559e-008	5.03
$T_3=0.7500$	6.5175e-001	9.3221e-004	9.45	2.0288e-005	5.52	5.7984e-007	5.13	1.7713e-008	5.03
$T_4=1.0000$	1.3282e+000	3.3236e-003	8.64	7.5473e-005	5.46	2.1863e-006	5.11	6.6873e-008	5.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5904e-002	6.38	3.6967e-004	5.43	1.0710e-005	5.11	3.2706e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5904e-002	6.38	3.6967e-004	5.43	1.0710e-005	5.11	3.2706e-007	5.03

Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$T_1=0.2500$	6.9606e-001	2.3535e-003	8.21	5.4552e-005	5.43	1.5927e-006	5.10	4.8923e-008	5.02
$T_2=0.5000$	2.4387e-001	1.2750e-003	7.58	3.0546e-005	5.38	9.0133e-007	5.08	2.7799e-008	5.02
$T_3=0.7500$	6.5176e-001	9.3149e-004	9.45	2.0246e-005	5.52	5.7723e-007	5.13	1.7551e-008	5.04
$T_4=1.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$T_1=0.2500$	6.9606e-001	2.3535e-003	8.21	5.4551e-005	5.43	1.5927e-006	5.10	4.8922e-008	5.02
$T_2=0.5000$	2.4387e-001	1.2750e-003	7.58	3.0545e-005	5.38	9.0131e-007	5.08	2.7798e-008	5.02
$T_3=0.7500$	6.5176e-001	9.3151e-004	9.45	2.0246e-005	5.52	5.7725e-007	5.13	1.7551e-008	5.04
$T_4=1.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$T_1=0.2500$	6.9606e-001	2.3535e-003	8.21	5.4551e-005	5.43	1.5927e-006	5.10	4.8922e-008	5.02
$T_2=0.5000$	2.4387e-001	1.2750e-003	7.58	3.0545e-005	5.38	9.0131e-007	5.08	2.7798e-008	5.02
$T_3=0.7500$	6.5176e-001	9.3151e-004	9.45	2.0246e-005	5.52	5.7725e-007	5.13	1.7551e-008	5.04
$T_4=1.0000$	1.3282e+000	3.3243e-003	8.64	7.5516e-005	5.46	2.1889e-006	5.11	6.7036e-008	5.03
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3282e+000	1.5906e-002	6.38	3.6977e-004	5.43	1.0716e-005	5.11	3.2746e-007	5.03

Tabelle 16:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$T_1=0.2500$	1.2452e-001	6.3453e-002	0.97	3.2001e-002	0.99	1.6068e-002	0.99	8.0504e-003	1.00
$T_2=0.5000$	7.1935e-002	3.6414e-002	0.98	1.8304e-002	0.99	9.1751e-003	1.00	4.5933e-003	1.00
$T_3=0.7500$	4.8032e-002	2.3445e-002	1.03	1.1593e-002	1.02	5.7658e-003	1.01	2.8754e-003	1.00

$T_4=1.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.7348e-001	4.3438e-001	-1.32	2.1588e-001	1.01	1.0763e-001	1.00	5.3743e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	8.8046e-001	4.3438e-001	1.02	2.1588e-001	1.01	1.0777e-001	1.00	5.3828e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6595e-001	1.7572e-003	8.05	4.7529e-004	1.89	1.1849e-004	2.00	2.9526e-005	2.00
$T_1=0.2500$	3.1198e-001	1.5065e-003	7.69	4.2349e-004	1.83	1.0624e-004	1.99	2.6546e-005	2.00
$T_2=0.5000$	1.2405e-001	1.2096e-003	6.68	3.4211e-004	1.82	8.6132e-005	1.99	2.1560e-005	2.00
$T_3=0.7500$	1.4179e-001	5.2754e-004	8.07	1.4497e-004	1.86	3.6543e-005	1.99	9.1593e-006	2.00
$T_4=1.0000$	4.6595e-001	1.7572e-003	8.05	4.7529e-004	1.89	1.1849e-004	2.00	2.9526e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.6595e-001	4.1513e-003	6.81	1.3357e-003	1.64	3.4080e-004	1.97	8.6569e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.6595e-001	4.5346e-003	6.68	1.3676e-003	1.73	3.4685e-004	1.98	8.6938e-005	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6631e-001	2.0793e-004	11.13	5.4476e-006	5.25	4.6467e-007	3.55	5.4718e-008	3.09
$T_1=0.2500$	3.1133e-001	2.4297e-004	10.32	5.9821e-006	5.34	4.9533e-007	3.59	5.8237e-008	3.09
$T_2=0.5000$	1.2219e-001	2.0916e-004	9.19	5.7705e-006	5.18	5.1425e-007	3.49	6.1337e-008	3.07
$T_3=0.7500$	1.4236e-001	8.3595e-005	10.73	3.6108e-006	4.53	3.8334e-007	3.24	4.6948e-008	3.03
$T_4=1.0000$	4.6631e-001	2.0793e-004	11.13	5.4476e-006	5.25	4.6467e-007	3.55	5.4718e-008	3.09
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.6631e-001	2.1256e-003	7.78	2.8156e-005	6.24	1.2948e-006	4.44	1.4452e-007	3.16
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.6631e-001	2.2433e-003	7.70	2.8859e-005	6.28	1.3641e-006	4.40	1.4486e-007	3.24
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6612e-001	1.8140e-004	11.33	1.9961e-006	6.51	2.8549e-008	6.13	3.8987e-010	6.19
$T_1=0.2500$	3.1122e-001	2.1551e-004	10.50	2.3654e-006	6.51	3.3248e-008	6.15	4.4263e-010	6.23
$T_2=0.5000$	1.2217e-001	1.8036e-004	9.40	1.9612e-006	6.52	2.6667e-008	6.20	3.1731e-010	6.39
$T_3=0.7500$	1.4225e-001	5.9774e-005	11.22	6.0189e-007	6.63	6.4983e-009	6.53	3.7233e-011	7.45
$T_4=1.0000$	4.6612e-001	1.8140e-004	11.33	1.9961e-006	6.51	2.8549e-008	6.13	3.8986e-010	6.19
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.6612e-001	2.1023e-003	7.79	2.4355e-005	6.43	3.5634e-007	6.09	5.5456e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.6612e-001	2.2556e-003	7.69	2.5061e-005	6.49	3.5857e-007	6.13	5.5580e-009	6.01
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6613e-001	1.8171e-004	11.32	2.0153e-006	6.49	2.9725e-008	6.08	4.6167e-010	6.01
$T_1=0.2500$	3.1123e-001	2.1591e-004	10.49	2.3898e-006	6.50	3.4753e-008	6.10	5.3497e-010	6.02
$T_2=0.5000$	1.2217e-001	1.8089e-004	9.40	1.9936e-006	6.50	2.8657e-008	6.12	4.3798e-010	6.03
$T_3=0.7500$	1.4226e-001	6.0392e-005	11.20	6.3873e-007	6.56	8.7325e-009	6.19	1.2948e-010	6.08
$T_4=1.0000$	4.6613e-001	1.8171e-004	11.32	2.0153e-006	6.49	2.9725e-008	6.08	4.6167e-010	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.6613e-001	2.1021e-003	7.79	2.4345e-005	6.43	3.5574e-007	6.10	5.5058e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.6613e-001	2.2554e-003	7.69	2.5051e-005	6.49	3.5798e-007	6.13	5.5208e-009	6.02
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6613e-001	1.8170e-004	11.32	2.0152e-006	6.49	2.9722e-008	6.08	4.6159e-010	6.01

$T_1=0.2500$	3.1123e-001	2.1590e-004	10.49	2.3896e-006	6.50	3.4748e-008	6.10	5.3483e-010	6.02
$T_2=0.5000$	1.2217e-001	1.8088e-004	9.40	1.9933e-006	6.50	2.8650e-008	6.12	4.3776e-010	6.03
$T_3=0.7500$	1.4226e-001	6.0380e-005	11.20	6.3837e-007	6.56	8.7216e-009	6.19	1.2914e-010	6.08
$T_4=1.0000$	4.6613e-001	1.8170e-004	11.32	2.0152e-006	6.49	2.9722e-008	6.08	4.6159e-010	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6613e-001	2.1021e-003	7.79	2.4345e-005	6.43	3.5574e-007	6.10	5.5058e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.6613e-001	2.2554e-003	7.69	2.5052e-005	6.49	3.5798e-007	6.13	5.5209e-009	6.02
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.6613e-001	1.8170e-004	11.32	2.0152e-006	6.49	2.9722e-008	6.08	4.6159e-010	6.01
$T_1=0.2500$	3.1123e-001	2.1590e-004	10.49	2.3896e-006	6.50	3.4748e-008	6.10	5.3483e-010	6.02
$T_2=0.5000$	1.2217e-001	1.8088e-004	9.40	1.9933e-006	6.50	2.8650e-008	6.12	4.3776e-010	6.03
$T_3=0.7500$	1.4226e-001	6.0380e-005	11.20	6.3837e-007	6.56	8.7216e-009	6.19	1.2915e-010	6.08
$T_4=1.0000$	4.6613e-001	1.8170e-004	11.32	2.0152e-006	6.49	2.9722e-008	6.08	4.6159e-010	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6613e-001	2.1021e-003	7.79	2.4345e-005	6.43	3.5574e-007	6.10	5.5058e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.6613e-001	2.2554e-003	7.69	2.5052e-005	6.49	3.5798e-007	6.13	5.5209e-009	6.02

8.3. Nicht äquidistantes Gitter: Im Gegensatz zur Differentialvariante funktioniert die Integralvariante auch auf nicht äquidistantem Gitter. Wir betrachten sie zuerst auf Zufallsknoten:

Tabelle 17:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.5212e-001	1.2651e-001	2.91	5.8519e-002	1.11	2.8604e-002	1.03	1.4176e-002	1.01
$T_1=0.2500$	6.2352e-001	9.4255e-002	2.73	4.3139e-002	1.13	2.1004e-002	1.04	1.0391e-002	1.02
$T_2=0.5000$	2.6667e-001	5.4379e-002	2.29	2.4731e-002	1.14	1.2007e-002	1.04	5.9316e-003	1.02
$T_3=0.7500$	3.5948e-001	3.0257e-002	3.57	1.4695e-002	1.04	7.3153e-003	1.01	3.6567e-003	1.00
$T_4=1.0000$	9.5212e-001	1.2651e-001	2.91	5.8519e-002	1.11	2.8604e-002	1.03	1.4176e-002	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.5212e-001	5.9247e-001	0.68	2.8010e-001	1.08	1.3810e-001	1.02	6.8727e-002	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.6870e+000	5.9247e-001	1.51	2.8010e-001	1.08	1.3810e-001	1.02	6.8727e-002	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7027e+000	3.3365e-003	10.12	9.8820e-004	1.76	2.6830e-004	1.88	6.6443e-005	2.01
$T_1=0.2500$	2.1995e+000	2.4516e-003	9.81	8.2994e-004	1.56	2.2336e-004	1.89	5.5594e-005	2.01
$T_2=0.5000$	9.3237e-001	1.8213e-003	9.00	6.0602e-004	1.59	1.6119e-004	1.91	4.0380e-005	2.00
$T_3=0.7500$	1.4235e+000	2.1873e-003	9.35	2.8938e-004	2.92	7.2913e-005	1.99	1.8147e-005	2.01
$T_4=1.0000$	3.7027e+000	3.3365e-003	10.12	9.8820e-004	1.76	2.6830e-004	1.88	6.6443e-005	2.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.7027e+000	2.9387e-002	6.98	3.2650e-003	3.17	9.6095e-004	1.76	2.5253e-004	1.93

$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.7027e+000	3.1475e-002	6.88	3.2650e-003	3.27	9.6095e-004	1.76	2.5253e-004	1.93
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7035e+000	8.1365e-003	8.83	2.0390e-004	5.32	7.4496e-006	4.77	4.0693e-007	4.19
$T_1=0.2500$	2.1787e+000	5.6210e-003	8.60	1.4947e-004	5.23	5.8794e-006	4.67	3.5657e-007	4.04
$T_2=0.5000$	8.8194e-001	3.0554e-003	8.17	8.8710e-005	5.11	4.0009e-006	4.47	2.9076e-007	3.78
$T_3=0.7500$	1.4554e+000	2.4399e-003	9.22	5.0484e-005	5.59	1.5999e-006	4.98	1.4254e-007	3.49
$T_4=1.0000$	3.7035e+000	8.1365e-003	8.83	2.0390e-004	5.32	7.4496e-006	4.77	4.0693e-007	4.19
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.7035e+000	4.0286e-002	6.52	9.8150e-004	5.36	3.2379e-005	4.92	1.4755e-006	4.46
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.7035e+000	4.0286e-002	6.52	9.8150e-004	5.36	3.2379e-005	4.92	1.4755e-006	4.46
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7021e+000	7.9779e-003	8.86	1.8722e-004	5.41	5.4947e-006	5.09	1.6900e-007	5.02
$T_1=0.2500$	2.1782e+000	5.4715e-003	8.64	1.3332e-004	5.36	3.9677e-006	5.07	1.2265e-007	5.02
$T_2=0.5000$	8.8409e-001	2.9253e-003	8.24	7.4180e-005	5.30	2.2347e-006	5.05	6.9252e-008	5.01
$T_3=0.7500$	1.4540e+000	2.4662e-003	9.20	5.2833e-005	5.54	1.4946e-006	5.14	4.5445e-008	5.04
$T_4=1.0000$	3.7021e+000	7.9779e-003	8.86	1.8722e-004	5.41	5.4947e-006	5.09	1.6900e-007	5.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.7021e+000	3.9923e-002	6.53	9.3976e-004	5.41	2.7274e-005	5.11	8.3297e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.7021e+000	3.9923e-002	6.53	9.3976e-004	5.41	2.7274e-005	5.11	8.3297e-007	5.03
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7022e+000	7.9817e-003	8.86	1.8742e-004	5.41	5.5059e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$T_1=0.2500$	2.1783e+000	5.4757e-003	8.64	1.3354e-004	5.36	3.9808e-006	5.07	1.2345e-007	5.01
$T_2=0.5000$	8.8409e-001	2.9296e-003	8.24	7.4412e-005	5.30	2.2484e-006	5.05	7.0089e-008	5.00
$T_3=0.7500$	1.4541e+000	2.4633e-003	9.21	5.2689e-005	5.55	1.4864e-006	5.15	4.4943e-008	5.05
$T_4=1.0000$	3.7022e+000	7.9817e-003	8.86	1.8742e-004	5.41	5.5059e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7022e+000	7.9816e-003	8.86	1.8741e-004	5.41	5.5058e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$T_1=0.2500$	2.1783e+000	5.4756e-003	8.64	1.3354e-004	5.36	3.9807e-006	5.07	1.2345e-007	5.01
$T_2=0.5000$	8.8408e-001	2.9295e-003	8.24	7.4409e-005	5.30	2.2483e-006	5.05	7.0087e-008	5.00
$T_3=0.7500$	1.4541e+000	2.4634e-003	9.21	5.2691e-005	5.55	1.4864e-006	5.15	4.4946e-008	5.05
$T_4=1.0000$	3.7022e+000	7.9816e-003	8.86	1.8741e-004	5.41	5.5058e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.7022e+000	7.9816e-003	8.86	1.8741e-004	5.41	5.5058e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$T_1=0.2500$	2.1783e+000	5.4756e-003	8.64	1.3354e-004	5.36	3.9807e-006	5.07	1.2345e-007	5.01

$T_2=0.5000$	8.8408e-001	2.9295e-003	8.24	7.4409e-005	5.30	2.2483e-006	5.05	7.0087e-008	5.00
$T_3=0.7500$	1.4541e+000	2.4634e-003	9.21	5.2691e-005	5.55	1.4864e-006	5.15	4.4946e-008	5.05
$T_4=1.0000$	3.7022e+000	7.9816e-003	8.86	1.8741e-004	5.41	5.5058e-006	5.09	1.6968e-007	5.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.7022e+000	3.9929e-002	6.53	9.4008e-004	5.41	2.7293e-005	5.11	8.3411e-007	5.03

Tabelle 18:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.3013e-001	9.1496e-002	2.53	4.5550e-002	1.01	2.2720e-002	1.00	1.1344e-002	1.00
$T_1=0.2500$	3.6318e-001	6.7130e-002	2.44	3.3334e-002	1.01	1.6623e-002	1.00	8.3000e-003	1.00
$T_2=0.5000$	1.6326e-001	3.8588e-002	2.08	1.9077e-002	1.02	9.4947e-003	1.01	4.7362e-003	1.00
$T_3=0.7500$	1.1531e-001	2.3389e-002	2.30	1.1803e-002	0.99	5.9012e-003	1.00	2.9488e-003	1.00
$T_4=1.0000$	5.3013e-001	9.1496e-002	2.53	4.5550e-002	1.01	2.2720e-002	1.00	1.1344e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.3013e-001	4.4375e-001	0.26	2.2168e-001	1.00	1.1060e-001	1.00	5.5224e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0820e+000	4.4375e-001	1.29	2.2168e-001	1.00	1.1060e-001	1.00	5.5286e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.4936e-001	1.4118e-003	8.85	3.9921e-004	1.82	1.0290e-004	1.96	2.5985e-005	1.99
$T_1=0.2500$	4.1491e-001	1.3802e-003	8.23	3.9670e-004	1.80	1.0004e-004	1.99	2.5000e-005	2.00
$T_2=0.5000$	1.3761e-001	1.2383e-003	6.80	3.4964e-004	1.82	8.6163e-005	2.02	2.1309e-005	2.02
$T_3=0.7500$	2.3950e-001	8.2554e-004	8.18	1.7286e-004	2.26	3.9423e-005	2.13	9.4315e-006	2.06
$T_4=1.0000$	6.4936e-001	1.4118e-003	8.85	3.9921e-004	1.82	1.0290e-004	1.96	2.5985e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.4936e-001	4.8786e-003	7.06	6.9233e-004	2.82	1.7070e-004	2.02	4.1644e-005	2.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.4936e-001	5.8049e-003	6.81	1.3423e-003	2.11	2.4046e-004	2.48	4.9699e-005	2.27
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.5798e-001	3.5307e-004	11.07	3.9542e-006	6.48	1.2377e-007	5.00	1.1821e-008	3.39
$T_1=0.2500$	4.9801e-001	4.0087e-004	10.28	5.2279e-006	6.26	2.0411e-007	4.68	1.9785e-008	3.37
$T_2=0.5000$	1.9025e-001	3.3024e-004	9.17	5.2564e-006	5.97	2.8045e-007	4.23	2.9721e-008	3.24
$T_3=0.7500$	2.6009e-001	1.0915e-004	11.22	3.2013e-006	5.09	2.7610e-007	3.54	3.2220e-008	3.10
$T_4=1.0000$	7.5798e-001	3.5307e-004	11.07	3.9542e-006	6.48	1.2377e-007	5.00	1.1821e-008	3.39
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5798e-001	3.5369e-003	7.74	4.0378e-005	6.45	7.6957e-007	5.71	3.2816e-008	4.55
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5798e-001	3.6056e-003	7.72	4.0818e-005	6.46	1.0055e-006	5.34	5.1745e-008	4.28
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	7.5440e-001	3.5588e-004	11.05	3.6439e-006	6.61	5.1457e-008	6.15	7.8303e-010	6.04
$T_1=0.2500$	4.9449e-001	3.9367e-004	10.29	4.1575e-006	6.57	5.8908e-008	6.14	8.9181e-010	6.05
$T_2=0.5000$	1.8671e-001	3.1397e-004	9.22	3.3776e-006	6.54	4.7747e-008	6.14	7.1225e-010	6.07
$T_3=0.7500$	2.6070e-001	8.8819e-005	11.52	9.8315e-007	6.50	1.3426e-008	6.19	1.7628e-010	6.25
$T_4=1.0000$	7.5440e-001	3.5588e-004	11.05	3.6439e-006	6.61	5.1457e-008	6.15	7.8303e-010	6.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5440e-001	3.5082e-003	7.75	4.0014e-005	6.45	5.8630e-007	6.09	9.0903e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5440e-001	3.6045e-003	7.71	4.0750e-005	6.47	5.8863e-007	6.11	9.1009e-009	6.02

Iterationsschritt 4:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$T_1=0.2500$	4.9458e-001	3.9359e-004	10.30	4.1564e-006	6.57
$T_2=0.5000$	1.8683e-001	3.1394e-004	9.22	3.3798e-006	6.54
$T_3=0.7500$	2.6066e-001	8.881e-005	11.52	9.9046e-007	6.49
$T_4=1.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.5086e-003	7.75	4.0015e-005	6.45
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.6043e-003	7.71	4.0752e-005	6.47

Iterationsschritt 5:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$T_1=0.2500$	4.9458e-001	3.9360e-004	10.30	4.1564e-006	6.57
$T_2=0.5000$	1.8682e-001	3.1394e-004	9.22	3.3798e-006	6.54
$T_3=0.7500$	2.6066e-001	8.883e-005	11.52	9.9046e-007	6.49
$T_4=1.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.5086e-003	7.75	4.0015e-005	6.45
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.6043e-003	7.71	4.0752e-005	6.47

Iterationsschritt 6:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$T_1=0.2500$	4.9458e-001	3.9359e-004	10.30	4.1564e-006	6.57
$T_2=0.5000$	1.8682e-001	3.1394e-004	9.22	3.3798e-006	6.54
$T_3=0.7500$	2.6066e-001	8.883e-005	11.52	9.9046e-007	6.49
$T_4=1.0000$	7.5448e-001	3.5575e-004	11.05	3.6406e-006	6.61
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.5086e-003	7.75	4.0015e-005	6.45
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5448e-001	3.6043e-003	7.71	4.0752e-005	6.47

Die Integralvariante funktioniert auch für nichtlineare Beispiele auf beliebigem Gitter:

Tabelle 19:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)
einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8)
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)

Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.4124e-003	1.5845e-003	1.11	7.6640e-004	1.05	3.7718e-004	1.02	1.8713e-004	1.01
$T_1=1.0000$	3.4124e-003	1.5845e-003	1.11	7.6640e-004	1.05	3.7718e-004	1.02	1.8713e-004	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4124e-003	1.5845e-003	1.11	8.7251e-004	0.86	4.2889e-004	1.02	2.1265e-004	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.8510e-003	1.7518e-003	1.14	8.7251e-004	1.01	4.2924e-004	1.02	2.1279e-004	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8373e-004	5.1050e-005	1.85	1.2597e-005	2.02	3.1066e-006	2.02	7.7060e-007	2.01
$T_1=1.0000$	1.8373e-004	5.1050e-005	1.85	1.2597e-005	2.02	3.1066e-006	2.02	7.7060e-007	2.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8373e-004	8.7809e-005	1.07	2.0756e-005	2.08	5.1034e-006	2.02	1.2621e-006	2.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.1692e-004	8.7809e-005	2.25	2.0833e-005	2.08	5.1302e-006	2.02	1.2621e-006	2.02
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.5872e-005	2.4979e-006	4.20	2.1465e-007	3.54	2.3633e-008	3.18	2.8358e-009	3.06
$T_1=1.0000$	4.5872e-005	2.4979e-006	4.20	2.1465e-007	3.54	2.3633e-008	3.18	2.8358e-009	3.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5872e-005	6.3595e-006	2.85	6.1277e-007	3.38	6.9383e-008	3.14	8.3417e-009	3.06
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.5872e-005	6.3595e-006	2.85	6.1277e-007	3.38	6.9383e-008	3.14	8.3417e-009	3.06
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.2595e-005	8.7992e-007	5.21	2.4549e-008	5.16	6.8357e-010	5.17	1.8139e-011	5.24
$T_1=1.0000$	3.2595e-005	8.7992e-007	5.21	2.4549e-008	5.16	6.8357e-010	5.17	1.8139e-011	5.24
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.2595e-005	8.7992e-007	5.21	2.4549e-008	5.16	6.8357e-010	5.17	2.7515e-011	4.63
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.2595e-005	1.0208e-006	5.00	3.5228e-008	4.86	1.0863e-009	5.02	3.1383e-011	5.11
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.3237e-005	9.1122e-007	5.19	2.6100e-008	5.13	7.6998e-010	5.08	2.3248e-011	5.05
$T_1=1.0000$	3.3237e-005	9.1122e-007	5.19	2.6100e-008	5.13	7.6998e-010	5.08	2.3248e-011	5.05
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.3237e-005	1.1806e-006	4.82	3.4379e-008	5.10	1.0197e-009	5.08	3.0860e-011	5.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.3237e-005	1.1806e-006	4.82	3.4379e-008	5.10	1.0197e-009	5.08	3.0860e-011	5.05
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.3222e-005	9.1259e-007	5.19	2.6154e-008	5.12	7.7173e-010	5.08	2.3303e-011	5.05
$T_1=1.0000$	3.3222e-005	9.1259e-007	5.19	2.6154e-008	5.12	7.7173e-010	5.08	2.3303e-011	5.05
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.3222e-005	1.1618e-006	4.84	3.3944e-008	5.10	1.0079e-009	5.07	3.0519e-011	5.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.3222e-005	1.1618e-006	4.84	3.3944e-008	5.10	1.0079e-009	5.07	3.0519e-011	5.05
Iterationsschritt 6:									

$T_0=0.0000$	9.0632e-006	1.4172e-007	6.00	2.1455e-009	6.05	3.3014e-011	6.02	9.8242e-013	5.07
$T_1=1.0000$	9.0632e-006	1.4172e-007	6.00	2.1455e-009	6.05	3.3014e-011	6.02	9.8244e-013	5.07
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.0632e-006	1.7190e-007	5.72	2.5795e-009	6.06	3.7416e-011	6.11	9.8244e-013	5.25
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.0632e-006	1.7190e-007	5.72	2.5795e-009	6.06	3.7416e-011	6.11	9.8244e-013	5.25
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.0454e-006	1.4087e-007	6.00	2.1196e-009	6.05	3.2224e-011	6.04	9.5805e-013	5.07
$T_1=1.0000$	9.0454e-006	1.4087e-007	6.00	2.1196e-009	6.05	3.2224e-011	6.04	9.5812e-013	5.07
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.0454e-006	1.7659e-007	5.68	2.6971e-009	6.03	4.0716e-011	6.05	9.5812e-013	5.41
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.0454e-006	1.7659e-007	5.68	2.6971e-009	6.03	4.0716e-011	6.05	9.5812e-013	5.41
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.0498e-006	1.4095e-007	6.00	2.1206e-009	6.05	3.2240e-011	6.04	9.5831e-013	5.07
$T_1=1.0000$	9.0498e-006	1.4095e-007	6.00	2.1206e-009	6.05	3.2240e-011	6.04	9.5834e-013	5.07
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.0498e-006	1.7639e-007	5.68	2.6949e-009	6.03	4.0685e-011	6.05	9.5834e-013	5.41
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.0498e-006	1.7639e-007	5.68	2.6949e-009	6.03	4.0685e-011	6.05	9.5834e-013	5.41

8.4. Gauß-Knoten. Man kann natürlich auch spezielle nicht-äquidistante Knoten zugrundelegen, z.B. Gauß-Knoten. Das sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms, die für die Integration, und damit für das Lösen von Differentialgleichungen besonders günstige Eigenschaften haben, die aber nur an den Intervall-Endpunkten voll zur Geltung kommen. Dort erwarten wir bei n Gaussknoten Ordnungen bis zu $2n$. Das ist die sogenannte Superkonvergenz. Allerdings müssen wir, da wir an den Intervallendpunkten Knoten benötigen, dort aber kein Gauß-Knoten liegt, einen Knoten zusätzlich ‘aufwenden’. Wir erreichen also für Polynomgrad m an den Intervallenden Ordnung $2(m - 1)$.

Tabelle 21:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.9729e+000	2.5427e-001	4.29	1.1420e-001	1.15	5.5991e-002	1.03	2.7915e-002	1.00
$T_1=0.2500$	3.2662e+000	1.7761e-001	4.20	8.2121e-002	1.11	4.0651e-002	1.01	2.0349e-002	1.00
$T_2=0.5000$	1.4731e+000	1.0200e-001	3.85	4.7049e-002	1.12	2.3244e-002	1.02	1.1620e-002	1.00
$T_3=0.7500$	1.3261e+000	7.6614e-002	4.11	3.1446e-002	1.28	1.4951e-002	1.07	7.3540e-003	1.02
$T_4=1.0000$	4.9729e+000	2.5427e-001	4.29	1.1420e-001	1.15	5.5991e-002	1.03	2.7915e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.9729e+000	1.3210e+000	1.91	5.7327e-001	1.20	2.7678e-001	1.05	1.3694e-001	1.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.7441e+000	1.3210e+000	2.12	5.7485e-001	1.20	2.7781e-001	1.05	1.3728e-001	1.02
Iterationsschritt 1:									

Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6444e+000	2.2513e-002	6.19	3.7536e-003	2.58	8.4794e-004	2.15	2.0574e-004	2.04
$T_1=0.2500$	9.4369e-001	1.9470e-002	5.60	3.2554e-003	2.58	7.4150e-004	2.13	1.8096e-004	2.03
$T_2=0.5000$	1.6079e-001	1.4357e-002	3.49	2.5148e-003	2.51	5.8306e-004	2.11	1.4331e-004	2.02
$T_3=0.7500$	7.2356e-001	5.3187e-003	7.09	1.0356e-003	2.36	2.4699e-004	2.07	6.1196e-005	2.01
$T_4=1.0000$	1.6444e+000	2.2513e-002	6.19	3.7536e-003	2.58	8.4794e-004	2.15	2.0574e-004	2.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6444e+000	8.8149e-002	4.22	1.2143e-002	2.86	2.6698e-003	2.19	6.6262e-004	2.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.4152e+000	1.5792e-001	3.93	1.4454e-002	3.45	2.6698e-003	2.44	6.6262e-004	2.01
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8304e+000	6.2981e-003	8.18	2.4869e-004	4.66	1.1780e-005	4.40	6.9134e-007	4.09
$T_1=0.2500$	1.1639e+000	6.0682e-003	7.58	2.4422e-004	4.64	1.1520e-005	4.41	6.9095e-007	4.06
$T_2=0.5000$	3.9057e-001	4.0346e-003	6.60	1.5713e-004	4.68	7.2082e-006	4.45	6.8199e-007	3.40
$T_3=0.7500$	6.1685e-001	5.2011e-004	10.21	1.7509e-005	4.89	4.2810e-006	2.03	6.8877e-007	2.64
$T_4=1.0000$	1.8304e+000	6.2981e-003	8.18	2.4869e-004	4.66	1.1780e-005	4.40	6.9134e-007	4.09
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8304e+000	5.0993e-002	5.17	2.3258e-003	4.45	1.3432e-004	4.11	8.5195e-006	3.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6134e+000	1.5964e-001	4.03	1.0669e-002	3.90	6.7652e-004	3.98	4.2563e-005	3.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8228e+000	6.8708e-003	8.05	3.0703e-004	4.48	1.7834e-005	4.11	1.0953e-006	4.03
$T_1=0.2500$	1.1502e+000	6.6349e-003	7.44	3.0311e-004	4.45	1.7697e-005	4.10	1.0884e-006	4.02
$T_2=0.5000$	3.6936e-001	4.6335e-003	6.32	2.1666e-004	4.42	1.2721e-005	4.09	7.8371e-007	4.02
$T_3=0.7500$	6.3580e-001	1.0126e-003	9.29	4.9218e-005	4.36	2.9522e-006	4.06	1.8359e-007	4.01
$T_4=1.0000$	1.8228e+000	6.8708e-003	8.05	3.0703e-004	4.48	1.7834e-005	4.11	1.0953e-006	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8228e+000	5.1754e-002	5.14	2.4254e-003	4.42	1.4229e-004	4.09	8.8083e-006	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6041e+000	1.5940e-001	4.03	1.0665e-002	3.90	6.7497e-004	3.98	4.2221e-005	4.00
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8228e+000	6.8505e-003	8.06	3.0594e-004	4.48	1.7770e-005	4.11	1.0914e-006	4.03
$T_1=0.2500$	1.1507e+000	6.6093e-003	7.44	3.0173e-004	4.45	1.7616e-005	4.10	1.0835e-006	4.02
$T_2=0.5000$	3.7084e-001	4.5978e-003	6.33	2.1480e-004	4.42	1.2612e-005	4.09	7.7705e-007	4.02
$T_3=0.7500$	6.3354e-001	9.7540e-004	9.34	4.7190e-005	4.37	2.8338e-006	4.06	1.7642e-007	4.01
$T_4=1.0000$	1.8228e+000	6.8505e-003	8.06	3.0594e-004	4.48	1.7770e-005	4.11	1.0914e-006	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8228e+000	5.1724e-002	5.14	2.4233e-003	4.42	1.4216e-004	4.09	8.7994e-006	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6042e+000	1.5940e-001	4.03	1.0665e-002	3.90	6.7498e-004	3.98	4.2222e-005	4.00

Tabelle 22:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)
Gitter: 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)

Iterationsschritt 0:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.0539e+000	1.6798e+000	1.85	1.9189e-001	3.13	8.7686e-002	1.13	4.3128e-002	1.02
$T_1=0.5000$	1.8671e+000	4.3300e-001	2.11	7.8128e-002	2.47	3.6303e-002	1.11	1.7938e-002	1.02
$T_2=1.0000$	6.0539e+000	1.6798e+000	1.85	1.9189e-001	3.13	8.7686e-002	1.13	4.3128e-002	1.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.0539e+000	1.6798e+000	1.85	9.7093e-001	0.79	4.3590e-001	1.16	2.1222e-001	1.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.0347e+000	2.3736e+000	1.57	9.7698e-001	1.28	4.3801e-001	1.16	2.1283e-001	1.04
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.8179e+000	2.9293e-001	3.70	9.1216e-003	5.01	1.9991e-003	2.19	4.8042e-004	2.06
$T_1=0.5000$	5.1556e-001	1.3263e-001	1.96	5.8219e-003	4.51	1.3657e-003	2.09	3.3627e-004	2.02
$T_2=1.0000$	3.8179e+000	2.9293e-001	3.70	9.1216e-003	5.01	1.9991e-003	2.19	4.8042e-004	2.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.8179e+000	2.9293e-001	3.70	2.3427e-002	3.64	5.8499e-003	2.00	1.4548e-003	2.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.5831e+000	7.4533e-001	2.91	2.4586e-002	4.92	6.0470e-003	2.02	1.4786e-003	2.03
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.9315e+000	1.4911e-001	4.72	4.7121e-004	8.31	3.4833e-005	3.76	3.9466e-006	3.14
$T_1=0.5000$	8.5123e-001	1.8587e-002	5.52	3.9667e-004	5.55	3.4720e-005	3.51	4.0880e-006	3.09
$T_2=1.0000$	3.9315e+000	1.4911e-001	4.72	4.7121e-004	8.31	3.4833e-005	3.76	3.9466e-006	3.14
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9315e+000	1.4911e-001	4.72	1.6555e-003	6.49	9.7298e-005	4.09	1.1271e-005	3.11
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.6932e+000	5.8091e-001	3.29	2.0563e-002	4.82	6.9531e-004	4.89	2.4573e-005	4.82
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.9304e+000	1.5761e-001	4.64	1.7307e-004	9.83	1.6445e-006	6.72	1.7056e-008	6.59
$T_1=0.5000$	8.0911e-001	2.9268e-002	4.79	9.7046e-005	8.24	6.9950e-007	7.12	2.5372e-008	4.79
$T_2=1.0000$	3.9304e+000	1.5761e-001	4.64	1.7307e-004	9.83	1.6445e-006	6.72	1.7056e-008	6.59
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9304e+000	1.5761e-001	4.64	1.1726e-003	7.07	1.2819e-005	6.52	1.8591e-007	6.11
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.6920e+000	5.9001e-001	3.27	2.0356e-002	4.86	6.7996e-004	4.90	2.1342e-005	4.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.9296e+000	1.5723e-001	4.64	1.8039e-004	9.77	2.0059e-006	6.49	2.9102e-008	6.11
$T_1=0.5000$	8.1407e-001	2.8471e-002	4.84	1.0871e-004	8.03	1.2517e-006	6.44	1.8398e-008	6.09
$T_2=1.0000$	3.9296e+000	1.5723e-001	4.64	1.8039e-004	9.77	2.0059e-006	6.49	2.9102e-008	6.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9296e+000	1.5723e-001	4.64	1.1832e-003	7.05	1.3603e-005	6.44	1.9859e-007	6.10
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.6911e+000	5.8961e-001	3.27	2.0363e-002	4.86	6.8001e-004	4.90	2.1345e-005	4.99
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.8022e-004	9.77	2.0015e-006	6.49	2.8976e-008	6.11

$T_1=0.5000$	8.1353e-001	2.8520e-002	4.83	1.0829e-004	8.04	1.2409e-006	6.45	1.8084e-008	6.10
$T_2=1.0000$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.8022e-004	9.77	2.0015e-006	6.49	2.8976e-008	6.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.1831e-003	7.05	1.3594e-005	6.44	1.9828e-007	6.10
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.6913e+000	5.8962e-001	3.27	2.0363e-002	4.86	6.8001e-004	4.90	2.1345e-005	4.99
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.8022e-004	9.77	2.0016e-006	6.49	2.8977e-008	6.11
$T_1=0.5000$	8.1358e-001	2.8518e-002	4.83	1.0830e-004	8.04	1.2411e-006	6.45	1.8086e-008	6.10
$T_2=1.0000$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.8022e-004	9.77	2.0016e-006	6.49	2.8977e-008	6.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9298e+000	1.5724e-001	4.64	1.1831e-003	7.05	1.3594e-005	6.44	1.9828e-007	6.10
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.6913e+000	5.8962e-001	3.27	2.0363e-002	4.86	6.8001e-004	4.90	2.1345e-005	4.99

Tabelle 23:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.1772e-001	1.3841e+000	-0.76	1.5451e-001	3.16	7.0461e-002	1.13	3.4631e-002	1.02
$T_1=0.5000$	2.3574e-001	3.2761e-001	-0.47	6.3115e-002	2.38	2.9216e-002	1.11	1.4413e-002	1.02
$T_2=1.0000$	8.1772e-001	1.3841e+000	-0.76	1.5451e-001	3.16	7.0461e-002	1.13	3.4631e-002	1.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.1772e-001	1.3841e+000	-0.76	7.7262e-001	0.84	3.4845e-001	1.15	1.6998e-001	1.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.3851e+000	2.0792e+000	0.70	7.7742e-001	1.42	3.4973e-001	1.15	1.7032e-001	1.04
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5685e-001	5.5227e-002	3.96	5.8934e-003	3.23	1.2716e-003	2.21	3.0613e-004	2.05
$T_1=0.5000$	1.3260e-001	5.6442e-002	1.23	3.8445e-003	3.88	8.7937e-004	2.13	2.1599e-004	2.03
$T_2=1.0000$	8.5685e-001	5.5227e-002	3.96	5.8934e-003	3.23	1.2716e-003	2.21	3.0613e-004	2.05
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5685e-001	6.3167e-002	3.76	1.6310e-002	1.95	3.7525e-003	2.12	9.2499e-004	2.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.2947e+000	1.3796e-001	4.58	1.8511e-002	2.90	3.8021e-003	2.28	9.3313e-004	2.03
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5860e-001	9.9987e-003	6.42	1.5670e-004	6.00	1.6564e-005	3.24	1.9673e-006	3.07
$T_1=0.5000$	1.5241e-001	5.1288e-003	4.89	1.5330e-004	5.06	1.7052e-005	3.17	2.0663e-006	3.04
$T_2=1.0000$	8.5860e-001	9.9987e-003	6.42	1.5670e-004	6.00	1.6564e-005	3.24	1.9673e-006	3.07
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5860e-001	9.9987e-003	6.42	3.9225e-004	4.67	4.6072e-005	3.09	5.6514e-006	3.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1832e+000	1.1765e-001	4.76	2.3705e-003	5.63	7.4186e-005	5.00	5.8467e-006	3.67
Iterationsschritt 3:									

Punkte:	10	20	40	80	160
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5823e-001	6.7645e-003	6.99	5.7010e-006	10.21
$T_1=0.5000$	1.4823e-001	8.1555e-004	7.51	6.2553e-006	7.03
$T_2=1.0000$	8.5823e-001	6.7645e-003	6.99	5.7010e-006	10.21
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5823e-001	6.7645e-003	6.99	2.1347e-005	8.31
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1918e+000	1.1444e-001	4.80	2.2158e-003	5.69

Iterationsschritt 4:					
Punkte:	10	20	40	80	160
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5802e-001	6.8958e-003	6.96	2.2672e-006	11.57
$T_1=0.5000$	1.4864e-001	1.0645e-003	7.13	1.1587e-006	9.84
$T_2=1.0000$	8.5802e-001	6.8958e-003	6.96	2.2672e-006	11.57
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5802e-001	6.8958e-003	6.96	1.4005e-005	8.94
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1910e+000	1.1457e-001	4.80	2.2083e-003	5.70

Iterationsschritt 5:					
Punkte:	10	20	40	80	160
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5807e-001	6.8917e-003	6.96	2.3259e-006	11.53
$T_1=0.5000$	1.4862e-001	1.0517e-003	7.14	1.2938e-006	9.67
$T_2=1.0000$	8.5807e-001	6.8917e-003	6.96	2.3259e-006	11.53
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5807e-001	6.8917e-003	6.96	1.4129e-005	8.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1911e+000	1.1457e-001	4.80	2.2084e-003	5.70

Iterationsschritt 6:					
Punkte:	10	20	40	80	160
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5806e-001	6.8918e-003	6.96	2.3248e-006	11.53
$T_1=0.5000$	1.4862e-001	1.0522e-003	7.14	1.2901e-006	9.67
$T_2=1.0000$	8.5806e-001	6.8918e-003	6.96	2.3248e-006	11.53
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5806e-001	6.8918e-003	6.96	1.4126e-005	8.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1911e+000	1.1457e-001	4.80	2.2084e-003	5.70

Die Superkonvergenzphänomene zeigen sich wie erwartet. Auch an den Zwischenpunkten ($t_{i,j}$) erreicht man die Ordnung $m + 1$ bei der Verwendung von Gauß-Knoten. Dieses Phänomen ist beispielunabhängig.

8.5. Steife Randwertprobleme: Auch hier ergeben sich auf äquidistantem Gitter keinerlei Probleme mit der Steifheit: Zur Illustration zwei Tabellen:

Tabelle 24:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)					
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)					
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)					
	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
	$t_{i,1}$	$t_{i,2}$	$t_{i,3}$	$t_{i,4}$	$t_{i,5}$
	Iterationsschritt 0:				

Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.4546e-002	2.8682e-002	0.93	1.4725e-002	0.96	7.4627e-003	0.98	3.7570e-003	0.99						
$T_2=1.0000$	5.5262e-002	2.8073e-002	0.98	1.4156e-002	0.99	7.1090e-003	0.99	3.5624e-003	1.00						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	5.5262e-002	2.9050e-002	0.93	1.6701e-002	0.80	8.4555e-003	0.98	4.2546e-003	0.99						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1819e-002	3.2505e-002	0.93	1.6701e-002	0.96	8.4555e-003	0.98	4.2548e-003	0.99						
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.9179e-003	5.4644e-004	1.81	1.4762e-004	1.89	3.8421e-005	1.94	9.8031e-006	1.97						
$T_2=1.0000$	6.1240e-003	1.6028e-003	1.93	4.1131e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	6.1240e-003	1.6028e-003	1.93	4.1131e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1240e-003	1.6028e-003	1.93	4.1131e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99						
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	3.4791e-005	2.0292e-006	4.10	2.7705e-007	2.87	4.1918e-008	2.72	5.9226e-009	2.82						
$T_2=1.0000$	4.9649e-004	6.4500e-005	2.94	8.3136e-006	2.96	1.0608e-006	2.97	1.3418e-007	2.98						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	4.9649e-004	6.4500e-005	2.94	8.3136e-006	2.96	1.0608e-006	2.97	1.3436e-007	2.98						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.9649e-004	6.4527e-005	2.94	8.3375e-006	2.95	1.0633e-006	2.97	1.3448e-007	2.98						
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	4.4082e-005	1.2060e-006	5.19	2.0991e-008	5.84	6.1851e-010	5.08	1.0416e-010	2.57						
$T_2=1.0000$	6.5441e-005	3.6302e-006	4.17	1.9068e-007	4.25	1.0429e-008	4.19	5.9973e-010	4.12						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	6.5441e-005	3.6302e-006	4.17	1.9068e-007	4.25	1.0872e-008	4.13	8.2054e-010	3.73						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3402e-004	4.8044e-006	4.80	2.2603e-007	4.41	3.6148e-008	2.64	8.0790e-009	2.16						
Iterationsschritt 4:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.5110e-005	1.9174e-006	4.85	6.5700e-008	4.87	2.1729e-009	4.92	7.0019e-011	4.96						
$T_2=1.0000$	4.0679e-005	1.7920e-006	4.50	6.4544e-008	4.80	2.1526e-009	4.91	6.9423e-011	4.95						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	5.5110e-005	1.9775e-006	4.80	7.5917e-008	4.70	2.5157e-009	4.92	8.0377e-010	1.65						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2220e-004	2.9443e-006	5.38	9.3805e-008	4.97	6.8623e-009	3.77	3.7006e-009	0.89						
Iterationsschritt 5:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.6555e-005	1.9690e-006	4.84	6.7422e-008	4.87	2.2286e-009	4.92	7.1787e-011	4.96						
$T_2=1.0000$	3.9814e-005	1.7562e-006	4.50	6.3242e-008	4.80	2.1086e-009	4.91	6.7994e-011	4.95						
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	5.6555e-005	1.9690e-006	4.84	7.6248e-008	4.69	2.5960e-009	4.88	4.5601e-010	2.51						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2140e-004	2.9336e-006	5.37	9.2977e-008	4.98	4.7436e-009	4.29	1.1043e-009	2.10						
Iterationsschritt 6:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.6694e-005	1.9717e-006	4.85	6.7470e-008	4.87	2.2294e-009	4.92	7.1800e-011	4.96						

$T_2=1.0000$	3.9838e-005	1.7564e-006	4.50	6.3245e-008	4.80	2.1087e-009	4.91	6.7995e-011	4.95
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.6694e-005	1.9717e-006	4.85	7.6270e-008	4.69	2.5243e-009	4.92	4.1831e-010	2.59
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2135e-004	2.9340e-006	5.37	9.2972e-008	4.98	2.7887e-009	5.06	5.5060e-010	2.34
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.6706e-005	1.9718e-006	4.85	6.7471e-008	4.87	2.2294e-009	4.92	7.1800e-011	4.96
$T_2=1.0000$	3.9847e-005	1.7565e-006	4.50	6.3246e-008	4.80	2.1087e-009	4.91	6.7994e-011	4.95
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.6706e-005	1.9718e-006	4.85	7.6270e-008	4.69	2.5244e-009	4.92	8.1318e-011	4.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2134e-004	2.9340e-006	5.37	9.2972e-008	4.98	2.7887e-009	5.06	1.6314e-010	4.10
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.6706e-005	1.9718e-006	4.85	6.7471e-008	4.87	2.2294e-009	4.92	7.1800e-011	4.96
$T_2=1.0000$	3.9848e-005	1.7565e-006	4.50	6.3246e-008	4.80	2.1087e-009	4.91	6.7995e-011	4.95
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.6706e-005	1.9718e-006	4.85	7.6271e-008	4.69	2.5244e-009	4.92	8.1318e-011	4.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2134e-004	2.9340e-006	5.37	9.2972e-008	4.98	2.7887e-009	5.06	8.5483e-011	5.03

Tabelle 25:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.6208e-002	2.4110e-002	0.94	1.2326e-002	0.97	6.2331e-003	0.98	3.1344e-003	0.99
$T_2=1.0000$	4.6289e-002	2.3459e-002	0.98	1.1814e-002	0.99	5.9286e-003	0.99	2.9698e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.6289e-002	2.4396e-002	0.92	1.3975e-002	0.80	7.0611e-003	0.98	3.5493e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.2163e-002	2.7384e-002	0.93	1.3975e-002	0.97	7.0611e-003	0.98	3.5496e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.3633e-003	3.8842e-004	1.81	1.0386e-004	1.90	2.6862e-005	1.95	6.8309e-006	1.98
$T_2=1.0000$	4.2919e-003	1.1217e-003	1.94	2.8691e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.2919e-003	1.1217e-003	1.94	2.8691e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.2919e-003	1.1217e-003	1.94	2.8691e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.4503e-006	6.6565e-007	3.48	1.4675e-007	2.18	2.4423e-008	2.59	3.4765e-009	2.81
$T_2=1.0000$	2.6689e-004	3.6810e-005	2.86	4.8142e-006	2.93	6.1534e-007	2.97	7.7782e-008	2.98
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.6689e-004	3.6810e-005	2.86	4.8142e-006	2.93	6.1534e-007	2.97	7.7890e-008	2.98

$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.6689e-004	3.6874e-005	2.86	4.8274e-006	2.93	6.1680e-007	2.97	7.7952e-008	2.98
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.1497e-006	2.7575e-007	2.96	2.0609e-008	3.74	1.3396e-009	3.94	8.3644e-011	4.00
$T_2=1.0000$	7.5044e-006	8.2174e-007	3.19	6.0460e-008	3.76	4.0105e-009	3.91	2.5624e-010	3.97
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	7.5044e-006	9.4284e-007	2.99	7.1903e-008	3.71	4.7497e-009	3.92	3.3012e-010	3.85
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.6903e-005	9.7386e-007	4.12	1.4618e-007	2.74	3.4250e-008	2.09	6.2508e-009	2.45
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.2400e-006	6.8349e-008	5.57	9.5425e-010	6.16	6.4818e-012	7.20	3.3158e-013	4.29
$T_2=1.0000$	5.1201e-006	9.2621e-008	5.79	1.3726e-009	6.08	1.4620e-011	6.55	5.8550e-013	4.64
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.1201e-006	9.2862e-008	5.78	1.4623e-009	5.99	6.1572e-010	1.25	3.5540e-010	0.79
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3073e-005	1.7876e-007	6.19	2.9545e-008	2.60	8.9576e-009	1.72	4.3756e-009	1.03
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.8435e-006	8.9473e-008	5.42	1.6507e-009	5.76	2.8430e-011	5.86	1.0343e-012	4.78
$T_2=1.0000$	5.5012e-006	1.0775e-007	5.67	1.9094e-009	5.82	3.2526e-011	5.88	1.1641e-012	4.80
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.5012e-006	1.2656e-007	5.44	2.2886e-009	5.79	2.0299e-010	3.49	1.2569e-010	0.69
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3866e-005	2.0418e-007	6.09	2.0583e-008	3.31	7.5597e-009	1.45	1.1066e-009	2.77
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.8933e-006	9.0407e-008	5.43	1.6668e-009	5.76	2.8693e-011	5.86	1.0384e-012	4.79
$T_2=1.0000$	5.4938e-006	1.0767e-007	5.67	1.9085e-009	5.82	3.2516e-011	5.88	1.1636e-012	4.80
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.4938e-006	1.2746e-007	5.43	2.6752e-009	5.57	7.5633e-010	1.82	2.9153e-011	4.70
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3922e-005	2.0521e-007	6.08	6.8745e-009	4.90	1.8192e-009	1.92	8.7995e-010	1.05
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.8965e-006	9.0442e-008	5.43	1.6671e-009	5.76	2.8695e-011	5.86	1.0384e-012	4.79
$T_2=1.0000$	5.4914e-006	1.0764e-007	5.67	1.9083e-009	5.82	3.2515e-011	5.88	1.1638e-012	4.80
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.4914e-006	1.2748e-007	5.43	2.3051e-009	5.79	4.6708e-010	2.30	1.3182e-010	1.83
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3925e-005	2.0524e-007	6.08	2.9139e-009	6.14	1.5764e-009	0.89	2.4166e-010	2.71
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.8967e-006	9.0444e-008	5.43	1.6671e-009	5.76	2.8696e-011	5.86	1.0384e-012	4.79
$T_2=1.0000$	5.4911e-006	1.0764e-007	5.67	1.9083e-009	5.82	3.2515e-011	5.88	1.1639e-012	4.80
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.4911e-006	1.2748e-007	5.43	2.3051e-009	5.79	3.9541e-011	5.87	5.3778e-011	-0.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3925e-005	2.0524e-007	6.08	2.9139e-009	6.14	3.7954e-010	2.94	1.5985e-010	1.25

Anders stellt sich die Situation bei nicht äquidistantem Gitter dar.

Tabelle 26:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.8848e-002	3.0868e-002	0.93	1.5877e-002	0.96	8.0603e-003	0.98	4.0620e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.8949e-002	3.0192e-002	0.97	1.5279e-002	0.98	7.6850e-003	0.99	3.8537e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.8949e-002	3.1247e-002	0.92	1.8010e-002	0.79	9.1336e-003	0.98	4.6004e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.6311e-002	3.5236e-002	0.91	1.8178e-002	0.95	9.1815e-003	0.99	4.6131e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.3435e-003	1.5794e-003	1.76	4.4976e-004	1.81	1.2189e-004	1.88	3.2013e-005	1.93
$T_2=1.0000$	9.9161e-003	2.8462e-003	1.80	7.6139e-004	1.90	1.9674e-004	1.95	4.9987e-005	1.98
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.9161e-003	2.8462e-003	1.80	7.6139e-004	1.90	1.9674e-004	1.95	4.9987e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1076e-002	3.0336e-003	1.87	7.8742e-004	1.95	2.1361e-004	1.88	6.8180e-005	1.65
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.2325e-004	1.1323e-004	0.98	5.2839e-005	1.10	2.2182e-005	1.25	7.9107e-006	1.49
$T_2=1.0000$	1.0082e-003	1.6685e-004	2.60	2.4803e-005	2.75	3.5163e-006	2.82	4.8335e-007	2.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0082e-003	1.6685e-004	2.60	5.2839e-005	1.66	2.2182e-005	1.25	7.9107e-006	1.49
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1463e-003	8.9433e-004	1.26	4.0435e-004	1.15	1.5542e-004	1.38	4.6615e-005	1.74
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.4562e-004	7.7003e-005	0.92	3.6556e-005	1.07	1.5458e-005	1.24	5.1278e-006	1.59
$T_2=1.0000$	1.1019e-004	1.9507e-005	2.50	4.3069e-006	2.18	8.9481e-007	2.27	1.3563e-007	2.72
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4562e-004	7.7003e-005	0.92	3.6556e-005	1.07	1.5458e-005	1.24	5.1278e-006	1.59
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.9514e-004	3.2248e-004	0.88	1.4207e-004	1.18	4.9486e-005	1.52	2.3265e-005	1.09
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.2059e-005	4.0709e-005	1.18	2.0250e-005	1.01	9.5549e-006	1.08	3.8403e-006	1.32
$T_2=1.0000$	5.1199e-005	9.5032e-006	2.43	2.3849e-006	1.99	6.0049e-007	1.99	1.3041e-007	2.20
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.2059e-005	4.0709e-005	1.18	2.0250e-005	1.01	9.5549e-006	1.08	3.8403e-006	1.32
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5884e-003	9.8936e-004	0.68	4.7537e-004	1.06	1.8613e-004	1.35	4.9850e-005	1.90
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.1514e-005	8.3378e-006	2.88	3.5657e-006	1.23	1.8127e-006	0.98	1.2632e-006	0.52

$T_2=1.0000$	3.9271e-005	1.8882e-006	4.38	7.7044e-008	4.62	6.7967e-009	3.50	2.6313e-008	-1.95
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.1514e-005	8.3378e-006	2.88	3.5657e-006	1.23	1.8127e-006	0.98	1.2632e-006	0.52
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.5798e-003	1.3335e-003	0.95	5.0082e-004	1.41	1.2054e-004	2.05	1.5902e-005	2.92
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.9502e-005	3.5956e-006	4.05	1.3982e-006	1.36	1.0649e-006	0.39	6.2676e-007	0.76
$T_2=1.0000$	4.0374e-005	2.2916e-006	4.14	2.9131e-007	2.98	1.1141e-007	1.39	3.8962e-008	1.52
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.9502e-005	3.5956e-006	4.05	1.3990e-006	1.36	1.0662e-006	0.39	6.2756e-007	0.76
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	9.3394e-004	4.7237e-004	0.98	1.6670e-004	1.50	1.0576e-004	0.66	3.7993e-005	1.48
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.9178e-005	2.9045e-006	4.35	2.0505e-006	0.50	1.3653e-006	0.59	1.9637e-007	2.80
$T_2=1.0000$	4.0023e-005	2.4988e-006	4.00	6.0130e-007	2.06	1.8635e-007	1.69	2.0839e-008	3.16
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.9178e-005	2.9045e-006	4.35	2.1222e-006	0.45	1.3754e-006	0.63	1.9747e-007	2.80
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.6740e-003	1.6321e-003	0.71	7.1863e-004	1.18	2.1255e-004	1.76	2.4206e-005	3.13
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.0103e-005	7.2338e-006	3.05	3.2682e-006	1.15	5.4208e-007	2.59	4.4974e-007	0.27
$T_2=1.0000$	4.1143e-005	3.4914e-006	3.56	7.0457e-007	2.31	6.9834e-008	3.33	2.2840e-008	1.61
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.0103e-005	7.2338e-006	3.05	3.2873e-006	1.14	5.4528e-007	2.59	4.4981e-007	0.28
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1941e-003	1.9768e-003	1.09	5.8362e-004	1.76	7.4677e-005	2.97	1.9079e-005	1.97

Tabelle 27:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.0367e-002	2.6085e-002	0.95	1.3410e-002	0.96	6.8148e-003	0.98	3.4370e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.4695e-002	2.6938e-002	1.02	1.3306e-002	1.02	6.6030e-003	1.01	3.2878e-003	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.4695e-002	2.6938e-002	1.02	1.5302e-002	0.82	7.7463e-003	0.98	3.8987e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.5065e-002	2.8853e-002	0.93	1.5468e-002	0.90	7.7899e-003	0.99	3.9099e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.8168e-003	5.0433e-004	1.85	1.3959e-004	1.85	3.8225e-005	1.87	1.0521e-005	1.86
$T_2=1.0000$	5.6819e-003	1.4616e-003	1.96	3.6880e-004	1.99	9.2493e-005	2.00	2.3150e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.6819e-003	1.4616e-003	1.96	3.6880e-004	1.99	9.2493e-005	2.00	2.3150e-005	2.00

$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.2140e-003	1.5305e-003	2.02	3.7750e-004	2.02	9.3585e-005	2.01	2.3287e-005	2.01
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.2326e-005	4.0252e-005	1.20	1.7936e-005	1.17	7.5298e-006	1.25	2.7768e-006	1.44
$T_2=1.0000$	4.4048e-004	6.0488e-005	2.86	7.8481e-006	2.95	9.9705e-007	2.98	1.2542e-007	2.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.4048e-004	6.0488e-005	2.86	1.7936e-005	1.75	7.5298e-006	1.25	2.7768e-006	1.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.3011e-004	6.6595e-005	2.99	1.7936e-005	1.89	7.5298e-006	1.25	2.7768e-006	1.44
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.8884e-005	1.3274e-005	1.12	5.9677e-006	1.15	2.4486e-006	1.29	8.6908e-007	1.49
$T_2=1.0000$	2.8307e-005	3.0473e-006	3.22	5.2933e-007	2.53	1.1809e-007	2.16	2.3053e-008	2.36
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.8884e-005	1.3274e-005	1.12	5.9677e-006	1.15	2.4486e-006	1.29	8.6908e-007	1.49
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5287e-005	1.3274e-005	1.41	5.9677e-006	1.15	2.4486e-006	1.29	8.6908e-007	1.49
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.9823e-006	5.2244e-007	3.25	1.0505e-007	2.31	1.5242e-007	-0.54	8.0644e-008	0.92
$T_2=1.0000$	2.7815e-006	3.3779e-007	3.04	8.5392e-008	1.98	2.7514e-008	1.63	8.8551e-009	1.64
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.9823e-006	6.0889e-007	3.03	1.3466e-007	2.18	1.5486e-007	-0.20	8.1124e-008	0.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.0469e-005	8.8264e-006	1.21	3.6951e-006	1.26	1.3102e-006	1.50	3.4437e-007	1.93
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6389e-005	6.0138e-006	1.45	2.1932e-006	1.46	6.1878e-007	1.83	1.0537e-007	2.55
$T_2=1.0000$	2.5548e-006	3.6011e-007	2.83	7.9432e-008	2.18	1.8256e-008	2.12	2.8760e-009	2.67
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.6389e-005	6.0138e-006	1.45	2.1932e-006	1.46	6.1878e-007	1.83	1.0537e-007	2.55
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.6389e-005	6.0138e-006	1.45	2.5376e-006	1.24	9.5075e-007	1.42	2.2642e-007	2.07
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.5612e-005	6.7164e-006	1.22	2.6630e-006	1.33	8.1009e-007	1.72	1.3822e-007	2.55
$T_2=1.0000$	2.4879e-006	9.3084e-008	4.74	3.0157e-009	4.95	4.5374e-009	-0.59	3.1829e-009	0.51
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.5612e-005	6.7164e-006	1.22	2.6630e-006	1.33	8.1009e-007	1.72	1.3822e-007	2.55
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.5612e-005	6.7164e-006	1.22	2.6630e-006	1.33	8.1009e-007	1.72	1.3822e-007	2.55
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.0692e-006	4.0175e-006	1.01	1.7651e-006	1.19	6.0833e-007	1.54	1.1831e-007	2.36
$T_2=1.0000$	2.2626e-006	1.3702e-007	4.05	5.5453e-008	1.31	1.2257e-008	2.18	5.8805e-011	7.70
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.0692e-006	4.0175e-006	1.01	1.7651e-006	1.19	6.0833e-007	1.54	1.1831e-007	2.36
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	8.0692e-006	4.0175e-006	1.01	1.7651e-006	1.19	6.0833e-007	1.54	1.1831e-007	2.36
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	12	24		48		96		192	

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6393e-006	5.1481e-007	1.67	4.1918e-007	0.30	2.3148e-007	0.86	6.7065e-008	1.79
$T_2=1.0000$	2.2341e-006	1.1223e-007	4.32	4.1351e-008	1.44	1.2428e-008	1.73	1.6416e-009	2.92
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.2341e-006	5.1481e-007	2.12	4.1918e-007	0.30	2.3148e-007	0.86	6.7065e-008	1.79
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.9829e-006	3.0026e-006	1.22	1.2097e-006	1.31	3.5755e-007	1.76	6.7065e-008	2.41

Die Iteration versagt hier im wesentlichen. Für ‘weniger’ steife Probleme hier: $\lambda = 100$ funktioniert die Iteration noch etwas besser.

Tabelle 28:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 100$ (6.11)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.2974e-002	2.9106e-002	0.86	1.5265e-002	0.93	7.8156e-003	0.97	3.9536e-003	0.98
$T_2=1.0000$	6.9437e-002	3.2520e-002	1.09	1.5684e-002	1.05	7.6916e-003	1.03	3.8073e-003	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.9437e-002	3.2520e-002	1.09	1.7524e-002	0.89	8.9053e-003	0.98	4.4884e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.9437e-002	3.2657e-002	1.09	1.7524e-002	0.90	8.9053e-003	0.98	4.4884e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7434e-003	6.9522e-004	1.33	2.3428e-004	1.57	6.9792e-005	1.75	1.7703e-005	1.98
$T_2=1.0000$	8.8815e-003	2.1015e-003	2.08	5.0743e-004	2.05	1.2436e-004	2.03	3.0762e-005	2.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.8815e-003	2.1015e-003	2.08	5.0743e-004	2.05	1.2436e-004	2.03	3.0762e-005	2.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	8.8815e-003	2.1015e-003	2.08	5.0743e-004	2.05	1.2436e-004	2.03	3.0762e-005	2.02
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.7621e-004	3.0864e-004	0.90	1.0651e-004	1.53	2.7788e-005	1.94	5.3293e-006	2.38
$T_2=1.0000$	1.0058e-003	1.3752e-004	2.87	1.7376e-005	2.98	1.9506e-006	3.16	2.1617e-007	3.17
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0058e-003	3.0864e-004	1.70	1.0651e-004	1.53	2.7788e-005	1.94	5.3293e-006	2.38
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0058e-003	3.0864e-004	1.70	1.0651e-004	1.53	2.7788e-005	1.94	5.3293e-006	2.38
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.1632e-004	2.5615e-004	1.01	7.0328e-005	1.86	1.2594e-005	2.48	1.5820e-006	2.99
$T_2=1.0000$	5.2980e-004	9.6575e-005	2.46	1.0223e-005	3.24	5.0039e-007	4.35	3.4430e-009	7.18
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.2980e-004	2.5615e-004	1.05	7.0328e-005	1.86	1.2594e-005	2.48	1.5820e-006	2.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.2980e-004	2.5615e-004	1.05	7.0328e-005	1.86	1.2594e-005	2.48	1.5820e-006	2.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20	40	80	160				

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.9521e-004	1.9508e-004	1.02	4.9640e-005	1.97	6.5920e-006	2.91	5.2600e-007	3.65
$T_2=1.0000$	4.2848e-004	8.6694e-005	2.31	9.4471e-006	3.20	4.2993e-007	4.46	5.0434e-009	6.41
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.2848e-004	1.9920e-004	1.11	4.9640e-005	2.00	6.5920e-006	2.91	5.2600e-007	3.65
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.2848e-004	1.9920e-004	1.11	4.9640e-005	2.00	6.5920e-006	2.91	5.2600e-007	3.65
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3100e-004	1.1453e-004	1.01	2.9580e-005	1.95	3.2721e-006	3.18	1.7446e-007	4.23
$T_2=1.0000$	2.3835e-004	5.3697e-005	2.15	6.1212e-006	3.13	2.4369e-007	4.65	2.2389e-009	6.77
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.3835e-004	1.1889e-004	1.00	2.9671e-005	2.00	3.2721e-006	3.18	1.7446e-007	4.23
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3835e-004	1.1889e-004	1.00	2.9671e-005	2.00	3.2721e-006	3.18	1.7446e-007	4.23
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1722e-004	5.6269e-005	1.06	1.5341e-005	1.87	1.5031e-006	3.35	5.6301e-008	4.74
$T_2=1.0000$	1.1784e-004	2.9569e-005	1.99	3.4609e-006	3.09	1.2179e-007	4.83	8.0778e-010	7.24
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.1784e-004	6.0599e-005	0.96	1.5498e-005	1.97	1.5031e-006	3.37	5.6301e-008	4.74
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1784e-004	6.0599e-005	0.96	1.5498e-005	1.97	1.5031e-006	3.37	5.6301e-008	4.74
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.4506e-005	2.4303e-005	1.41	7.1883e-006	1.76	6.4116e-007	3.49	1.7525e-008	5.19
$T_2=1.0000$	6.1879e-005	1.5970e-005	1.95	1.8246e-006	3.13	5.5404e-008	5.04	2.5461e-010	7.77
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	6.4506e-005	2.8346e-005	1.19	7.3391e-006	1.95	6.4116e-007	3.52	1.7525e-008	5.19
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.4506e-005	2.8346e-005	1.19	7.3391e-006	1.95	6.4116e-007	3.52	1.7525e-008	5.19
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.9875e-005	1.0248e-005	2.28	3.2105e-006	1.67	2.5803e-007	3.64	5.2662e-009	5.61
$T_2=1.0000$	4.5080e-005	9.4605e-006	2.25	9.7332e-007	3.28	2.3908e-008	5.35	8.0173e-011	8.22
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.9875e-005	1.3740e-005	1.86	3.3382e-006	2.04	2.5803e-007	3.69	5.2662e-009	5.61
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.0033e-005	1.3740e-005	1.86	3.3382e-006	2.04	2.5803e-007	3.69	5.2662e-009	5.61

Tabelle 29:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 100$ (6.11)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	4.5688e-002	2.4585e-002	0.89	1.2716e-002	0.95	6.4613e-003	0.98	3.2558e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.2066e-002	2.5319e-002	1.04	1.2507e-002	1.02	6.2173e-003	1.01	3.0999e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.2066e-002	2.5319e-002	1.04	1.4481e-002	0.81	7.3326e-003	0.98	3.6889e-003	0.99
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	5.2066e-002	2.8244e-002	0.88	1.4481e-002	0.96	7.3326e-003	0.98	3.6889e-003	0.99

Iterationsschritt 1:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.6416e-003	7.6991e-004	1.78	2.1221e-004	1.86
$T_2=1.0000$	5.3650e-003	1.4699e-003	1.87	3.8584e-004	1.93
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.3650e-003	1.4699e-003	1.87	3.8584e-004	1.93
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	6.4534e-003	2.6702e-003	1.27	8.1806e-004	1.71

Iterationsschritt 2:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.1047e-005	7.1424e-005	-1.20	1.5429e-005	2.21
$T_2=1.0000$	4.9930e-004	8.0450e-005	2.63	8.8125e-006	3.19
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.9930e-004	9.8909e-005	2.34	1.6026e-005	2.63
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	8.6110e-003	1.9817e-003	2.12	2.6586e-004	2.90

Iterationsschritt 3:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.2228e-004	4.3513e-006	4.81	1.1222e-005	-1.37
$T_2=1.0000$	3.8685e-005	2.4647e-005	0.65	5.6296e-006	2.13
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.2228e-004	2.4647e-005	2.31	1.2522e-005	0.98
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	2.5076e-003	1.3964e-003	0.84	3.0954e-004	2.17

Iterationsschritt 4:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1994e-005	1.5165e-005	-0.34	3.3757e-006	2.17
$T_2=1.0000$	2.5709e-004	1.2040e-005	4.42	7.3541e-007	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.5709e-004	1.9108e-005	3.75	3.4002e-006	2.49
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	1.2060e-002	2.1245e-003	2.50	1.0685e-004	4.31

Iterationsschritt 5:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.1653e-004	6.6349e-005	1.71	1.5252e-006	5.44
$T_2=1.0000$	5.3359e-004	5.5635e-005	3.26	9.3238e-007	5.90
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.3359e-004	8.6250e-005	2.63	1.7659e-006	5.61
$\max_{i,j}(\ \cdots\)$	8.0237e-003	4.8702e-004	4.04	1.2793e-004	1.93

Iterationsschritt 6:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.9923e-005	5.4884e-005	-1.46	5.1589e-006	3.41
$T_2=1.0000$	1.1393e-004	3.4567e-005	1.72	2.1675e-006	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.1393e-004	6.3249e-005	0.85	5.5956e-006	3.50

$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	9.0294e-003	1.9005e-003	2.25	4.2203e-005	5.49	7.8428e-007	5.75	8.9719e-009	6.45
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.2484e-004	2.4799e-005	2.33	3.7193e-006	2.74	9.6127e-009	8.60	2.7682e-009	1.80
$T_2=1.0000$	1.6601e-004	1.7299e-005	3.26	1.1682e-006	3.89	1.6807e-008	6.12	3.3851e-011	8.96
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.6601e-004	2.9769e-005	2.48	3.8832e-006	2.94	1.9315e-008	7.65	2.7682e-009	2.80
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.7489e-002	5.7622e-004	4.92	5.1931e-005	3.47	4.1128e-007	6.98	2.7682e-009	7.22
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.2552e-004	6.2656e-006	5.17	1.3845e-007	5.50	3.4969e-008	1.99	5.5078e-010	5.99
$T_2=1.0000$	5.2537e-004	5.8740e-007	9.80	4.8482e-008	3.60	8.4832e-009	2.51	2.8045e-011	8.24
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.2537e-004	6.2656e-006	6.39	1.4646e-007	5.42	3.5952e-008	2.03	5.5088e-010	6.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.6662e-003	1.4768e-003	1.94	1.6658e-005	6.47	1.6893e-007	6.62	5.5088e-010	8.26

Die Wahl von speziellen nicht äquidistanten Gittern (Gauß) hilft hingegen nicht weiter.

Tabelle 30:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.2030e-002	3.7017e-002	0.96	1.9028e-002	0.96	9.6811e-003	0.97	4.8873e-003	0.99
$T_2=1.0000$	6.9043e-002	3.6118e-002	0.93	1.8377e-002	0.97	9.2580e-003	0.99	4.6450e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	7.2030e-002	3.7405e-002	0.95	2.1592e-002	0.79	1.0975e-002	0.98	5.5364e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	8.2588e-002	4.1460e-002	0.99	2.1864e-002	0.92	1.1045e-002	0.99	5.5542e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.1769e-003	1.1364e-003	1.88	3.0931e-004	1.88	8.2623e-005	1.90	2.2013e-005	1.91
$T_2=1.0000$	9.9108e-003	2.7973e-003	1.82	7.4136e-004	1.92	1.9075e-004	1.96	4.8374e-005	1.98
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	9.9108e-003	2.7973e-003	1.82	7.4136e-004	1.92	1.9075e-004	1.96	4.8374e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0661e-002	2.9032e-003	1.88	7.5540e-004	1.94	1.9256e-004	1.97	4.8604e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1087e-004	1.9223e-005	2.53	5.8885e-006	1.71	3.3918e-006	0.80	2.0992e-006	0.69
$T_2=1.0000$	1.0297e-003	1.6134e-004	2.67	2.2684e-005	2.83	3.0268e-006	2.91	3.8909e-007	2.96
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0297e-003	1.6134e-004	2.67	2.2684e-005	2.83	3.5925e-006	2.66	2.0992e-006	0.78

$\max_{i,j}(\ \dots\)$	1.4066e-003	1.9368e-004	2.86	2.9784e-005	2.70	1.3228e-005	1.17	5.4539e-006	1.28
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.1796e-005	2.9827e-005	1.27	1.2240e-005	1.29	4.2738e-006	1.52	9.8498e-007	2.12
$T_2=1.0000$	8.8263e-005	1.0633e-005	3.05	1.9564e-006	2.44	4.6860e-007	2.06	9.6289e-008	2.28
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.8263e-005	2.9827e-005	1.57	1.2240e-005	1.29	4.2828e-006	1.51	9.8967e-007	2.11
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	1.8473e-004	4.1406e-005	2.16	1.6211e-005	1.35	7.1090e-006	1.19	2.7774e-006	1.36
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.8098e-005	2.2351e-005	1.61	8.7631e-006	1.35	3.4152e-006	1.36	1.1238e-006	1.60
$T_2=1.0000$	2.0259e-005	6.1615e-006	1.72	1.1602e-006	2.41	1.0428e-007	3.48	2.0483e-008	2.35
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.8098e-005	2.2351e-005	1.61	8.7631e-006	1.35	3.4152e-006	1.36	1.1238e-006	1.60
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	1.1363e-004	3.9441e-005	1.53	1.5658e-005	1.33	6.2007e-006	1.34	2.2495e-006	1.46
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.4658e-006	7.2149e-007	3.71	2.5769e-007	1.49	3.5389e-007	-0.46	3.8640e-007	-0.13
$T_2=1.0000$	3.9266e-005	9.7012e-006	2.02	2.0926e-006	2.21	3.5919e-007	2.54	3.2647e-008	3.46
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9266e-005	9.7012e-006	2.02	2.0926e-006	2.21	5.0423e-007	2.05	3.8774e-007	0.38
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	8.6064e-005	3.0423e-005	1.50	1.1960e-005	1.35	4.5104e-006	1.41	1.4296e-006	1.66
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.3240e-005	1.6686e-005	1.37	6.0326e-006	1.47	1.7132e-006	1.82	2.4006e-007	2.84
$T_2=1.0000$	1.7292e-005	3.4309e-006	2.33	8.9455e-007	1.94	2.2540e-007	1.99	3.7568e-008	2.58
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.3240e-005	1.6686e-005	1.37	6.0326e-006	1.47	1.7242e-006	1.81	2.4278e-007	2.83
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	9.5403e-005	3.1587e-005	1.59	1.1631e-005	1.44	3.9845e-006	1.55	1.1415e-006	1.80
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.5626e-005	1.4235e-005	1.68	5.0748e-006	1.49	1.6703e-006	1.60	3.9368e-007	2.08
$T_2=1.0000$	1.5800e-005	4.4016e-006	1.84	7.4301e-007	2.57	4.5156e-008	4.04	1.3005e-008	1.80
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5626e-005	1.4235e-005	1.68	5.0748e-006	1.49	1.6703e-006	1.60	3.9368e-007	2.08
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	8.4390e-005	2.8177e-005	1.58	1.0302e-005	1.45	3.4702e-006	1.57	9.3359e-007	1.89
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.5510e-006	3.7959e-007	3.87	3.3843e-008	3.49	3.0594e-007	-3.18	1.9086e-007	0.68
$T_2=1.0000$	2.7821e-005	6.4776e-006	2.10	1.2897e-006	2.33	1.8609e-007	2.79	9.9204e-009	4.23
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.7821e-005	6.4776e-006	2.10	1.2897e-006	2.33	3.5777e-007	1.85	1.9091e-007	0.91
$\max_{i,j}(\ \dots\)$	6.1891e-005	2.0795e-005	1.57	7.4479e-006	1.48	2.3600e-006	1.66	5.3649e-007	2.14

Tabelle 31:

Integralvariante Euler, ohne linken Punkt (8.1)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.1328e-002	3.1186e-002	0.98	1.5930e-002	0.97	8.0768e-003	0.98	4.0700e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.7730e-002	3.0135e-002	0.94	1.5307e-002	0.98	7.7037e-003	0.99	3.8632e-003	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.1328e-002	3.1454e-002	0.96	1.8064e-002	0.80	9.1529e-003	0.98	4.6099e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.0980e-002	3.4895e-002	1.02	1.8291e-002	0.93	9.2212e-003	0.99	4.6284e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.0446e-003	8.0272e-004	1.92	2.1456e-004	1.90	5.6794e-005	1.92	1.5086e-005	1.91
$T_2=1.0000$	7.0154e-003	1.9548e-003	1.84	5.1378e-004	1.93	1.3159e-004	1.97	3.3289e-005	1.98
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	7.0154e-003	1.9548e-003	1.84	5.1378e-004	1.93	1.3159e-004	1.97	3.3289e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.4278e-003	2.0281e-003	1.87	5.2423e-004	1.95	1.3297e-004	1.98	3.3467e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.7633e-005	1.0819e-005	2.84	2.2779e-006	2.25	1.5111e-006	0.59	1.0899e-006	0.47
$T_2=1.0000$	6.2110e-004	9.4944e-005	2.71	1.3151e-005	2.85	1.7465e-006	2.91	2.2522e-007	2.96
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.2110e-004	9.4944e-005	2.71	1.3151e-005	2.85	1.7465e-006	2.91	1.0908e-006	0.68
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	8.2429e-004	1.1055e-004	2.90	2.2787e-005	2.28	7.9636e-006	1.52	2.8290e-006	1.49
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.8674e-005	1.8878e-005	1.37	7.1600e-006	1.40	2.2913e-006	1.64	5.1863e-007	2.14
$T_2=1.0000$	4.3463e-005	4.2348e-006	3.36	6.2082e-007	2.77	1.7297e-007	1.84	4.5474e-008	1.93
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.8674e-005	1.8878e-005	1.37	7.1600e-006	1.40	2.2913e-006	1.64	5.2059e-007	2.14
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.6364e-005	3.0548e-005	1.32	1.2676e-005	1.27	3.9191e-006	1.69	1.0892e-006	1.85
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.3245e-005	1.1961e-005	1.47	4.4151e-006	1.44	1.4483e-006	1.61	4.3168e-007	1.75
$T_2=1.0000$	1.5647e-005	3.5614e-006	2.14	7.1337e-007	2.32	1.0253e-007	2.80	3.3513e-010	8.26
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.3245e-005	1.1961e-005	1.47	4.4151e-006	1.44	1.4483e-006	1.61	4.3168e-007	1.75
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.4902e-005	1.6686e-005	1.43	6.2372e-006	1.42	1.9822e-006	1.65	5.1669e-007	1.94
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.9937e-006	6.7644e-007	1.56	5.6138e-007	0.27	2.1988e-007	1.35	8.4568e-008	1.38

$T_2=1.0000$	1.2309e-005	2.1945e-006	2.49	5.0687e-007	2.11	1.1796e-007	2.10	1.7797e-008	2.73
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.2309e-005	2.1945e-006	2.49	7.5537e-007	1.54	2.4836e-007	1.60	8.6415e-008	1.52
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.5373e-005	1.6704e-005	1.44	5.9363e-006	1.49	1.5969e-006	1.89	3.0553e-007	2.39
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3694e-005	6.0849e-006	1.96	1.4450e-006	2.07	2.5629e-007	2.50	4.8434e-008	2.40
$T_2=1.0000$	2.6431e-006	1.1963e-006	1.14	1.9512e-007	2.62	5.0970e-009	5.26	1.0442e-008	-1.03
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.3694e-005	6.0849e-006	1.96	1.4450e-006	2.07	2.5629e-007	2.50	4.9541e-008	2.37
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.7284e-005	1.7926e-005	1.40	6.1427e-006	1.55	1.4929e-006	2.04	1.7361e-007	3.10
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3233e-005	7.3842e-006	1.65	2.0203e-006	1.87	3.4720e-007	2.54	5.0657e-008	2.78
$T_2=1.0000$	1.0898e-005	2.3986e-006	2.18	4.7422e-007	2.34	6.5979e-008	2.85	9.6747e-010	6.09
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.3233e-005	7.3842e-006	1.65	2.0480e-006	1.85	3.5340e-007	2.53	5.0657e-008	2.80
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.2321e-005	1.5713e-005	1.43	5.2080e-006	1.59	1.1537e-006	2.17	1.0440e-007	3.47
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.3481e-006	3.4937e-006	0.61	1.3202e-006	1.40	2.6917e-007	2.29	2.7228e-008	3.31
$T_2=1.0000$	8.0233e-006	1.1814e-006	2.76	2.5763e-007	2.20	5.6001e-008	2.20	5.8314e-009	3.26
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.0233e-006	3.4937e-006	1.20	1.3202e-006	1.40	2.7492e-007	2.26	2.7842e-008	3.30
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.6482e-005	1.2420e-005	1.55	4.0276e-006	1.62	8.3697e-007	2.27	7.2396e-008	3.53

9. Die Integralvariante auf Euler-Basis mit linkem Punkt

Wie bereits in Abschnitt 4 behandelt, läßt sich durch Einbeziehung des linken Punktes in jedem Intervall in die Quadraturformel eine asymptotisch genauere Variante konstruieren. Es gilt also wieder analog zu (3.1) - (3.3): $\eta_{\Delta^m}^{(0)}$ sei, unter Berücksichtigung der Randbedingungen durch das implizite Eulerverfahren gewonnen:

$$(9.1) \quad \frac{\eta_{i,j}^{(0)} - \eta_{i,j-1}^{(0)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \eta_{i,j}^{(0)}).$$

Für $n \geq 1$ ist die n -te Näherungslösung wieder durch folgende Rekursion definiert:

$$(9.2) \quad \eta_{\Delta^m}^{(n+1)} := \eta_{\Delta^m}^{(0)} - (\pi_{\Delta^m}^{(n)} - \eta_{\Delta^m}^{(n)}),$$

wobei die $\pi_{\Delta^m}^{(n)}$ durch Lösung von

$$(9.3) \quad \frac{\pi_{i,j}^{(n)} - \pi_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} = F(t_{i,j}, \pi_{i,j}^{(n)}) + \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)})$$

gewonnen werden, mit dem Defekt:

$$(9.4) \quad \hat{D}_{i,j}(\eta_{\Delta^m}^{(n)}) = \frac{\eta_{i,j}^{(n)} - \eta_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_{i,j}} - \sum_{k=0}^m \alpha_{j,k} F(t_{i,k}, \eta_{i,k}^{(n)}).$$

wobei die $\alpha_{j,k}$ wieder die Quadraturkoeffizienten gemäß Lemma 1.2, (ii), zu den Knoten $t_j := t_{i,j}$ ($j = 0 \dots m$) in den einzelnen Teilintervallen J_j bezeichnen.

9.1. Äquidistantes Gitter: Wir erwarten hier also maximale Ordnung $m + 1$. Diese wird auch erreicht, für gerades m und äquidistantes Gitter erreichen wir sogar Ordnung $m + 2$.

Tabelle 32:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)															
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)															
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00						
$T_1=0.2500$	1.4814e-001	7.5872e-002	0.97	3.8336e-002	0.98	1.9265e-002	0.99	9.6565e-003	1.00						
$T_2=0.5000$	8.5821e-002	4.3598e-002	0.98	2.1942e-002	0.99	1.1005e-002	1.00	5.5105e-003	1.00						
$T_3=0.7500$	5.8240e-002	2.8264e-002	1.04	1.3942e-002	1.02	6.9263e-003	1.01	3.4522e-003	1.00						
$T_4=1.0000$	2.0735e-001	1.0483e-001	0.98	5.2668e-002	0.99	2.6397e-002	1.00	1.3215e-002	1.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0735e-001	5.2259e-001	-1.33	2.5936e-001	1.01	1.2923e-001	1.00	6.4509e-002	1.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0106e+000	5.2259e-001	0.95	2.5936e-001	1.01	1.2934e-001	1.00	6.4606e-002	1.00						
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.1596e-001	2.8450e-003	5.35	6.8954e-004	2.04	1.7090e-004	2.01	4.2548e-005	2.01						
$T_1=0.2500$	8.0666e-002	2.5117e-003	5.01	6.1394e-004	2.03	1.5309e-004	2.00	3.8234e-005	2.00						
$T_2=0.5000$	3.6506e-002	2.0068e-003	4.19	4.9518e-004	2.02	1.2402e-004	2.00	3.1041e-005	2.00						
$T_3=0.7500$	2.9907e-002	8.3468e-004	5.16	2.0913e-004	2.00	5.2581e-005	1.99	1.3183e-005	2.00						
$T_4=1.0000$	1.1596e-001	2.8450e-003	5.35	6.8954e-004	2.04	1.7090e-004	2.01	4.2548e-005	2.01						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1596e-001	7.8567e-003	3.88	1.9385e-003	2.02	4.9010e-004	1.98	1.2464e-004	1.98						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1596e-001	7.8567e-003	3.88	1.9874e-003	1.98	4.9929e-004	1.99	1.2513e-004	2.00						
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	9.9791e-002	2.4374e-005	12.00	5.6182e-006	2.12	7.4947e-007	2.91	9.3818e-008	3.00						
$T_1=0.2500$	6.7317e-002	2.7921e-005	11.24	5.8668e-006	2.25	7.9303e-007	2.89	9.9718e-008	2.99						
$T_2=0.5000$	2.5965e-002	2.7114e-005	9.90	6.3137e-006	2.10	8.3766e-007	2.91	1.0524e-007	2.99						
$T_3=0.7500$	2.9988e-002	3.0504e-005	9.94	5.0731e-006	2.59	6.4689e-007	2.97	8.0917e-008	3.00						
$T_4=1.0000$	9.9791e-002	2.4374e-005	12.00	5.6182e-006	2.12	7.4947e-007	2.91	9.3818e-008	3.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.9791e-002	5.9264e-004	7.40	1.4481e-005	5.35	1.9219e-006	2.91	2.4559e-007	2.97						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9791e-002	5.9264e-004	7.40	1.6884e-005	5.13	1.9558e-006	3.11	2.4639e-007	2.99						
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	20			40			80			160			320		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.0036e-001	5.2757e-005	10.89	6.2266e-007	6.40	1.0963e-008	5.83	2.8834e-010	5.25						
$T_1=0.2500$	6.7887e-002	5.9130e-005	10.17	7.1609e-007	6.37	1.2883e-008	5.80	3.5076e-010	5.20						
$T_2=0.5000$	2.6585e-002	4.7564e-005	9.13	6.0572e-007	6.30	1.2107e-008	5.64	3.8999e-010	4.96						
$T_3=0.7500$	2.9686e-002	1.3794e-005	11.07	2.2865e-007	5.91	7.0124e-009	5.03	3.3258e-010	4.40						

$T_4=1.0000$	1.0036e-001	5.2757e-005	10.89	6.2266e-007	6.40	1.0963e-008	5.83	2.8834e-010	5.25
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0036e-001	5.6615e-004	7.47	6.7040e-006	6.40	9.8439e-008	6.09	1.7327e-009	5.83
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0036e-001	5.6615e-004	7.47	6.7040e-006	6.40	9.8439e-008	6.09	1.7327e-009	5.83

Iterationsschritt 4:

Punkte:	20	40	80	160	320
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0034e-001	5.2112e-005	10.91	5.8256e-007	6.48
$T_1=0.2500$	6.7866e-002	5.8310e-005	10.18	6.6513e-007	6.45
$T_2=0.5000$	2.6556e-002	4.6461e-005	9.16	5.3787e-007	6.43
$T_3=0.7500$	2.9709e-002	1.2489e-005	11.22	1.5087e-007	6.37
$T_4=1.0000$	1.0034e-001	5.2112e-005	10.91	5.8256e-007	6.48
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7246e-006	6.40
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7246e-006	6.40

Iterationsschritt 5:

Punkte:	20	40	80	160	320
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$T_1=0.2500$	6.7866e-002	5.8321e-005	10.18	6.6548e-007	6.45
$T_2=0.5000$	2.6557e-002	4.6480e-005	9.16	5.3847e-007	6.43
$T_3=0.7500$	2.9708e-002	1.2520e-005	11.21	1.5178e-007	6.37
$T_4=1.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40

Iterationsschritt 6:

Punkte:	20	40	80	160	320
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$T_1=0.2500$	6.7866e-002	5.8321e-005	10.18	6.6548e-007	6.45
$T_2=0.5000$	2.6557e-002	4.6480e-005	9.16	5.3846e-007	6.43
$T_3=0.7500$	2.9708e-002	1.2519e-005	11.21	1.5177e-007	6.37
$T_4=1.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40

Iterationsschritt 7:

Punkte:	20	40	80	160	320
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$T_1=0.2500$	6.7866e-002	5.8321e-005	10.18	6.6548e-007	6.45
$T_2=0.5000$	2.6557e-002	4.6480e-005	9.16	5.3846e-007	6.43
$T_3=0.7500$	2.9708e-002	1.2519e-005	11.21	1.5177e-007	6.37
$T_4=1.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40

Iterationsschritt 8:

Punkte:	20	40	80	160	320
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48

$T_1=0.2500$	6.7866e-002	5.8321e-005	10.18	6.6548e-007	6.45	9.7088e-009	6.10	1.4919e-010	6.02
$T_2=0.5000$	2.6557e-002	4.6480e-005	9.16	5.3846e-007	6.43	7.8765e-009	6.10	1.2111e-010	6.02
$T_3=0.7500$	2.9708e-002	1.2519e-005	11.21	1.5177e-007	6.37	2.2379e-009	6.08	3.4473e-011	6.02
$T_4=1.0000$	1.0034e-001	5.2119e-005	10.91	5.8278e-007	6.48	8.4718e-009	6.10	1.3008e-010	6.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40	9.8823e-008	6.09	1.5305e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0034e-001	5.6649e-004	7.47	6.7244e-006	6.40	9.8823e-008	6.09	1.5305e-009	6.01

Tabelle 33:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$T_1=0.2500$	1.2452e-001	6.3453e-002	0.97	3.2001e-002	0.99	1.6068e-002	0.99	8.0504e-003	1.00
$T_2=0.5000$	7.1935e-002	3.6414e-002	0.98	1.8304e-002	0.99	9.1751e-003	1.00	4.5933e-003	1.00
$T_3=0.7500$	4.8032e-002	2.3445e-002	1.03	1.1593e-002	1.02	5.7658e-003	1.01	2.8754e-003	1.00
$T_4=1.0000$	1.7348e-001	8.7498e-002	0.99	4.3925e-002	0.99	2.2007e-002	1.00	1.1014e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7348e-001	4.3438e-001	-1.32	2.1588e-001	1.01	1.0763e-001	1.00	5.3743e-002	1.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8046e-001	4.3438e-001	1.02	2.1588e-001	1.01	1.0777e-001	1.00	5.3828e-002	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.6345e-003	1.9306e-003	0.45	4.7723e-004	2.02	1.1851e-004	2.01	2.9526e-005	2.00
$T_1=0.2500$	2.3462e-003	1.7042e-003	0.46	4.2571e-004	2.00	1.0628e-004	2.00	2.6547e-005	2.00
$T_2=0.5000$	3.7363e-003	1.3669e-003	1.45	3.4387e-004	1.99	8.6157e-005	2.00	2.1560e-005	2.00
$T_3=0.7500$	4.5485e-003	5.7473e-004	2.98	1.4546e-004	1.98	3.6550e-005	1.99	9.1594e-006	2.00
$T_4=1.0000$	2.6345e-003	1.9306e-003	0.45	4.7723e-004	2.02	1.1851e-004	2.01	2.9526e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5485e-003	5.2509e-003	-0.21	1.3497e-003	1.96	3.4099e-004	1.98	8.6570e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.2218e-002	5.4208e-003	2.04	1.3812e-003	1.97	3.4703e-004	1.99	8.6940e-005	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.5675e-003	3.0785e-005	8.12	3.5447e-006	3.12	4.3715e-007	3.02	5.4292e-008	3.01
$T_1=0.2500$	5.1914e-003	3.1859e-005	7.35	3.7345e-006	3.09	4.6347e-007	3.01	5.7748e-008	3.00
$T_2=0.5000$	1.5659e-003	3.2753e-005	5.58	3.9247e-006	3.06	4.8847e-007	3.01	6.0945e-008	3.00
$T_3=0.7500$	3.1302e-003	2.4533e-005	7.00	3.0135e-006	3.03	3.7529e-007	3.01	4.6829e-008	3.00
$T_4=1.0000$	8.5675e-003	3.0785e-005	8.12	3.5447e-006	3.12	4.3715e-007	3.02	5.4292e-008	3.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.5675e-003	7.9182e-005	6.76	8.9422e-006	3.15	1.1331e-006	2.98	1.4259e-007	2.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2002e-002	1.1605e-004	6.69	9.0874e-006	3.67	1.1381e-006	3.00	1.4289e-007	2.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	24	48	96	192	384				

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3700e-003	2.2700e-006	11.85	1.6408e-008	7.11	1.2563e-009	3.71	7.8956e-011	3.99
$T_1=0.2500$	4.9852e-003	1.9773e-006	11.30	2.1299e-008	6.54	1.5873e-009	3.75	9.9801e-011	3.99
$T_2=0.5000$	1.3269e-003	1.0565e-006	10.29	3.0783e-008	5.10	2.1123e-009	3.87	1.3219e-010	4.00
$T_3=0.7500$	3.2560e-003	5.0583e-007	12.65	3.6865e-008	3.78	2.3165e-009	3.99	1.4406e-010	4.01
$T_4=1.0000$	8.3700e-003	2.2700e-006	11.85	1.6408e-008	7.11	1.2563e-009	3.71	7.8957e-011	3.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3700e-003	1.5788e-005	9.05	5.4042e-008	8.19	3.2182e-009	4.07	2.1114e-010	3.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1785e-002	4.6231e-005	7.99	2.0614e-007	7.81	3.7130e-009	5.79	2.1267e-010	4.13
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3742e-003	2.5091e-006	11.70	6.9563e-009	8.49	2.6939e-011	8.01	7.4328e-014	8.50
$T_1=0.2500$	4.9908e-003	2.2959e-006	11.09	6.5179e-009	8.46	2.6887e-011	7.92	1.1293e-013	7.90
$T_2=0.5000$	1.3350e-003	1.5057e-006	9.79	4.4782e-009	8.39	2.2418e-011	7.64	2.0930e-013	6.74
$T_3=0.7500$	3.2484e-003	3.9949e-007	12.99	1.3353e-009	8.22	1.3987e-011	6.58	3.3576e-013	5.38
$T_4=1.0000$	8.3742e-003	2.5091e-006	11.70	6.9563e-009	8.49	2.6938e-011	8.01	7.3631e-014	8.52
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3742e-003	1.6327e-005	9.00	4.6715e-008	8.45	1.7493e-010	8.06	5.9514e-013	8.20
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1791e-002	4.6967e-005	7.97	1.8206e-007	8.01	7.0343e-010	8.02	3.2872e-012	7.74
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3742e-003	2.5068e-006	11.71	6.8878e-009	8.51	2.4773e-011	8.12	3.9221e-014	9.30
$T_1=0.2500$	4.9907e-003	2.2920e-006	11.09	6.3977e-009	8.48	2.3068e-011	8.12	3.8679e-014	9.22
$T_2=0.5000$	1.3348e-003	1.4984e-006	9.80	4.2570e-009	8.46	1.5383e-011	8.11	2.8907e-014	9.06
$T_3=0.7500$	3.2487e-003	3.9265e-007	13.01	1.0729e-009	8.52	3.8479e-012	8.12	1.6136e-014	7.90
$T_4=1.0000$	8.3742e-003	2.5068e-006	11.71	6.8878e-009	8.51	2.4772e-011	8.12	3.9347e-014	9.30
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3742e-003	1.6322e-005	9.00	4.6520e-008	8.45	1.6836e-010	8.11	5.0952e-013	8.37
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1791e-002	4.6960e-005	7.97	1.8213e-007	8.01	7.0340e-010	8.02	3.2124e-012	7.77
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4776e-011	8.12	3.9801e-014	9.28
$T_1=0.2500$	4.9907e-003	2.2921e-006	11.09	6.3983e-009	8.48	2.3076e-011	8.12	3.9238e-014	9.20
$T_2=0.5000$	1.3348e-003	1.4984e-006	9.80	4.2584e-009	8.46	1.5404e-011	8.11	2.9077e-014	9.05
$T_3=0.7500$	3.2487e-003	3.9276e-007	13.01	1.0748e-009	8.51	3.8765e-012	8.12	1.6327e-014	7.89
$T_4=1.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4775e-011	8.12	3.9922e-014	9.28
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3742e-003	1.6322e-005	9.00	4.6521e-008	8.45	1.6837e-010	8.11	5.0959e-013	8.37
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1791e-002	4.6960e-005	7.97	1.8213e-007	8.01	7.0340e-010	8.02	3.2124e-012	7.77
Iterationsschritt 7:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4776e-011	8.12	3.9830e-014	9.28
$T_1=0.2500$	4.9907e-003	2.2921e-006	11.09	6.3983e-009	8.48	2.3077e-011	8.12	3.8941e-014	9.21
$T_2=0.5000$	1.3348e-003	1.4984e-006	9.80	4.2584e-009	8.46	1.5404e-011	8.11	2.8757e-014	9.07
$T_3=0.7500$	3.2487e-003	3.9276e-007	13.01	1.0748e-009	8.51	3.8765e-012	8.12	1.5977e-014	7.92
$T_4=1.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4776e-011	8.12	3.9953e-014	9.28

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3742e-003	1.6322e-005	9.00	4.6521e-008	8.45	1.6837e-010	8.11	5.0932e-013	8.37
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1791e-002	4.6960e-005	7.97	1.8213e-007	8.01	7.0340e-010	8.02	3.2121e-012	7.77
Iterationsschritt 8:									
Punkte:	24	48		96		192		384	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4776e-011	8.12	3.9496e-014	9.29
$T_1=0.2500$	4.9907e-003	2.2921e-006	11.09	6.3983e-009	8.48	2.3077e-011	8.12	3.8850e-014	9.21
$T_2=0.5000$	1.3348e-003	1.4984e-006	9.80	4.2584e-009	8.46	1.5404e-011	8.11	2.8913e-014	9.06
$T_3=0.7500$	3.2487e-003	3.9276e-007	13.01	1.0748e-009	8.51	3.8765e-012	8.12	1.6186e-014	7.90
$T_4=1.0000$	8.3742e-003	2.5069e-006	11.71	6.8880e-009	8.51	2.4776e-011	8.12	3.9618e-014	9.29
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.3742e-003	1.6322e-005	9.00	4.6521e-008	8.45	1.6837e-010	8.11	5.0965e-013	8.37
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1791e-002	4.6960e-005	7.97	1.8213e-007	8.01	7.0340e-010	8.02	3.2125e-012	7.77

Beide Tabellen sind wieder stark durch den ‘Ordnungssprung’ beeinflusst (vgl. 8.1), deutlich abzulesen ist aber, die Maximalordnung 6 für $m = 5$ bzw. 8 für $m = 6$.

9.2. Nicht äquidistantes Zufallsgitter: Auch dafür liefert die ‘Variante mit linkem Punkt’ zuverlässig Maximalordnung $m + 1$. Mehr als diese, wie bei äquidistantem Gitter, wird hier allerdings nicht erreicht.

Tabelle 34:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.5212e-001	1.2651e-001	2.91	5.8519e-002	1.11	2.8604e-002	1.03	1.4176e-002	1.01
$T_1=0.2500$	6.2352e-001	9.4255e-002	2.73	4.3139e-002	1.13	2.1004e-002	1.04	1.0391e-002	1.02
$T_2=0.5000$	2.6667e-001	5.4379e-002	2.29	2.4731e-002	1.14	1.2007e-002	1.04	5.9316e-003	1.02
$T_3=0.7500$	3.5948e-001	3.0257e-002	3.57	1.4695e-002	1.04	7.3153e-003	1.01	3.6567e-003	1.00
$T_4=1.0000$	9.5212e-001	1.2651e-001	2.91	5.8519e-002	1.11	2.8604e-002	1.03	1.4176e-002	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.5212e-001	5.9247e-001	0.68	2.8010e-001	1.08	1.3810e-001	1.02	6.8727e-002	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.6870e+000	5.9247e-001	1.51	2.8010e-001	1.08	1.3810e-001	1.02	6.8727e-002	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.6559e-001	3.8290e-003	6.12	8.3850e-004	2.19	2.0278e-004	2.05	5.0078e-005	2.02
$T_1=0.2500$	1.8278e-001	3.4664e-003	5.72	7.5240e-004	2.20	1.8156e-004	2.05	4.4786e-005	2.02
$T_2=0.5000$	8.5327e-002	2.8193e-003	4.92	6.0987e-004	2.21	1.4674e-004	2.06	3.6131e-005	2.02
$T_3=0.7500$	6.6176e-002	1.2654e-003	5.71	2.6774e-004	2.24	6.3549e-005	2.07	1.5537e-005	2.03
$T_4=1.0000$	2.6559e-001	3.8290e-003	6.12	8.3850e-004	2.19	2.0278e-004	2.05	5.0078e-005	2.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.6559e-001	1.2797e-002	4.38	2.6191e-003	2.29	6.2639e-004	2.06	1.5559e-004	2.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6559e-001	1.2797e-002	4.38	2.6191e-003	2.29	6.2658e-004	2.06	1.5559e-004	2.01

Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.2259e-001	3.5731e-005	12.60	7.8603e-006	2.18	1.0323e-006	2.93	1.2833e-007	3.01
$T_1=0.2500$	1.4980e-001	4.5732e-005	11.68	8.0541e-006	2.51	1.0751e-006	2.91	1.3383e-007	3.01
$T_2=0.5000$	5.9260e-002	4.3689e-005	10.41	8.5696e-006	2.35	1.1172e-006	2.94	1.3856e-007	3.01
$T_3=0.7500$	6.3224e-002	3.9412e-005	10.65	6.8557e-006	2.52	8.4832e-007	3.01	1.0430e-007	3.02
$T_4=1.0000$	2.2259e-001	3.5731e-005	12.60	7.8603e-006	2.18	1.0323e-006	2.93	1.2833e-007	3.01
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.2259e-001	1.1133e-003	7.64	2.4318e-005	5.52	2.9771e-006	3.03	3.7000e-007	3.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.2259e-001	1.2583e-003	7.47	2.4479e-005	5.68	2.9771e-006	3.04	3.7000e-007	3.01

Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.2357e-001	8.2897e-005	11.40	1.0497e-006	6.30	1.9163e-008	5.78	5.0069e-010	5.26
$T_1=0.2500$	1.5082e-001	1.0326e-004	10.51	1.2718e-006	6.34	2.2821e-008	5.80	5.9946e-010	5.25
$T_2=0.5000$	6.0522e-002	8.9656e-005	9.40	1.1115e-006	6.33	2.1283e-008	5.71	6.4292e-010	5.05
$T_3=0.7500$	6.2209e-002	3.3933e-005	10.84	4.5363e-007	6.23	1.1784e-008	5.27	5.1383e-010	4.52
$T_4=1.0000$	2.2357e-001	8.2897e-005	11.40	1.0497e-006	6.30	1.9163e-008	5.78	5.0070e-010	5.26
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.2357e-001	1.0720e-003	7.70	1.2516e-005	6.42	1.8278e-007	6.10	3.2028e-009	5.83
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.2357e-001	1.2255e-003	7.51	1.3299e-005	6.53	1.8593e-007	6.16	3.2028e-009	5.86

Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.2356e-001	8.1506e-005	11.42	9.7816e-007	6.38	1.4900e-008	6.04	2.3446e-010	5.99
$T_1=0.2500$	1.5081e-001	1.0158e-004	10.54	1.1840e-006	6.42	1.7578e-008	6.07	2.7271e-010	6.01
$T_2=0.5000$	6.0484e-002	8.7539e-005	9.43	9.9925e-007	6.45	1.4558e-008	6.10	2.2330e-010	6.03
$T_3=0.7500$	6.2267e-002	3.1580e-005	10.95	3.3062e-007	6.58	4.4726e-009	6.21	6.5276e-011	6.10
$T_4=1.0000$	2.2356e-001	8.1506e-005	11.42	9.7816e-007	6.38	1.4900e-008	6.04	2.3447e-010	5.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.2356e-001	1.0726e-003	7.70	1.2552e-005	6.42	1.8363e-007	6.09	2.8399e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.2356e-001	1.2260e-003	7.51	1.3332e-005	6.52	1.8630e-007	6.16	2.8584e-009	6.03

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.2356e-001	8.1527e-005	11.42	9.7867e-007	6.38	1.4915e-008	6.04	2.3491e-010	5.99
$T_1=0.2500$	1.5081e-001	1.0161e-004	10.54	1.1847e-006	6.42	1.7600e-008	6.07	2.7338e-010	6.01
$T_2=0.5000$	6.0484e-002	8.7587e-005	9.43	1.0005e-006	6.45	1.4593e-008	6.10	2.2436e-010	6.02
$T_3=0.7500$	6.2264e-002	3.1648e-005	10.94	3.3234e-007	6.57	4.5223e-009	6.20	6.6779e-011	6.08
$T_4=1.0000$	2.2356e-001	8.1527e-005	11.42	9.7867e-007	6.38	1.4915e-008	6.04	2.3491e-010	5.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.2356e-001	1.0726e-003	7.70	1.2551e-005	6.42	1.8362e-007	6.09	2.8396e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.2356e-001	1.2260e-003	7.51	1.3332e-005	6.52	1.8629e-007	6.16	2.8582e-009	6.03

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.2356e-001	8.1527e-005	11.42	9.7867e-007	6.38	1.4915e-008	6.04	2.3491e-010	5.99
$T_1=0.2500$	1.5081e-001	1.0161e-004	10.54	1.1847e-006	6.42	1.7600e-008	6.07	2.7338e-010	6.01
$T_2=0.5000$	6.0484e-002	8.7586e-005	9.43	1.0004e-006	6.45	1.4593e-008	6.10	2.2436e-010	6.02

$T_3=0.7500$	6.2264e-002	3.1647e-005	10.94	3.3232e-007	6.57	4.5220e-009	6.20	6.6774e-011	6.08
$T_4=1.0000$	2.2356e-001	8.1527e-005	11.42	9.7867e-007	6.38	1.4915e-008	6.04	2.3491e-010	5.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.2356e-001	1.0726e-003	7.70	1.2551e-005	6.42	1.8362e-007	6.09	2.8396e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.2356e-001	1.2260e-003	7.51	1.3332e-005	6.52	1.8629e-007	6.16	2.8582e-009	6.03

Tabelle 35:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)															
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)															
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	5.3013e-001	9.1496e-002	2.53	4.5550e-002	1.01	2.2720e-002	1.00	1.1344e-002	1.00	8.3000e-003	1.00	5.5224e-002	1.00		
$T_1=0.2500$	3.6318e-001	6.7130e-002	2.44	3.3334e-002	1.01	1.6623e-002	1.00	8.3000e-003	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00		
$T_2=0.5000$	1.6326e-001	3.8588e-002	2.08	1.9077e-002	1.02	9.4947e-003	1.01	4.7362e-003	1.01	2.9488e-003	1.00	5.5224e-002	1.00		
$T_3=0.7500$	1.1531e-001	2.3389e-002	2.30	1.1803e-002	0.99	5.9012e-003	1.00	2.9488e-003	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00		
$T_4=1.0000$	5.3013e-001	9.1496e-002	2.53	4.5550e-002	1.01	2.2720e-002	1.00	1.1344e-002	1.00	8.3000e-003	1.00	5.5224e-002	1.00		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.3013e-001	4.4375e-001	0.26	2.2168e-001	1.00	1.1060e-001	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0820e+000	4.4375e-001	1.29	2.2168e-001	1.00	1.1060e-001	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00	5.5224e-002	1.00		
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	3.5172e-002	1.9628e-003	4.16	4.9413e-004	1.99	1.2310e-004	2.01	3.0698e-005	2.00	8.8218e-005	2.00	8.8218e-005	2.00		
$T_1=0.2500$	2.8082e-002	1.8020e-003	3.96	4.4853e-004	2.01	1.1153e-004	2.01	2.7797e-005	2.00	8.8218e-005	2.00	8.8218e-005	2.00		
$T_2=0.5000$	1.9612e-002	1.5041e-003	3.70	3.6877e-004	2.03	9.1374e-005	2.01	2.2742e-005	2.01	8.8218e-005	2.01	8.8218e-005	2.01		
$T_3=0.7500$	6.5327e-003	6.7358e-004	3.28	1.5965e-004	2.08	3.9164e-005	2.03	9.7044e-006	2.01	8.8218e-005	2.01	8.8218e-005	2.01		
$T_4=1.0000$	3.5172e-002	1.9628e-003	4.16	4.9413e-004	1.99	1.2310e-004	2.01	3.0698e-005	2.00	8.8218e-005	2.00	8.8218e-005	2.00		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.5172e-002	5.8213e-003	2.60	1.4201e-003	2.04	3.5229e-004	2.01	8.8218e-005	2.00	8.8218e-005	2.00	8.8218e-005	2.00		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.1660e-002	6.1144e-003	2.77	1.4401e-003	2.09	3.5781e-004	2.01	8.8697e-005	2.01	8.8697e-005	2.01	8.8697e-005	2.01		
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.8811e-002	4.0711e-005	8.85	3.6292e-006	3.49	4.4447e-007	3.03	5.5339e-008	3.01	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$T_1=0.2500$	8.9125e-003	4.0726e-005	7.77	3.9271e-006	3.37	4.8160e-007	3.03	5.9903e-008	3.01	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$T_2=0.5000$	1.5451e-003	3.9468e-005	5.29	4.2064e-006	3.23	5.1649e-007	3.03	6.4146e-008	3.01	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$T_3=0.7500$	1.1061e-002	2.6904e-005	8.68	3.2950e-006	3.03	4.0432e-007	3.03	5.0059e-008	3.01	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$T_4=1.0000$	1.8811e-002	4.0711e-005	8.85	3.6292e-006	3.49	4.4447e-007	3.03	5.5339e-008	3.01	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8811e-002	1.3841e-004	7.09	9.5523e-006	3.86	1.1328e-006	3.08	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6740e-002	1.7275e-004	7.27	9.5523e-006	4.18	1.1328e-006	3.08	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02	1.3995e-007	3.02		
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	24			48			96			192			384		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.8739e-002	1.2145e-005	10.59	4.4355e-008	8.10	7.8395e-010	5.82	7.2466e-011	3.44	7.2466e-011	3.44	7.2466e-011	3.44		

$T_1=0.2500$	8.8511e-003	8.8561e-006	9.96	2.1240e-008	8.70	1.2764e-009	4.06	9.6874e-011	3.72
$T_2=0.5000$	1.3958e-003	4.5418e-006	8.26	1.3881e-008	8.35	2.0166e-009	2.78	1.3409e-010	3.91
$T_3=0.7500$	1.0912e-002	3.2566e-006	11.71	4.9182e-008	6.05	2.4988e-009	4.30	1.5141e-010	4.04
$T_4=1.0000$	1.8739e-002	1.2145e-005	10.59	4.4355e-008	8.10	7.8395e-010	5.82	7.2467e-011	3.44
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8739e-002	5.5756e-005	8.39	2.5022e-007	7.80	2.4988e-009	6.65	1.6914e-010	3.88
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6576e-002	8.2934e-005	8.32	3.5895e-007	7.85	3.3760e-009	6.73	1.7149e-010	4.30

Iterationsschritt 4:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8739e-002	1.2448e-005	10.56	6.3520e-008	7.61
$T_1=0.2500$	8.8514e-003	9.2767e-006	9.90	4.7089e-008	7.62
$T_2=0.5000$	1.3817e-003	5.1139e-006	8.08	2.6544e-008	7.59
$T_3=0.7500$	1.0913e-002	2.9026e-006	11.88	1.5229e-008	7.57
$T_4=1.0000$	1.8739e-002	1.2448e-005	10.56	6.3520e-008	7.61
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8739e-002	5.6822e-005	8.37	2.9933e-007	7.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6581e-002	8.4216e-005	8.30	3.8088e-007	7.79

Iterationsschritt 5:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8739e-002	1.2446e-005	10.56	6.3447e-008	7.62
$T_1=0.2500$	8.8514e-003	9.2724e-006	9.90	4.6956e-008	7.63
$T_2=0.5000$	1.3822e-003	5.1064e-006	8.08	2.6323e-008	7.60
$T_3=0.7500$	1.0913e-002	2.9088e-006	11.87	1.5422e-008	7.56
$T_4=1.0000$	1.8739e-002	1.2446e-005	10.56	6.3447e-008	7.62
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8739e-002	5.6809e-005	8.37	2.9911e-007	7.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6581e-002	8.4196e-005	8.30	3.8086e-007	7.79

Iterationsschritt 6:

Punkte:	24	48	96	192	384
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8739e-002	1.2446e-005	10.56	6.3447e-008	7.62
$T_1=0.2500$	8.8514e-003	9.2724e-006	9.90	4.6956e-008	7.63
$T_2=0.5000$	1.3822e-003	5.1064e-006	8.08	2.6324e-008	7.60
$T_3=0.7500$	1.0913e-002	2.9087e-006	11.87	1.5420e-008	7.56
$T_4=1.0000$	1.8739e-002	1.2446e-005	10.56	6.3447e-008	7.62
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8739e-002	5.6809e-005	8.37	2.9911e-007	7.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6581e-002	8.4196e-005	8.30	3.8086e-007	7.79

9.3. Das Verhalten der Ableitung: Wie bereits in Abschnitt 4 angesprochen, läßt sich für die ‘Variante mit linkem Punkt’ für den letzten Iterationsschritt eine zu (3.10) aus Satz 3.1 analoge Aussage nicht beweisen. Tatsächlich zeigt sich für die Ableitungen Maximalordnung m :

Tabelle 36:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)
Primitives Randwertproblem (6.1)
Gitter: 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)

Ableitungen, Iterationsschritt 0:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.8945e-002	8.0934e-003	1.23	3.6771e-003	1.14	1.7432e-003	1.08	8.4744e-004	1.04
$T_2=1.0000$	2.3458e-002	1.1011e-002	1.09	5.3184e-003	1.05	2.6118e-003	1.03	1.2940e-003	1.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3458e-002	1.1011e-002	1.09	5.3184e-003	1.05	2.6118e-003	1.03	1.2940e-003	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.6271e-002	4.5613e-002	0.54	2.6789e-002	0.77	1.4523e-002	0.88	7.5621e-003	0.94
Ableitungen, Iterationsschritt 1:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.6065e-003	1.8091e-003	2.07	4.3857e-004	2.04	1.0780e-004	2.02	2.6712e-005	2.01
$T_2=1.0000$	4.9825e-003	1.1934e-003	2.06	2.9100e-004	2.04	7.1787e-005	2.02	1.7824e-005	2.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.6065e-003	2.1473e-003	1.82	5.5407e-004	1.95	1.3920e-004	1.99	3.4764e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.6065e-003	2.2119e-003	1.78	6.9085e-004	1.68	1.9316e-004	1.84	5.1079e-005	1.92
Ableitungen, Iterationsschritt 2:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.0915e-003	1.3597e-004	3.00	1.6865e-005	3.01	2.0966e-006	3.01	2.6127e-007	3.00
$T_2=1.0000$	5.5307e-004	6.8216e-005	3.02	8.4237e-006	3.02	1.0452e-006	3.01	1.3013e-007	3.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0915e-003	1.8538e-004	2.56	2.6621e-005	2.80	3.5497e-006	2.91	4.5765e-007	2.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0915e-003	1.8538e-004	2.56	2.6621e-005	2.80	3.5497e-006	2.91	4.5765e-007	2.96
Ableitungen, Iterationsschritt 3:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.7923e-005	5.2571e-006	3.89	3.3706e-007	3.96	2.1275e-008	3.99	1.3368e-009	3.99
$T_2=1.0000$	2.2070e-005	1.4994e-006	3.88	9.5620e-008	3.97	6.0091e-009	3.99	3.7744e-010	3.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.7923e-005	8.5320e-006	3.19	6.8398e-007	3.64	4.8082e-008	3.83	3.1846e-009	3.92
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.7923e-005	8.5320e-006	3.19	6.8398e-007	3.64	4.8082e-008	3.83	3.1846e-009	3.92
Ableitungen, Iterationsschritt 4:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.4689e-005	2.7614e-006	4.02	1.7362e-007	3.99	1.0910e-008	3.99	6.8127e-010	4.00
$T_2=1.0000$	3.0704e-005	1.7991e-006	4.09	1.0938e-007	4.04	6.7464e-009	4.02	4.1705e-010	4.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4689e-005	3.3941e-006	3.72	2.4397e-007	3.80	1.6549e-008	3.88	1.0784e-009	3.94
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.4689e-005	3.3941e-006	3.72	2.4397e-007	3.80	1.6549e-008	3.88	1.0784e-009	3.94
Ableitungen, Iterationsschritt 5:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.7852e-005	3.2012e-006	4.18	1.8778e-007	4.09	1.1358e-008	4.05	6.9620e-010	4.03
$T_2=1.0000$	3.5492e-005	1.9487e-006	4.19	1.1401e-007	4.10	6.8905e-009	4.05	4.2275e-010	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.7852e-005	4.1007e-006	3.82	2.7294e-007	3.91	1.7586e-008	3.96	1.1149e-009	3.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.7852e-005	4.1007e-006	3.82	2.7294e-007	3.91	1.7586e-008	3.96	1.1149e-009	3.98
Ableitungen, Iterationsschritt 6:									

Punkte:	8			16			32			64			128		
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.9162e-005	3.2238e-006	4.20	1.8815e-007	4.10	1.1364e-008	4.05	6.9693e-010	4.03						
$T_2=1.0000$	3.5904e-005	1.9552e-006	4.20	1.1411e-007	4.10	6.8923e-009	4.05	4.2229e-010	4.03						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.9162e-005	4.1394e-006	3.84	2.7378e-007	3.92	1.7601e-008	3.96	1.1127e-009	3.98						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.9162e-005	4.1394e-006	3.84	2.7378e-007	3.92	1.7601e-008	3.96	1.1127e-009	3.98						

Ableitungen, Iterationsschritt 7:

Punkte:	8			16			32			64			128		
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.9286e-005	3.2249e-006	4.20	1.8816e-007	4.10	1.1364e-008	4.05	6.9497e-010	4.03						
$T_2=1.0000$	3.5939e-005	1.9555e-006	4.20	1.1411e-007	4.10	6.8918e-009	4.05	4.2239e-010	4.03						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.9286e-005	4.1414e-006	3.84	2.7380e-007	3.92	1.7603e-008	3.96	1.1136e-009	3.98						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.9286e-005	4.1414e-006	3.84	2.7380e-007	3.92	1.7603e-008	3.96	1.1136e-009	3.98						

Tabelle 37:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)															
Primitives Randwertproblem (6.1)															
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)															
Ableitungen, Iterationsschritt 0:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.9841e-002	9.7714e-003	1.02	4.8537e-003	1.01	2.4194e-003	1.00	1.2079e-003	1.00						
$T_2=1.0000$	2.1991e-002	1.0983e-002	1.00	5.4934e-003	1.00	2.7478e-003	1.00	1.3742e-003	1.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.1991e-002	1.0983e-002	1.00	5.5008e-003	1.00	2.7544e-003	1.00	1.3774e-003	1.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7381e-002	3.4335e-002	0.46	2.0635e-002	0.73	1.1309e-002	0.87	5.9200e-003	0.93						
Ableitungen, Iterationsschritt 1:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.3536e-003	1.3620e-003	1.97	3.4395e-004	1.99	8.6443e-005	1.99	2.1669e-005	2.00						
$T_2=1.0000$	3.4510e-003	8.7313e-004	1.98	2.1986e-004	1.99	5.5178e-005	1.99	1.3822e-005	2.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.3536e-003	1.6477e-003	1.70	4.5339e-004	1.86	1.1859e-004	1.93	3.0298e-005	1.97						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.3536e-003	1.6477e-003	1.70	4.5339e-004	1.86	1.2600e-004	1.85	3.3556e-005	1.91						
Ableitungen, Iterationsschritt 2:															
Punkte:	10			20			40			80			160		
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	6.2241e-004	8.0934e-005	2.94	1.0343e-005	2.97	1.3078e-006	2.98	1.6438e-007	2.99						
$T_2=1.0000$	3.1254e-004	3.9925e-005	2.97	5.0555e-006	2.98	6.3626e-007	2.99	7.9779e-008	3.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.2241e-004	1.1129e-004	2.48	1.6625e-005	2.74	2.2705e-006	2.87	2.9652e-007	2.94						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.2241e-004	1.1129e-004	2.48	1.6625e-005	2.74	2.2705e-006	2.87	2.9652e-007	2.94						
Ableitungen, Iterationsschritt 3:															
Punkte:	10			20			40			80			160		

	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.0503e-005	3.9702e-006	3.93	2.5535e-007	3.96	1.6173e-008	3.98	9.7088e-010	4.06
$T_2=1.0000$	2.5026e-005	1.5768e-006	3.99	9.9288e-008	3.99	6.2187e-009	4.00	3.5779e-010	4.12
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.0503e-005	5.9845e-006	3.34	4.7255e-007	3.66	3.3172e-008	3.83	2.1196e-009	3.97
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.0503e-005	5.9845e-006	3.34	4.7255e-007	3.66	3.3172e-008	3.83	2.1196e-009	3.97
Ableitungen, Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.0651e-006	2.2880e-007	4.95	7.3071e-009	4.97	2.0810e-010	5.13	5.1849e-011	2.00
$T_2=1.0000$	2.9231e-006	8.8857e-008	5.04	2.7356e-009	5.02	6.9846e-011	5.29	3.0877e-011	1.18
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	7.0651e-006	3.5492e-007	4.32	1.4261e-008	4.64	4.6469e-010	4.94	7.5704e-011	2.62
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.0651e-006	3.5492e-007	4.32	1.4261e-008	4.64	4.6469e-010	4.94	7.5704e-011	2.62
Ableitungen, Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.4700e-006	6.3355e-008	5.28	1.7418e-009	5.18	2.6637e-011	6.03	5.3945e-011	-1.02
$T_2=1.0000$	1.3639e-006	3.5877e-008	5.25	1.0133e-009	5.15	1.4921e-011	6.09	3.1865e-011	-1.09
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.4700e-006	8.4825e-008	4.86	2.6434e-009	5.00	4.1387e-011	6.00	8.5924e-011	-1.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.4700e-006	8.4825e-008	4.86	2.6434e-009	5.00	4.1387e-011	6.00	8.5924e-011	-1.05
Ableitungen, Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.0969e-006	5.6413e-008	5.22	1.6247e-009	5.12	2.6049e-011	5.96	5.1813e-011	-0.99
$T_2=1.0000$	1.2597e-006	3.4097e-008	5.21	9.8399e-010	5.11	1.3474e-011	6.19	2.8976e-011	-1.10
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.0969e-006	7.2617e-008	4.85	2.3672e-009	4.94	3.5564e-011	6.06	8.3103e-011	-1.22
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.0969e-006	7.2617e-008	4.85	2.3672e-009	4.94	3.5564e-011	6.06	8.3103e-011	-1.22
Ableitungen, Iterationsschritt 7:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p	$\ \eta'_{T_i} - y'(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.0676e-006	5.6131e-008	5.20	1.6187e-009	5.12	2.2330e-011	6.18	4.8206e-011	-1.11
$T_2=1.0000$	1.2530e-006	3.4040e-008	5.20	9.8463e-010	5.11	1.1717e-011	6.39	3.0837e-011	-1.40
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.0676e-006	7.2082e-008	4.84	2.3563e-009	4.94	3.7337e-011	5.98	9.5682e-011	-1.36
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.0676e-006	7.2082e-008	4.84	2.3563e-009	4.94	3.7337e-011	5.98	9.5682e-011	-1.36

Für die Differenzenquotienten erreicht man hingegen wie für die Näherungslösung selbst Ordnung $m + 1$:

Tabelle 38:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)				
Primitives Randwertproblem (6.1)				
Gitter: 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)				
	0.2956	0.5262	0.7752	1.0000
	$t_{i,1}$	$t_{i,2}$	$t_{i,3}$	$t_{i,4}$
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 0:				
Punkte:	8	16	32	64

	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.7379e-002	1.3156e-002	1.06	6.4425e-003	1.03	3.1871e-003	1.02
$T_2=1.0000$	5.5726e-003	2.3159e-003	1.27	1.0375e-003	1.16	4.8824e-004	1.09
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.7379e-002	2.2819e-002	0.26	1.4503e-002	0.65	8.1528e-003	0.83
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	7.2225e-002	4.0407e-002	0.84	2.1413e-002	0.92	1.1028e-002	0.96
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 1:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.6408e-004	1.7085e-004	2.16	3.9955e-005	2.10	9.6275e-006	2.05
$T_2=1.0000$	4.7417e-004	1.3990e-004	1.76	3.7842e-005	1.89	9.8326e-006	1.94
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	7.6408e-004	5.3979e-004	0.50	2.0331e-004	1.41	6.1511e-005	1.72
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.7283e-003	1.4311e-003	1.72	3.9502e-004	1.86	1.0386e-004	1.93
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 2:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.2082e-005	2.4117e-006	2.32	3.6641e-007	2.72	5.0175e-008	2.87
$T_2=1.0000$	5.7928e-005	8.0721e-006	2.84	1.0665e-006	2.92	1.3709e-007	2.96
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.7928e-005	8.8735e-006	2.71	2.3366e-006	1.93	3.9616e-007	2.56
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.7206e-004	4.5052e-005	2.59	6.5074e-006	2.79	8.7535e-007	2.89
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 3:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.7808e-006	2.8498e-007	3.73	1.9559e-008	3.86	1.2814e-009	3.93
$T_2=1.0000$	3.9000e-006	2.7546e-007	3.82	1.8309e-008	3.91	1.1804e-009	3.96
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.9000e-006	3.3089e-007	3.56	2.2286e-008	3.89	1.9522e-009	3.51
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.3363e-005	1.2623e-006	3.40	9.7017e-008	3.70	6.7266e-009	3.85
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 4:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.9427e-008	4.6203e-009	3.69	1.9211e-010	4.59	6.7875e-012	4.82
$T_2=1.0000$	1.0459e-008	8.2818e-010	3.66	4.4421e-011	4.22	1.6751e-012	4.73
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.9427e-008	4.6203e-009	3.69	2.7007e-010	4.10	1.4808e-011	4.19
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.6499e-007	2.0815e-008	4.76	8.4756e-010	4.62	3.2760e-011	4.69
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 5:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.3206e-007	9.3935e-009	5.14	2.8186e-010	5.06	8.6680e-012	5.02
$T_2=1.0000$	2.2931e-007	6.5837e-009	5.12	1.9826e-010	5.05	6.1000e-012	5.02
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.3206e-007	1.1408e-008	4.86	3.7207e-010	4.94	1.1805e-011	4.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.6780e-007	2.1203e-008	4.74	7.3208e-010	4.86	2.4131e-011	4.92
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 6:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.6321e-007	9.9361e-009	5.19	2.9094e-010	5.09	8.8182e-012	5.04
$T_2=1.0000$	2.3905e-007	6.7336e-009	5.15	2.0059e-010	5.07	6.1395e-012	5.03

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.6321e-007	1.2016e-008	4.92	3.8006e-010	4.98	1.1900e-011	5.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.8978e-007	2.1948e-008	4.75	7.4887e-010	4.87	2.4443e-011	4.94
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 7:							
Punkte:	8	16		32		64	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.6537e-007	9.9543e-009	5.20	2.9109e-010	5.10	8.8182e-012	5.04
$T_2=1.0000$	2.3935e-007	6.7350e-009	5.15	2.0060e-010	5.07	6.1277e-012	5.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.6537e-007	1.2043e-008	4.92	3.8028e-010	4.99	1.1900e-011	5.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.9027e-007	2.1963e-008	4.75	7.4907e-010	4.87	2.4443e-011	4.94

Tabelle 39:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)							
Primitives Randwertproblem (6.1)							
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)							
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 0:							
Punkte:	10	20		40		80	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.8063e-002	8.6788e-003	1.06	4.2483e-003	1.03	2.1010e-003	1.02
$T_2=1.0000$	9.2228e-004	1.0771e-004	3.10	3.8185e-005	1.50	4.2610e-005	-0.16
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8063e-002	1.6545e-002	0.13	1.0857e-002	0.61	6.1867e-003	0.81
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.7691e-002	4.0658e-002	0.74	2.2326e-002	0.86	1.1705e-002	0.93
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 1:							
Punkte:	10	20		40		80	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.2101e-004	1.1470e-004	1.88	3.0105e-005	1.93	7.7227e-006	1.96
$T_2=1.0000$	9.7188e-004	2.5565e-004	1.93	6.5728e-005	1.96	1.6675e-005	1.98
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.7188e-004	2.5565e-004	1.93	6.9545e-005	1.88	2.4478e-005	1.51
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.9951e-003	1.3454e-003	1.57	3.9138e-004	1.78	1.0563e-004	1.89
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 2:							
Punkte:	10	20		40		80	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1446e-004	1.4485e-005	2.98	1.8313e-006	2.98	2.3054e-007	2.99
$T_2=1.0000$	9.1915e-005	1.1717e-005	2.97	1.4856e-006	2.98	1.8724e-007	2.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1446e-004	1.4485e-005	2.98	1.8347e-006	2.98	2.3243e-007	2.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1193e-004	3.7285e-005	2.51	5.8119e-006	2.68	8.1163e-007	2.84
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 3:							
Punkte:	10	20		40		80	
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1326e-005	7.0472e-007	4.01	4.4200e-008	3.99	2.7719e-009	4.00
$T_2=1.0000$	5.8220e-006	3.5573e-007	4.03	2.2095e-008	4.01	1.3786e-009	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1326e-005	8.2741e-007	3.77	5.1264e-008	4.01	3.2065e-009	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1899e-005	1.0604e-006	3.49	8.6223e-008	3.62	6.5960e-009	3.71

Differenzenquotienten, Iterationsschritt 4:							
Punkte:	10	20	40	80			
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.6970e-007	2.6447e-008	5.04	8.1989e-010	5.01	2.5381e-011	5.01
$T_2=1.0000$	2.9104e-007	7.9899e-009	5.19	2.3304e-010	5.10	6.9069e-012	5.08
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.6970e-007	3.8376e-008	4.50	1.3571e-009	4.82	4.3883e-011	4.95
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.6970e-007	3.8376e-008	4.50	1.4328e-009	4.74	5.6392e-011	4.67
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 5:							
Punkte:	10	20	40	80			
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.4736e-008	9.5104e-010	6.09	1.4266e-011	6.06	2.1760e-014	9.36
$T_2=1.0000$	1.5476e-008	1.7042e-010	6.50	1.9652e-012	6.44	8.7208e-014	4.49
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.4736e-008	1.6151e-009	5.32	3.0757e-011	5.71	2.0717e-013	7.21
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.4736e-008	1.6151e-009	5.32	3.0757e-011	5.71	3.9180e-013	6.29
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 6:							
Punkte:	10	20	40	80			
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1188e-008	1.2937e-010	6.43	1.5210e-012	6.41	1.6354e-013	3.22
$T_2=1.0000$	5.1025e-009	6.5595e-011	6.28	8.4494e-013	6.28	9.8144e-014	3.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1188e-008	1.8352e-010	5.93	2.3878e-012	6.26	2.9432e-013	3.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1188e-008	1.8352e-010	5.93	3.1001e-012	5.89	2.9432e-013	3.40
Differenzenquotienten, Iterationsschritt 7:							
Punkte:	10	20	40	80			
	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p	$\ \partial\eta_{T_i} - \partial y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.9688e-009	1.0582e-010	6.23	1.3410e-012	6.30	1.6354e-013	3.04
$T_2=1.0000$	4.8931e-009	6.6721e-011	6.20	8.7219e-013	6.26	1.0902e-013	3.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.9688e-009	1.3352e-010	5.90	1.8590e-012	6.17	2.8344e-013	2.71
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0354e-008	1.8779e-010	5.78	3.2812e-012	5.84	2.8344e-013	3.53

9.4. Gauß-Knoten: Bei der Variante ‘mit linkem Punkt’ auf Gauß-Knoten zeigt sich folgendes Bild: An den Intervallenden, an denen die für Gauß-Knoten typische Superkonvergenz zum Tragen kommt, ergibt sich keine Verbesserung zur Variante ‘ohne linken Punkt’. An den Zwischenpunkten aber ergibt sich jetzt eine Maximalordnung von $m+2$, sofern $m+2 \leq 2(m-1)$, also die Ordnung an den Zwischenpunkten nicht genauer sein müsste als die Superkonvergenzordnung.

Tabelle 40:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)							
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)							
Gitter: 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)							
Iterationsschritt 0:							
Punkte:	12	24	48	96	192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	4.9729e+000	2.5427e-001	4.29	1.1420e-001	1.15	5.5991e-002	1.03	2.7915e-002	1.00
$T_1=0.2500$	3.2662e+000	1.7761e-001	4.20	8.2121e-002	1.11	4.0651e-002	1.01	2.0349e-002	1.00
$T_2=0.5000$	1.4731e+000	1.0200e-001	3.85	4.7049e-002	1.12	2.3244e-002	1.02	1.1620e-002	1.00
$T_3=0.7500$	1.3261e+000	7.6614e-002	4.11	3.1446e-002	1.28	1.4951e-002	1.07	7.3540e-003	1.02
$T_4=1.0000$	4.9729e+000	2.5427e-001	4.29	1.1420e-001	1.15	5.5991e-002	1.03	2.7915e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.9729e+000	1.3210e+000	1.91	5.7327e-001	1.20	2.7678e-001	1.05	1.3694e-001	1.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.7441e+000	1.3210e+000	2.12	5.7485e-001	1.20	2.7781e-001	1.05	1.3728e-001	1.02

Iterationsschritt 1:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6879e+000	2.1687e-002	6.28	3.7181e-003	2.54
$T_1=0.2500$	9.9654e-001	1.8924e-002	5.72	3.2327e-003	2.55
$T_2=0.5000$	2.0630e-001	1.4133e-002	3.87	2.5058e-003	2.50
$T_3=0.7500$	7.0739e-001	5.2244e-003	7.08	1.0307e-003	2.34
$T_4=1.0000$	1.6879e+000	2.1687e-002	6.28	3.7181e-003	2.54
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6879e+000	8.4396e-002	4.32	1.1920e-002	2.82
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.9119e+000	9.0672e-002	4.40	1.1992e-002	2.92

Iterationsschritt 2:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9515e+000	3.7206e-003	9.03	1.1959e-004	4.96
$T_1=0.2500$	1.3063e+000	4.2132e-003	8.28	1.4906e-004	4.82
$T_2=0.5000$	5.0772e-001	3.2151e-003	7.30	1.1341e-004	4.83
$T_3=0.7500$	5.8268e-001	5.1491e-004	10.14	2.6696e-005	4.27
$T_4=1.0000$	1.9515e+000	3.7206e-003	9.03	1.1959e-004	4.96
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.9515e+000	4.6040e-002	5.41	2.2082e-003	4.38
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.2076e+000	5.3568e-002	5.36	2.4058e-003	4.48

Iterationsschritt 3:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9346e+000	4.4819e-003	8.75	1.9226e-004	4.54
$T_1=0.2500$	1.2812e+000	4.9088e-003	8.03	2.1828e-004	4.49
$T_2=0.5000$	4.7452e-001	3.8626e-003	6.94	1.7656e-004	4.45
$T_3=0.7500$	6.0559e-001	1.0228e-003	9.21	5.0688e-005	4.33
$T_4=1.0000$	1.9346e+000	4.4819e-003	8.75	1.9226e-004	4.54
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.9346e+000	4.5631e-002	5.41	2.1671e-003	4.40
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1887e+000	5.3151e-002	5.36	2.3604e-003	4.49

Iterationsschritt 4:

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9355e+000	4.4484e-003	8.77	1.9068e-004	4.54
$T_1=0.2500$	1.2831e+000	4.8727e-003	8.04	2.1652e-004	4.49
$T_2=0.5000$	4.7779e-001	3.8190e-003	6.97	1.7444e-004	4.45
$T_3=0.7500$	6.0203e-001	9.7387e-004	9.27	4.8424e-005	4.33
$T_4=1.0000$	1.9355e+000	4.4484e-003	8.77	1.9068e-004	4.54
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.9355e+000	4.5646e-002	5.41	2.1678e-003	4.40

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1897e+000	5.3166e-002	5.36	2.3612e-003	4.49	1.3141e-004	4.17	7.9583e-006	4.05
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9355e+000	4.4497e-003	8.76	1.9071e-004	4.54	1.0966e-005	4.12	6.7160e-007	4.03
$T_1=0.2500$	1.2830e+000	4.8742e-003	8.04	2.1655e-004	4.49	1.2549e-005	4.11	7.7004e-007	4.03
$T_2=0.5000$	4.7752e-001	3.8213e-003	6.97	1.7450e-004	4.45	1.0170e-005	4.10	6.2493e-007	4.02
$T_3=0.7500$	6.0246e-001	9.7721e-004	9.27	4.8497e-005	4.33	2.8794e-006	4.07	1.7772e-007	4.02
$T_4=1.0000$	1.9355e+000	4.4497e-003	8.76	1.9071e-004	4.54	1.0966e-005	4.12	6.7160e-007	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.9355e+000	4.5645e-002	5.41	2.1677e-003	4.40	1.2744e-004	4.09	7.8945e-006	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1897e+000	5.3165e-002	5.36	2.3612e-003	4.49	1.3141e-004	4.17	7.9583e-006	4.05
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9354e+000	4.4496e-003	8.76	1.9071e-004	4.54	1.0966e-005	4.12	6.7160e-007	4.03
$T_1=0.2500$	1.2830e+000	4.8742e-003	8.04	2.1655e-004	4.49	1.2549e-005	4.11	7.7004e-007	4.03
$T_2=0.5000$	4.7754e-001	3.8212e-003	6.97	1.7449e-004	4.45	1.0170e-005	4.10	6.2493e-007	4.02
$T_3=0.7500$	6.0241e-001	9.7701e-004	9.27	4.8495e-005	4.33	2.8794e-006	4.07	1.7772e-007	4.02
$T_4=1.0000$	1.9354e+000	4.4496e-003	8.76	1.9071e-004	4.54	1.0966e-005	4.12	6.7160e-007	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.9354e+000	4.5645e-002	5.41	2.1677e-003	4.40	1.2744e-004	4.09	7.8945e-006	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.1897e+000	5.3165e-002	5.36	2.3612e-003	4.49	1.3141e-004	4.17	7.9583e-006	4.05

Tabelle 41:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6798e+000	1.9189e-001	3.13	8.7686e-002	1.13	4.3128e-002	1.02	2.1507e-002	1.00
$T_1=0.2500$	9.5530e-001	1.3636e-001	2.81	6.3408e-002	1.10	3.1386e-002	1.01	1.5696e-002	1.00
$T_2=0.5000$	4.3300e-001	7.8128e-002	2.47	3.6303e-002	1.11	1.7938e-002	1.02	8.9599e-003	1.00
$T_3=0.7500$	7.3895e-001	5.4734e-002	3.75	2.3710e-002	1.21	1.1425e-002	1.05	5.6445e-003	1.02
$T_4=1.0000$	1.6798e+000	1.9189e-001	3.13	8.7686e-002	1.13	4.3128e-002	1.02	2.1507e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6798e+000	9.7093e-001	0.79	4.3590e-001	1.16	2.1222e-001	1.04	1.0527e-001	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3736e+000	9.7698e-001	1.28	4.3801e-001	1.16	2.1283e-001	1.04	1.0543e-001	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	2.6520e-001	9.0856e-003	4.87	1.9980e-003	2.18	4.8038e-004	2.06	1.1848e-004	2.02
$T_1=0.2500$	2.0643e-001	7.6192e-003	4.76	1.7354e-003	2.13	4.2281e-004	2.04	1.0491e-004	2.01
$T_2=0.5000$	1.2068e-001	5.8361e-003	4.37	1.3661e-003	2.09	3.3628e-004	2.02	8.3815e-005	2.00

$T_3=0.7500$	5.5264e-002	2.4396e-003	4.50	5.7778e-004	2.08	1.4307e-004	2.01	3.5752e-005	2.00
$T_4=1.0000$	2.6520e-001	9.0856e-003	4.87	1.9980e-003	2.18	4.8038e-004	2.06	1.1848e-004	2.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.6520e-001	2.3671e-002	3.49	5.8559e-003	2.02	1.4550e-003	2.01	3.7100e-004	1.97
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.3183e-001	2.3671e-002	4.19	5.8904e-003	2.01	1.4758e-003	2.00	3.7220e-004	1.99

Iterationsschritt 2:

Punkte:	16	32	64	128	256
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5676e-001	4.5618e-004	8.42	3.4462e-005	3.73
$T_1=0.2500$	9.2970e-002	4.3732e-004	7.73	3.4601e-005	3.66
$T_2=0.5000$	2.1682e-002	3.9353e-004	5.78	3.4653e-005	3.51
$T_3=0.7500$	6.4232e-002	2.4579e-004	8.03	2.5255e-005	3.28
$T_4=1.0000$	1.5676e-001	4.5618e-004	8.42	3.4462e-005	3.73
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.5676e-001	1.7055e-003	6.52	9.8864e-005	4.11
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.8520e-001	6.0130e-003	5.57	1.4710e-004	5.35

Iterationsschritt 3:

Punkte:	16	32	64	128	256
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6292e-001	1.6508e-004	9.95	1.5634e-006	6.72
$T_1=0.2500$	1.0038e-001	1.5300e-004	9.36	1.4039e-006	6.77
$T_2=0.5000$	3.0323e-002	9.7833e-005	8.28	7.3765e-007	7.05
$T_3=0.7500$	5.9095e-002	1.9561e-005	11.56	5.0623e-007	5.27
$T_4=1.0000$	1.6292e-001	1.6508e-004	9.95	1.5634e-006	6.72
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6292e-001	1.1828e-003	7.11	1.2942e-005	6.51
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9269e-001	5.4770e-003	5.74	9.0939e-005	5.91

Iterationsschritt 4:

Punkte:	16	32	64	128	256
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6261e-001	1.7209e-004	9.88	1.8999e-006	6.50
$T_1=0.2500$	9.9932e-002	1.6134e-004	9.27	1.8150e-006	6.47
$T_2=0.5000$	2.9677e-002	1.0904e-004	8.09	1.2537e-006	6.44
$T_3=0.7500$	5.9677e-002	2.6809e-005	11.12	3.0669e-007	6.45
$T_4=1.0000$	1.6261e-001	1.7209e-004	9.88	1.8999e-006	6.50
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6261e-001	1.1951e-003	7.09	1.3748e-005	6.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9228e-001	5.4894e-003	5.73	9.1050e-005	5.91

Iterationsschritt 5:

Punkte:	16	32	64	128	256
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6262e-001	1.7192e-004	9.89	1.8957e-006	6.50
$T_1=0.2500$	9.9955e-002	1.6110e-004	9.28	1.8087e-006	6.48
$T_2=0.5000$	2.9720e-002	1.0863e-004	8.10	1.2432e-006	6.45
$T_3=0.7500$	5.9623e-002	2.6368e-005	11.14	2.9422e-007	6.49
$T_4=1.0000$	1.6262e-001	1.7192e-004	9.89	1.8957e-006	6.50
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6262e-001	1.1949e-003	7.09	1.3738e-005	6.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9230e-001	5.4892e-003	5.73	9.1048e-005	5.91

Iterationsschritt 6:

Punkte:	16	32	64	128	256
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	1.6262e-001	1.7193e-004	9.89	1.8958e-006	6.50	2.7415e-008	6.11	4.2037e-010	6.03
$T_1=0.2500$	9.9954e-002	1.6110e-004	9.28	1.8088e-006	6.48	2.6256e-008	6.11	4.0296e-010	6.03
$T_2=0.5000$	2.9717e-002	1.0864e-004	8.10	1.2434e-006	6.45	1.8122e-008	6.10	2.7838e-010	6.02
$T_3=0.7500$	5.9627e-002	2.6385e-005	11.14	2.9446e-007	6.49	4.2824e-009	6.10	6.5763e-011	6.02
$T_4=1.0000$	1.6262e-001	1.7193e-004	9.89	1.8958e-006	6.50	2.7415e-008	6.11	4.2037e-010	6.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.6262e-001	1.1949e-003	7.09	1.3738e-005	6.44	2.0044e-007	6.10	3.1053e-009	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9230e-001	5.4892e-003	5.73	9.1048e-005	5.91	1.4461e-006	5.98	2.2637e-008	6.00

Tabelle 42:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.3841e+000	1.5451e-001	3.16	7.0461e-002	1.13	3.4631e-002	1.02	1.7262e-002	1.00
$T_1=0.2500$	7.6484e-001	1.1043e-001	2.79	5.1081e-002	1.11	2.5232e-002	1.02	1.2605e-002	1.00
$T_2=0.5000$	3.2761e-001	6.3115e-002	2.38	2.9216e-002	1.11	1.4413e-002	1.02	7.1936e-003	1.00
$T_3=0.7500$	6.3120e-001	4.3275e-002	3.87	1.8894e-002	1.20	9.1376e-003	1.05	4.5215e-003	1.02
$T_4=1.0000$	1.3841e+000	1.5451e-001	3.16	7.0461e-002	1.13	3.4631e-002	1.02	1.7262e-002	1.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3841e+000	7.7262e-001	0.84	3.4845e-001	1.15	1.6998e-001	1.04	8.4386e-002	1.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.0792e+000	7.7742e-001	1.42	3.4973e-001	1.15	1.7032e-001	1.04	8.4512e-002	1.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	5.4525e-002	5.8907e-003	3.21	1.2715e-003	2.21	3.0613e-004	2.05	7.5605e-005	2.02
$T_1=0.2500$	6.2241e-002	4.9946e-003	3.64	1.1113e-003	2.17	2.7053e-004	2.04	6.7141e-005	2.01
$T_2=0.5000$	5.5590e-002	3.8441e-003	3.85	8.7937e-004	2.13	2.1599e-004	2.03	5.3803e-005	2.01
$T_3=0.7500$	2.7118e-002	1.6061e-003	4.08	3.7222e-004	2.11	9.1898e-005	2.02	2.2941e-005	2.00
$T_4=1.0000$	5.4525e-002	5.8907e-003	3.21	1.2715e-003	2.21	3.0613e-004	2.05	7.5605e-005	2.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.2241e-002	1.6293e-002	1.93	3.7524e-003	2.12	9.2500e-004	2.02	2.3490e-004	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0434e-001	1.6471e-002	2.66	3.7748e-003	2.13	9.3279e-004	2.02	2.3564e-004	1.98
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.0012e-002	1.5643e-004	6.00	1.6565e-005	3.24	1.9677e-006	3.07	2.4150e-007	3.03
$T_1=0.2500$	7.8062e-003	1.5317e-004	5.67	1.6759e-005	3.19	2.0171e-006	3.05	2.4901e-007	3.02
$T_2=0.5000$	5.1147e-003	1.5328e-004	5.06	1.7050e-005	3.17	2.0660e-006	3.04	2.5575e-007	3.01
$T_3=0.7500$	2.2465e-003	1.1289e-004	4.31	1.2692e-005	3.15	1.5428e-006	3.04	1.9114e-007	3.01
$T_4=1.0000$	1.0012e-002	1.5643e-004	6.00	1.6565e-005	3.24	1.9677e-006	3.07	2.4150e-007	3.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0012e-002	3.9104e-004	4.68	4.6120e-005	3.08	5.6628e-006	3.03	7.0547e-007	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.1668e-002	4.7411e-004	6.77	4.6382e-005	3.35	5.6846e-006	3.03	7.0690e-007	3.01

Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.8166e-003	5.7408e-006	10.21	1.8904e-007	4.92	1.0762e-008	4.13	6.5480e-010	4.04
$T_1=0.2500$	3.8932e-003	5.9647e-006	9.35	2.2000e-007	4.76	1.2776e-008	4.11	7.8258e-010	4.03
$T_2=0.5000$	8.3255e-004	6.2610e-006	7.06	2.7225e-007	4.52	1.6050e-008	4.08	9.8563e-010	4.03
$T_3=0.7500$	3.0126e-003	5.3738e-006	9.13	2.8046e-007	4.26	1.6702e-008	4.07	1.0256e-009	4.03
$T_4=1.0000$	6.8166e-003	5.7408e-006	10.21	1.8904e-007	4.92	1.0762e-008	4.13	6.5480e-010	4.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.8166e-003	2.1455e-005	8.31	5.4966e-007	5.29	3.2121e-008	4.10	1.9957e-009	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.6798e-002	4.0665e-004	6.85	3.7099e-006	6.78	5.6351e-008	6.04	2.1476e-009	4.71

Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.9584e-003	2.3126e-006	11.56	5.2552e-009	8.78	3.5679e-011	7.20	1.4908e-012	4.58
$T_1=0.2500$	4.0941e-003	2.0052e-006	11.00	4.0028e-009	8.97	5.3452e-011	6.23	2.0839e-012	4.68
$T_2=0.5000$	1.0896e-003	1.1827e-006	9.85	1.5186e-009	9.61	9.5116e-011	4.00	3.2351e-012	4.88
$T_3=0.7500$	2.7703e-003	3.7281e-007	12.86	4.6950e-009	6.31	1.4427e-010	5.02	4.4296e-012	5.03
$T_4=1.0000$	6.9584e-003	2.3126e-006	11.56	5.2552e-009	8.78	3.5678e-011	7.20	1.4903e-012	4.58
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.9584e-003	1.4067e-005	8.95	3.7041e-008	8.57	1.8646e-010	7.63	5.2819e-012	5.14
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7008e-002	4.0249e-004	6.87	3.3338e-006	6.92	2.6244e-008	6.99	2.0876e-010	6.97

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.9528e-003	2.3713e-006	11.52	6.5704e-009	8.50	2.3880e-011	8.10	8.5974e-014	8.12
$T_1=0.2500$	4.0847e-003	2.0865e-006	10.93	5.8698e-009	8.47	2.1512e-011	8.09	7.8647e-014	8.10
$T_2=0.5000$	1.0750e-003	1.3155e-006	9.67	3.7752e-009	8.44	1.4185e-011	8.06	5.5859e-014	7.99
$T_3=0.7500$	2.7884e-003	3.8610e-007	12.82	1.0329e-009	8.55	4.1155e-012	7.97	2.4774e-014	7.38
$T_4=1.0000$	6.9528e-003	2.3713e-006	11.52	6.5704e-009	8.50	2.3881e-011	8.10	8.6746e-014	8.10
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.9528e-003	1.4196e-005	8.94	4.0408e-008	8.46	1.4750e-010	8.10	5.3018e-013	8.12
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7000e-002	4.0256e-004	6.87	3.3329e-006	6.92	2.6141e-008	6.99	2.0405e-010	7.00

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40	80	160	320				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	6.9530e-003	2.3703e-006	11.52	6.5585e-009	8.50	2.3713e-011	8.11	8.3536e-014	8.15
$T_1=0.2500$	4.0851e-003	2.0847e-006	10.94	5.8486e-009	8.48	2.1207e-011	8.11	7.4464e-014	8.15
$T_2=0.5000$	1.0758e-003	1.3120e-006	9.68	3.7325e-009	8.46	1.3572e-011	8.10	4.6816e-014	8.18
$T_3=0.7500$	2.7872e-003	3.8430e-007	12.82	1.0042e-009	8.58	3.5908e-012	8.13	1.3315e-014	8.08
$T_4=1.0000$	6.9530e-003	2.3703e-006	11.52	6.5585e-009	8.50	2.3714e-011	8.11	8.4350e-014	8.14
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.9530e-003	1.4194e-005	8.94	4.0361e-008	8.46	1.4677e-010	8.10	5.1835e-013	8.15
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7000e-002	4.0256e-004	6.87	3.3329e-006	6.92	2.6141e-008	6.99	2.0405e-010	7.00

Tabelle 43:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)
Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5)
Gitter: 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)

Iterationsschritt 0:													
Punkte:	24			48			96			192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.0901e+000	1.2884e-001	3.08	5.8650e-002	1.14	2.8807e-002	1.03	1.4354e-002	1.00				
$T_1=0.2500$	5.7222e-001	9.2430e-002	2.63	4.2585e-002	1.12	2.1004e-002	1.02	1.0485e-002	1.00				
$T_2=0.5000$	2.3563e-001	5.2740e-002	2.16	2.4339e-002	1.12	1.1994e-002	1.02	5.9828e-003	1.00				
$T_3=0.7500$	5.3754e-001	3.5653e-002	3.91	1.5644e-002	1.19	7.5818e-003	1.05	3.7552e-003	1.01				
$T_4=1.0000$	1.0901e+000	1.2884e-001	3.08	5.8650e-002	1.14	2.8807e-002	1.03	1.4354e-002	1.00				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.0901e+000	6.3940e-001	0.77	2.8908e-001	1.15	1.4117e-001	1.03	7.0116e-002	1.01				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5050e+000	6.4250e-001	1.23	2.8985e-001	1.15	1.4137e-001	1.04	7.0252e-002	1.01				
Iterationsschritt 1:													
Punkte:	24			48			96			192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	3.5256e-002	4.0358e-003	3.13	8.7266e-004	2.21	2.1044e-004	2.05	5.2024e-005	2.02				
$T_1=0.2500$	3.9802e-002	3.4467e-003	3.53	7.6568e-004	2.17	1.8641e-004	2.04	4.6274e-005	2.01				
$T_2=0.5000$	3.4481e-002	2.6682e-003	3.69	6.0783e-004	2.13	1.4914e-004	2.03	3.7139e-005	2.01				
$T_3=0.7500$	1.5495e-002	1.1176e-003	3.79	2.5754e-004	2.12	6.3475e-005	2.02	1.5834e-005	2.00				
$T_4=1.0000$	3.5256e-002	4.0358e-003	3.13	8.7266e-004	2.21	2.1044e-004	2.05	5.2024e-005	2.02				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.9802e-002	1.1404e-002	1.80	2.5892e-003	2.14	6.3596e-004	2.03	1.6109e-004	1.98				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.9243e-002	1.1506e-002	2.59	2.6008e-003	2.15	6.4207e-004	2.02	1.6181e-004	1.99				
Iterationsschritt 2:													
Punkte:	24			48			96			192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.3146e-003	8.9330e-005	3.88	9.3612e-006	3.25	1.1148e-006	3.07	1.3706e-007	3.02				
$T_1=0.2500$	1.7005e-003	8.7873e-005	4.27	9.5130e-006	3.21	1.1464e-006	3.05	1.4165e-007	3.02				
$T_2=0.5000$	1.9147e-003	8.7855e-005	4.45	9.7036e-006	3.18	1.1768e-006	3.04	1.4577e-007	3.01				
$T_3=0.7500$	1.5239e-003	6.4468e-005	4.56	7.2368e-006	3.16	8.8061e-007	3.04	1.0917e-007	3.01				
$T_4=1.0000$	1.3146e-003	8.9330e-005	3.88	9.3612e-006	3.25	1.1148e-006	3.07	1.3706e-007	3.02				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9147e-003	2.3580e-004	3.02	2.6408e-005	3.16	3.2212e-006	3.04	4.0064e-007	3.01				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.2886e-003	2.4185e-004	5.10	2.6544e-005	3.19	3.2298e-006	3.04	4.0118e-007	3.01				
Iterationsschritt 3:													
Punkte:	24			48			96			192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	2.3377e-004	1.6697e-006	7.13	8.5339e-008	4.29	5.0125e-009	4.09	3.0626e-010	4.03				
$T_1=0.2500$	1.7629e-004	1.8978e-006	6.54	1.0029e-007	4.24	5.9680e-009	4.07	3.6667e-010	4.02				
$T_2=0.5000$	1.1912e-004	2.3453e-006	5.67	1.2566e-007	4.22	7.5174e-009	4.06	4.6274e-010	4.02				
$T_3=0.7500$	5.8357e-005	2.4336e-006	4.58	1.3107e-007	4.21	7.8455e-009	4.06	4.8275e-010	4.02				
$T_4=1.0000$	2.3377e-004	1.6697e-006	7.13	8.5339e-008	4.29	5.0125e-009	4.09	3.0627e-010	4.03				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.3377e-004	4.2986e-006	5.77	2.4983e-007	4.10	1.5243e-008	4.03	9.4738e-010	4.01				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8590e-003	4.2399e-005	7.71	3.0510e-007	7.12	1.5305e-008	4.32	9.4930e-010	4.01				
Iterationsschritt 4:													
Punkte:	24			48			96			192		384	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_0=0.0000$	1.7850e-004	4.4465e-008	11.97	6.9983e-010	5.99	1.9942e-011	5.13	6.4098e-013	4.96				

$T_1=0.2500$	9.7937e-005	5.0679e-008	10.92	9.3779e-010	5.76	2.7279e-011	5.10	8.7089e-013	4.97
$T_2=0.5000$	1.9450e-005	6.3812e-008	8.25	1.4150e-009	5.49	4.1571e-011	5.09	1.3002e-012	5.00
$T_3=0.7500$	8.3991e-005	7.4827e-008	10.13	1.9145e-009	5.29	5.6398e-011	5.09	1.7296e-012	5.03
$T_4=1.0000$	1.7850e-004	4.4465e-008	11.97	6.9983e-010	5.99	1.9942e-011	5.13	6.4012e-013	4.96
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.7850e-004	1.7298e-007	10.01	2.4513e-009	6.14	7.3391e-011	5.06	2.4648e-012	4.90
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8090e-003	4.1803e-005	7.72	1.7262e-007	7.92	7.1272e-010	7.92	3.9089e-012	7.51

Iterationsschritt 5:

Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8031e-004	1.8027e-008	13.29	9.3125e-012	10.92	2.1677e-014	8.75	3.9024e-014	-0.85
$T_1=0.2500$	1.0091e-004	1.5008e-008	12.72	5.4736e-012	11.42	5.6330e-014	6.60	3.8728e-014	0.54
$T_2=0.5000$	2.3190e-005	8.3667e-009	11.44	8.2731e-012	9.98	1.7021e-013	5.60	2.6795e-014	2.67
$T_3=0.7500$	7.8332e-005	3.8283e-009	14.32	2.4624e-011	7.28	3.5791e-013	6.10	1.8842e-015	7.57
$T_4=1.0000$	1.8031e-004	1.8027e-008	13.29	9.3118e-012	10.92	2.2022e-014	8.72	3.8240e-014	-0.80
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.8031e-004	1.0292e-007	10.77	6.7870e-011	10.57	4.8616e-013	7.13	3.2482e-013	0.58
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8113e-003	4.1800e-005	7.72	1.7185e-007	7.93	6.7971e-010	7.98	2.6654e-012	7.99

Iterationsschritt 6:

Punkte:	24	48	96	192	384				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.8026e-004	1.8369e-008	13.26	1.2726e-011	10.50	6.1821e-014	7.69	3.9915e-014	0.63
$T_1=0.2500$	1.0080e-004	1.5579e-008	12.66	1.0954e-011	10.47	5.7416e-014	7.58	4.0468e-014	0.50
$T_2=0.5000$	2.3028e-005	9.5082e-009	11.24	6.8513e-012	10.44	3.9620e-014	7.43	2.9657e-014	0.42
$T_3=0.7500$	7.8643e-005	3.5946e-009	14.42	2.4226e-012	10.54	7.5538e-015	8.33	6.6378e-015	0.19
$T_4=1.0000$	1.8026e-004	1.8369e-008	13.26	1.2726e-011	10.50	6.1085e-014	7.70	3.9099e-014	0.64
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.8026e-004	1.0401e-007	10.76	7.3840e-011	10.46	3.9006e-013	7.56	3.2429e-013	0.27
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8112e-003	4.1801e-005	7.72	1.7185e-007	7.93	6.7951e-010	7.98	2.6624e-012	8.00

9.5. Steife Randwertprobleme: Für die Variante ‘mit linkem Punkt’ bereitet die Steifheit schon auf äquidistanten Gittern Probleme:

Tabelle 44:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.4546e-002	2.8682e-002	0.93	1.4725e-002	0.96	7.4627e-003	0.98	3.7570e-003	0.99
$T_2=1.0000$	5.5262e-002	2.8073e-002	0.98	1.4156e-002	0.99	7.1090e-003	0.99	3.5624e-003	1.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	5.5262e-002	2.9050e-002	0.93	1.6701e-002	0.80	8.4555e-003	0.98	4.2546e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1819e-002	3.2505e-002	0.93	1.6701e-002	0.96	8.4555e-003	0.98	4.2548e-003	0.99
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20	40	80	160				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	1.8545e-003	5.4436e-004	1.77	1.4755e-004	1.88	3.8419e-005	1.94	9.8031e-006	1.97
$T_2=1.0000$	6.0915e-003	1.6012e-003	1.93	4.1125e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.0915e-003	1.6012e-003	1.93	4.1125e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.0915e-003	1.6012e-003	1.93	4.1125e-004	1.96	1.0426e-004	1.98	2.6251e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.7203e-005	1.0903e-006	4.64	2.2008e-007	2.31	3.9881e-008	2.46	5.8554e-009	2.77
$T_2=1.0000$	4.5960e-004	6.2783e-005	2.87	8.2510e-006	2.93	1.0587e-006	2.96	1.3411e-007	2.98
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.5960e-004	6.2783e-005	2.87	8.2510e-006	2.93	1.0587e-006	2.96	1.3430e-007	2.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.5960e-004	6.2828e-005	2.87	8.2748e-006	2.92	1.0612e-006	2.96	1.3441e-007	2.98
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.5123e-005	8.0088e-007	4.24	4.7020e-008	4.09	2.8562e-009	4.04	1.7607e-010	4.02
$T_2=1.0000$	2.8666e-005	1.9153e-006	3.90	1.2809e-007	3.90	8.3316e-009	3.94	5.3191e-010	3.97
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.8666e-005	2.2225e-006	3.69	1.5253e-007	3.86	1.9648e-008	2.96	4.2812e-009	2.20
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.4377e-005	2.3220e-006	3.89	3.5539e-007	2.71	6.7023e-008	2.41	1.3600e-008	2.30
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.0072e-006	1.0377e-007	5.27	2.3238e-009	5.48	6.5210e-011	5.16	1.9058e-012	5.10
$T_2=1.0000$	3.9301e-006	7.6684e-008	5.68	1.9159e-009	5.32	5.3471e-011	5.16	1.5577e-012	5.10
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.0072e-006	1.3281e-007	4.92	1.6450e-008	3.01	5.1976e-009	1.66	8.1019e-010	2.68
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.0327e-006	9.3265e-007	2.69	2.2085e-007	2.08	4.9344e-008	2.16	9.1430e-009	2.43
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.5308e-006	9.8551e-008	5.16	5.9120e-010	7.38	9.2122e-012	6.00	1.2623e-013	6.19
$T_2=1.0000$	3.0699e-006	4.1002e-008	6.23	6.1642e-010	6.06	9.5229e-012	6.02	1.2772e-013	6.22
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.5308e-006	4.5326e-007	2.96	6.8890e-008	2.72	4.8405e-009	3.83	4.9452e-010	3.29
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.0836e-006	7.7364e-007	2.40	1.6926e-007	2.19	3.1850e-008	2.41	4.0647e-009	2.97
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	5.8069e-006	1.3294e-007	5.45	5.4423e-010	7.93	8.4327e-012	6.01	1.1358e-013	6.21
$T_2=1.0000$	3.1085e-006	4.1256e-008	6.24	6.1896e-010	6.06	9.5489e-012	6.02	1.2843e-013	6.22
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	5.8069e-006	1.0854e-006	2.42	1.9409e-007	2.48	2.3976e-008	3.02	1.0479e-009	4.52
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.8069e-006	1.0854e-006	2.42	1.9409e-007	2.48	2.3976e-008	3.02	2.7200e-009	3.14

Tabelle 45:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)

Iterationsschritt 0:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	4.6208e-002	2.4110e-002	0.94	1.2326e-002	0.97	6.2331e-003	0.98	3.1344e-003	0.99				
$T_2=1.0000$	4.6289e-002	2.3459e-002	0.98	1.1814e-002	0.99	5.9286e-003	0.99	2.9698e-003	1.00				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.6289e-002	2.4396e-002	0.92	1.3975e-002	0.80	7.0611e-003	0.98	3.5493e-003	0.99				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.2163e-002	2.7384e-002	0.93	1.3975e-002	0.97	7.0611e-003	0.98	3.5496e-003	0.99				
Iterationsschritt 1:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.3592e-003	3.8833e-004	1.81	1.0386e-004	1.90	2.6862e-005	1.95	6.8309e-006	1.98				
$T_2=1.0000$	4.2980e-003	1.1218e-003	1.94	2.8692e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.2980e-003	1.1218e-003	1.94	2.8692e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.2980e-003	1.1218e-003	1.94	2.8692e-004	1.97	7.2574e-005	1.98	1.8251e-005	1.99				
Iterationsschritt 2:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.0483e-005	6.3585e-007	4.04	1.4534e-007	2.13	2.4396e-008	2.57	3.4752e-009	2.81				
$T_2=1.0000$	2.7237e-004	3.6918e-005	2.88	4.8161e-006	2.94	6.1537e-007	2.97	7.7783e-008	2.98				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.7237e-004	3.6918e-005	2.88	4.8161e-006	2.94	6.1537e-007	2.97	7.7892e-008	2.98				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.7237e-004	3.6994e-005	2.88	4.8294e-006	2.94	6.1684e-007	2.97	7.7953e-008	2.98				
Iterationsschritt 3:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	6.1365e-006	3.6627e-007	4.07	2.2277e-008	4.04	1.3687e-009	4.02	8.5047e-011	4.01				
$T_2=1.0000$	1.2931e-005	9.2905e-007	3.80	6.2366e-008	3.90	4.0434e-009	3.95	2.5781e-010	3.97				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.2931e-005	1.0703e-006	3.59	7.4149e-008	3.85	1.0329e-008	2.84	1.2968e-009	2.99				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.6134e-005	1.2134e-006	3.73	2.3755e-007	2.35	4.3107e-008	2.46	9.0391e-009	2.25				
Iterationsschritt 4:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	7.5797e-007	3.1440e-008	4.59	7.2231e-010	5.44	2.3284e-011	4.96	1.0840e-012	4.42				
$T_2=1.0000$	3.3474e-007	1.4784e-008	4.50	5.3515e-010	4.79	1.8298e-011	4.87	9.8131e-013	4.22				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	7.5797e-007	6.8867e-008	3.46	2.3283e-008	1.56	7.0774e-009	1.72	1.6492e-009	2.10				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.0090e-006	6.3171e-007	2.25	1.3378e-007	2.24	3.0635e-008	2.13	5.5003e-009	2.48				
Iterationsschritt 5:													
Punkte:	12			24			48			96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.2310e-006	4.2455e-008	4.86	1.7405e-011	11.25	6.4141e-013	4.76	3.6784e-013	0.80				
$T_2=1.0000$	1.9438e-007	4.1035e-010	8.89	3.3126e-012	6.95	3.9450e-013	3.07	4.0271e-013	-0.03				
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.2310e-006	2.3707e-007	2.38	3.5074e-008	2.76	2.4777e-009	3.82	2.6993e-010	3.20				
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5971e-006	5.8812e-007	2.14	1.2529e-007	2.23	2.2485e-008	2.48	2.7468e-009	3.03				
Iterationsschritt 6:													

Punkte:	12	24	48	96	192
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.6421e-006	6.5348e-008	5.34	1.4197e-012	15.49
$T_2=1.0000$	2.9995e-007	2.7079e-010	10.11	7.7274e-013	8.45
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.6421e-006	5.3123e-007	2.31	8.7268e-008	2.61
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.6421e-006	5.3123e-007	2.31	8.7268e-008	2.61

Bei nicht äquidistantem Gitter scheitert die Iteration dann wie zu erwarten vollständig:

Tabelle 46:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)							
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)							
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)							
Iterationsschritt 0:							
Punkte:	10	20	40	80	160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	5.3543e-002	3.0675e-002	0.80	1.6293e-002	0.91		
$T_2=1.0000$	7.5394e-002	3.5024e-002	1.11	1.6882e-002	1.05		
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	7.5394e-002	3.5024e-002	1.11	1.8743e-002	0.90		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5394e-002	3.5754e-002	1.08	1.8743e-002	0.93		
Iterationsschritt 1:							
Punkte:	10	20	40	80	160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.1879e-003	7.0532e-004	0.75	2.3561e-004	1.58		
$T_2=1.0000$	1.1420e-002	2.6935e-003	2.08	6.5097e-004	2.05		
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.1420e-002	2.6935e-003	2.08	6.5097e-004	2.05		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1420e-002	2.6935e-003	2.08	6.5097e-004	2.05		
Iterationsschritt 2:							
Punkte:	10	20	40	80	160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	2.2767e-004	6.2788e-005	1.86	3.0786e-005	1.03		
$T_2=1.0000$	1.4924e-003	1.8554e-004	3.01	2.3082e-005	3.01		
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.4924e-003	1.8554e-004	3.01	3.0786e-005	2.59		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4924e-003	1.8554e-004	3.01	3.0786e-005	2.59		
Iterationsschritt 3:							
Punkte:	10	20	40	80	160		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	7.9447e-005	1.4458e-005	2.46	5.3399e-007	4.76		
$T_2=1.0000$	2.2006e-004	3.7447e-005	2.55	8.3262e-006	2.17		
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.2006e-004	3.7447e-005	2.55	8.3262e-006	2.17		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.2006e-004	3.7447e-005	2.55	1.1910e-005	1.65		
Iterationsschritt 4:							
Punkte:	10	20	40	80	160		

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.3010e-005	2.4549e-005	0.81	2.3712e-005	0.05	8.1686e-006	1.54	1.4300e-006	2.51
$T_2=1.0000$	1.3655e-004	7.4681e-005	0.87	1.7682e-005	2.08	2.9959e-006	2.56	3.3010e-007	3.18
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3655e-004	7.4681e-005	0.87	2.9270e-005	1.35	8.6933e-006	1.75	1.4670e-006	2.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3655e-004	7.4681e-005	0.87	2.9270e-005	1.35	8.6933e-006	1.75	1.4670e-006	2.57
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.9045e-005	4.1808e-005	-0.53	3.1229e-005	0.42	1.1351e-005	1.46	2.5121e-006	2.18
$T_2=1.0000$	1.6081e-004	7.4583e-005	1.11	1.6962e-005	2.14	3.1302e-006	2.44	3.8055e-007	3.04
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.6081e-004	9.0240e-005	0.83	3.5343e-005	1.35	1.1744e-005	1.59	2.5381e-006	2.21
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.6081e-004	9.0240e-005	0.83	3.5343e-005	1.35	1.1744e-005	1.59	2.5381e-006	2.21
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.0233e-005	4.3308e-005	-1.10	2.3231e-005	0.90	8.7781e-006	1.40	2.2776e-006	1.95
$T_2=1.0000$	1.5260e-004	3.3433e-005	2.19	5.6984e-006	2.55	1.6175e-006	1.82	2.7747e-007	2.54
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.5260e-004	6.9766e-005	1.13	2.3648e-005	1.56	8.9250e-006	1.41	2.2939e-006	1.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5260e-004	6.9766e-005	1.13	2.3648e-005	1.56	8.9250e-006	1.41	2.2939e-006	1.96

Tabelle 47:

Integralvariante Euler, benutze linken Punkt (9.4)									
steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.8824e-002	2.5046e-002	0.96	1.2743e-002	0.97	6.4350e-003	0.99	3.2346e-003	0.99
$T_2=1.0000$	4.5662e-002	2.3750e-002	0.94	1.2082e-002	0.98	6.0910e-003	0.99	3.0577e-003	0.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.8824e-002	2.5146e-002	0.96	1.4419e-002	0.80	7.2832e-003	0.99	3.6611e-003	0.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.7489e-002	2.8511e-002	1.01	1.4521e-002	0.97	7.3211e-003	0.99	3.6722e-003	1.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7313e-003	4.7000e-004	1.88	1.2486e-004	1.91	3.2731e-005	1.93	8.5000e-006	1.95
$T_2=1.0000$	4.6012e-003	1.2251e-003	1.91	3.1579e-004	1.96	8.0149e-005	1.98	2.0188e-005	1.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.6012e-003	1.2251e-003	1.91	3.1579e-004	1.96	8.0149e-005	1.98	2.0188e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.6012e-003	1.2251e-003	1.91	3.1579e-004	1.96	8.0149e-005	1.98	2.0188e-005	1.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	9.7283e-005	4.5010e-005	1.11	2.0381e-005	1.14	8.4535e-006	1.27	2.9320e-006	1.53
$T_2=1.0000$	3.3782e-004	4.6293e-005	2.87	6.1076e-006	2.92	7.9564e-007	2.94	1.0343e-007	2.94
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	3.3782e-004	4.6293e-005	2.87	2.0381e-005	1.18	8.4535e-006	1.27	2.9320e-006	1.53
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.4265e-004	4.8094e-005	2.83	2.0381e-005	1.24	8.4535e-006	1.27	2.9320e-006	1.53
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.0969e-005	2.4319e-005	1.33	1.0764e-005	1.18	4.5153e-006	1.25	1.6037e-006	1.49
$T_2=1.0000$	2.3816e-005	3.3978e-006	2.81	6.6529e-007	2.35	1.1330e-007	2.55	1.2449e-008	3.19
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	6.0969e-005	2.4319e-005	1.33	1.0764e-005	1.18	4.5153e-006	1.25	1.6037e-006	1.49
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	6.0969e-005	2.4319e-005	1.33	1.0764e-005	1.18	4.5153e-006	1.25	1.6037e-006	1.49
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.2442e-005	3.9771e-006	1.65	1.9473e-006	1.03	9.4624e-007	1.04	4.1897e-007	1.18
$T_2=1.0000$	1.9953e-005	3.9900e-006	2.32	9.0593e-007	2.14	1.8955e-007	2.26	2.8783e-008	2.72
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.9953e-005	6.1978e-006	1.69	2.1458e-006	1.53	9.6503e-007	1.15	4.1977e-007	1.20
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.2685e-005	1.1390e-005	0.99	4.7472e-006	1.26	1.6319e-006	1.54	4.7090e-007	1.79
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.4610e-005	2.7380e-006	2.42	7.2551e-007	1.92	3.0982e-007	1.23	6.3028e-008	2.30
$T_2=1.0000$	1.3327e-006	1.3558e-006	-0.02	1.2904e-007	3.39	4.6190e-008	1.48	1.6418e-008	1.49
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.4610e-005	2.7380e-006	2.42	7.2551e-007	1.92	3.1288e-007	1.21	6.5080e-008	2.27
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.1439e-005	9.4876e-006	1.18	3.9597e-006	1.26	1.3950e-006	1.51	3.3580e-007	2.05
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6721e-005	2.1486e-006	2.96	1.3874e-006	0.63	1.4225e-007	3.29	6.3116e-008	1.17
$T_2=1.0000$	2.7414e-005	8.6626e-006	1.66	1.5361e-006	2.50	1.5647e-007	3.30	3.2658e-009	5.58
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	2.7414e-005	8.6626e-006	1.66	2.0672e-006	2.07	2.1123e-007	3.29	6.3132e-008	1.74
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.7414e-005	8.6626e-006	1.66	3.5489e-006	1.29	1.1479e-006	1.63	2.3316e-007	2.30

10. Die Defektkorrektur auf Basis der impliziten Mittelpunktsregel (IMR)

10.1. Die Differentialvariante: Wir bestimmen also unsere Näherungslösung $\eta_{\Delta_m}^{(0)}$ mit:

6

$$(10.1) \quad \frac{\eta_1^{(0)} - \eta_0^{(0)}}{\delta} = F\left(\frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{\eta_0^{(0)} + \eta_1^{(0)}}{2}\right), \quad j = 1 \dots m$$

oder mit $t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_0+t_1}{2}$ in der Schreibweise als Runge-Kutta Schema:

⁶Im weiteren wird alles Index-befreit geschrieben; es gilt $t_0 \equiv t_{i,j-1}$ und $t_1 \equiv t_{i,j}$ usw. Auch die Randbedingungen werden nicht angeschrieben.

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \eta_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= \eta_0^{(0)} + \frac{\delta}{2} F(t_{\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2}}^{(0)}) \\ \eta_1^{(0)} &= \eta_0^{(0)} + \delta F(t_{\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2}}^{(0)}), \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ ist die n -te Näherungslösung wieder durch folgende Rekursion definiert:

$$(10.3) \quad \eta_{\Delta^m}^{(n+1)} := \eta_{\Delta^m}^{(0)} - (\pi_{\Delta^m}^{(n)} - \eta_{\Delta^m}^{(n)}),$$

wobei die $\pi_{\Delta^m}^{(n)}$ durch Lösung von

$$(10.4) \quad \frac{\pi_1^{(n)} - \pi_0^{(n)}}{\delta} = F(t_{\frac{1}{2}}, \frac{\pi_1^{(n)} + \pi_0^{(n)}}{2}) + \hat{d}_{\frac{1}{2}}(\eta^{(n)})$$

oder äquivalent dazu

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \pi_{\frac{1}{2}}^{(n)} &= \pi_0^{(n)} + \frac{\delta}{2} [F(t_{\frac{1}{2}}, \pi_{\frac{1}{2}}^{(n)}) + \hat{d}_{\frac{1}{2}}(\eta^{(n)})] \\ \pi_1^{(n)} &= \pi_0^{(n)} + \delta [F(t_{\frac{1}{2}}, \pi_{\frac{1}{2}}^{(n)}) + \hat{d}_{\frac{1}{2}}(\eta^{(n)})] \end{aligned}$$

gewonnen werden.

Anmerkung: Es wurde in der Praxis wegen des deutlich geringeren Rechenaufwandes nur mit den einzeiligen Darstellungen (10.1) bzw. (10.4) gearbeitet, die anderen dienen nur der Illustration.

Es bieten sich jetzt zwei verschiedene Varianten an den Defekt an der Stelle $t_{\frac{1}{2}}$ zu konstruieren:

$$(10.6) \quad \hat{d}_{\frac{1}{2}}(\eta) = p'(t_{\frac{1}{2}}) - F(t_{\frac{1}{2}}, p(t_{\frac{1}{2}}))$$

oder

$$(10.7) \quad \hat{d}_{\frac{1}{2}}(\eta) = p'(t_{\frac{1}{2}}) - F(t_{\frac{1}{2}}, \frac{\eta_0 + \eta_1}{2})$$

wobei $p(t)$ wieder das Polynom ist, das durch Interpolieren der $\eta_{i,j}$ für jedes i und $j = 1 \dots m$ entsteht.

Die zweite Variante (10.7) funktioniert aber nichteinmal auf äquidistantem Gitter:

Tabelle 48:

Differentialvariante IMR, Versuch mit $\frac{\eta_0 + \eta_1}{2}$ (10.7)									
Primitives Randwertproblem (6.1)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	9.0119e-004	2.2441e-004	2.01	5.6048e-005	2.00	1.4009e-005	2.00	3.5019e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.0119e-004	2.2441e-004	2.01	5.6048e-005	2.00	1.4009e-005	2.00	3.5019e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.0119e-004	2.2441e-004	2.01	5.6048e-005	2.00	1.4009e-005	2.00	3.5019e-006	2.00

Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3561e-003	3.3687e-004	2.01	8.4087e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2529e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3561e-003	3.3687e-004	2.01	8.4087e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2529e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3561e-003	3.3687e-004	2.01	8.4087e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2529e-006	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10	20	40	80				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3583e-003	3.3700e-004	2.01	8.4095e-005	2.00	2.1014e-005	2.00	5.2530e-006	2.00

Die andere Variante (10.6) funktioniert aber wie erhofft für äquidistantes Gitter:

Tabelle 49:

Differentialvariante IMR (10.6)
einfaches lineares Randwertproblem (6.4)
Gitter: 2 äquidistante Knoten ($m = 3$)

Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	6.8953e-002	1.6813e-002	2.04	4.1774e-003	2.01	1.0427e-003	2.00	2.6059e-004	2.00
$T_2=0.5000$	6.6703e-003	1.6194e-003	2.04	4.0193e-004	2.01	1.0030e-004	2.00	2.5064e-005	2.00
$T_3=0.7500$	7.2596e-002	1.7675e-002	2.04	4.3901e-003	2.01	1.0957e-003	2.00	2.7382e-004	2.00
$T_4=1.0000$	9.2922e-003	2.2425e-003	2.05	5.5577e-004	2.01	1.3864e-004	2.00	3.4642e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.2596e-002	1.7675e-002	2.04	4.3901e-003	2.01	1.0963e-003	2.00	2.7562e-004	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2596e-002	1.7675e-002	2.04	4.4165e-003	2.00	1.1023e-003	2.00	2.7562e-004	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8012e-002	1.3458e-003	4.38	7.9349e-005	4.08	4.8894e-006	4.02	3.0451e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1327e-003	1.4685e-004	4.41	8.6104e-006	4.09	5.2984e-007	4.02	3.2988e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1894e-002	1.5093e-003	4.40	8.8725e-005	4.09	5.4633e-006	4.02	3.4020e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.3317e-003	2.3581e-004	4.50	1.3664e-005	4.11	8.3849e-007	4.03	5.2167e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1894e-002	1.5093e-003	4.40	8.8725e-005	4.09	5.5233e-006	4.01	3.4476e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6090e-002	2.2577e-003	4.00	1.4198e-004	3.99	8.8205e-006	4.01	5.5527e-007	3.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8045e-002	1.3469e-003	4.38	7.9403e-005	4.08	4.8927e-006	4.02	3.0471e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1257e-003	1.4641e-004	4.42	8.5822e-006	4.09	5.2808e-007	4.02	3.2877e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.4689e-006	4.02	3.4054e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.2903e-003	2.3365e-004	4.50	1.3535e-005	4.11	8.3046e-007	4.03	5.1667e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.5260e-006	4.01	3.4500e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6063e-002	2.2575e-003	4.00	1.4195e-004	3.99	8.8263e-006	4.01	5.5559e-007	3.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8046e-002	1.3469e-003	4.38	7.9403e-005	4.08	4.8927e-006	4.02	3.0471e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1258e-003	1.4641e-004	4.42	8.5822e-006	4.09	5.2808e-007	4.02	3.2877e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.4689e-006	4.02	3.4054e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.2905e-003	2.3365e-004	4.50	1.3535e-005	4.11	8.3046e-007	4.03	5.1667e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.5260e-006	4.01	3.4500e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6063e-002	2.2575e-003	4.00	1.4195e-004	3.99	8.8263e-006	4.01	5.5559e-007	3.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8046e-002	1.3469e-003	4.38	7.9403e-005	4.08	4.8927e-006	4.02	3.0471e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1258e-003	1.4641e-004	4.42	8.5822e-006	4.09	5.2808e-007	4.02	3.2877e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.4689e-006	4.02	3.4054e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.2905e-003	2.3365e-004	4.50	1.3535e-005	4.11	8.3046e-007	4.03	5.1667e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.5260e-006	4.01	3.4500e-007	4.00

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6063e-002	2.2575e-003	4.00	1.4195e-004	3.99	8.8263e-006	4.01	5.5559e-007	3.99
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8046e-002	1.3469e-003	4.38	7.9403e-005	4.08	4.8927e-006	4.02	3.0471e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1258e-003	1.4641e-004	4.42	8.5822e-006	4.09	5.2808e-007	4.02	3.2877e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.4689e-006	4.02	3.4054e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.2905e-003	2.3365e-004	4.50	1.3535e-005	4.11	8.3046e-007	4.03	5.1667e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.5260e-006	4.01	3.4500e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6063e-002	2.2575e-003	4.00	1.4195e-004	3.99	8.8263e-006	4.01	5.5559e-007	3.99
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.8046e-002	1.3469e-003	4.38	7.9403e-005	4.08	4.8927e-006	4.02	3.0471e-007	4.01
$T_2=0.5000$	3.1258e-003	1.4641e-004	4.42	8.5822e-006	4.09	5.2808e-007	4.02	3.2877e-008	4.01
$T_3=0.7500$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.4689e-006	4.02	3.4054e-007	4.01
$T_4=1.0000$	5.2905e-003	2.3365e-004	4.50	1.3535e-005	4.11	8.3046e-007	4.03	5.1667e-008	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1936e-002	1.5110e-003	4.40	8.8816e-005	4.09	5.5260e-006	4.01	3.4500e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6063e-002	2.2575e-003	4.00	1.4195e-004	3.99	8.8263e-006	4.01	5.5559e-007	3.99

Tabelle 50:

Differentialvariante IMR (10.6)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.4)									
Gitter: 3 äquidistante Knoten ($m = 4$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	3.8223e-002	9.4233e-003	2.02	2.3477e-003	2.00	5.8641e-004	2.00	1.4657e-004	2.00
$T_2=0.5000$	3.6882e-003	9.0708e-004	2.02	2.2585e-004	2.01	5.6405e-005	2.00	1.4098e-005	2.00
$T_3=0.7500$	4.0208e-002	9.9046e-003	2.02	2.4671e-003	2.01	6.1621e-004	2.00	1.5402e-004	2.00
$T_4=1.0000$	5.1199e-003	1.2550e-003	2.03	3.1223e-004	2.01	7.7962e-005	2.00	1.9485e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.0208e-002	9.9046e-003	2.02	2.4671e-003	2.01	6.1650e-004	2.00	1.5503e-004	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.0208e-002	9.9102e-003	2.02	2.4833e-003	2.00	6.2026e-004	2.00	1.5503e-004	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3149e-002	6.4564e-004	4.35	3.8268e-005	4.08	2.3611e-006	4.02	1.4710e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0869e-003	5.1955e-005	4.39	3.0670e-006	4.08	1.8907e-007	4.02	1.1776e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2922e-002	6.2795e-004	4.36	3.7153e-005	4.08	2.2914e-006	4.02	1.4274e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.2209e-003	5.6850e-005	4.42	3.3515e-006	4.08	2.0659e-007	4.02	1.2868e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3149e-002	6.4564e-004	4.35	3.8268e-005	4.08	2.3777e-006	4.01	1.4835e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3149e-002	6.4564e-004	4.35	3.8268e-005	4.08	2.3777e-006	4.01	1.4835e-007	4.00

Iterationsschritt 2:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3553e-006	4.02	1.4674e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0318e-003	4.9401e-005	4.38	2.9183e-006	4.08	1.7993e-007	4.02	1.1208e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2710e-002	6.1777e-004	4.36	3.6553e-005	4.08	2.2545e-006	4.02	1.4044e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.0618e-003	5.0169e-005	4.40	2.9711e-006	4.08	1.8335e-007	4.02	1.1423e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00

Iterationsschritt 3:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3553e-006	4.02	1.4674e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0317e-003	4.9400e-005	4.38	2.9183e-006	4.08	1.7993e-007	4.02	1.1208e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2710e-002	6.1777e-004	4.36	3.6553e-005	4.08	2.2545e-006	4.02	1.4044e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.0616e-003	5.0168e-005	4.40	2.9711e-006	4.08	1.8334e-007	4.02	1.1423e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00

Iterationsschritt 4:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3553e-006	4.02	1.4674e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0317e-003	4.9400e-005	4.38	2.9183e-006	4.08	1.7993e-007	4.02	1.1208e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2710e-002	6.1777e-004	4.36	3.6553e-005	4.08	2.2545e-006	4.02	1.4044e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.0616e-003	5.0168e-005	4.40	2.9711e-006	4.08	1.8334e-007	4.02	1.1423e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3553e-006	4.02	1.4674e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0317e-003	4.9400e-005	4.38	2.9183e-006	4.08	1.7993e-007	4.02	1.1208e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2710e-002	6.1777e-004	4.36	3.6553e-005	4.08	2.2545e-006	4.02	1.4044e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.0616e-003	5.0168e-005	4.40	2.9711e-006	4.08	1.8334e-007	4.02	1.1423e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	16	32		64		128		256	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3553e-006	4.02	1.4674e-007	4.00
$T_2=0.5000$	1.0317e-003	4.9400e-005	4.38	2.9183e-006	4.08	1.7993e-007	4.02	1.1208e-008	4.00
$T_3=0.7500$	1.2710e-002	6.1777e-004	4.36	3.6553e-005	4.08	2.2545e-006	4.02	1.4044e-007	4.00
$T_4=1.0000$	1.0616e-003	5.0168e-005	4.40	2.9711e-006	4.08	1.8334e-007	4.02	1.1423e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3125e-002	6.4413e-004	4.35	3.8175e-005	4.08	2.3866e-006	4.00	1.4868e-007	4.00

Tabelle 51:

Differentialvariante IMR (10.6)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.4)									
Gitter: 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.4299e-002	6.0209e-003	2.01	1.5019e-003	2.00	3.7527e-004	2.00	9.3804e-005	2.00
$T_2=0.5000$	2.3419e-003	5.7940e-004	2.02	1.4447e-004	2.00	3.6095e-005	2.00	9.0223e-006	2.00
$T_3=0.7500$	2.5551e-002	6.3278e-003	2.01	1.5782e-003	2.00	3.9433e-004	2.00	9.8568e-005	2.00
$T_4=1.0000$	3.2458e-003	8.0133e-004	2.02	1.9971e-004	2.00	4.9888e-005	2.00	1.2470e-005	2.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.5551e-002	6.3278e-003	2.01	1.5782e-003	2.00	3.9452e-004	2.00	9.9216e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5551e-002	6.3564e-003	2.01	1.5881e-003	2.00	3.9685e-004	2.00	9.9216e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	2.3190e-004	1.8459e-005	3.65	1.4931e-006	3.63	9.8186e-008	3.93	6.2110e-009	3.98
$T_2=0.5000$	3.0405e-005	1.9859e-006	3.94	1.6449e-007	3.59	1.0855e-008	3.92	6.8703e-010	3.98
$T_3=0.7500$	3.0905e-004	2.0087e-005	3.94	1.6578e-006	3.60	1.0937e-007	3.92	6.9230e-009	3.98
$T_4=1.0000$	6.6778e-005	3.1601e-006	4.40	2.6781e-007	3.56	1.7724e-008	3.92	1.1221e-009	3.98
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	3.0905e-004	2.0087e-005	3.94	1.6578e-006	3.60	1.1088e-007	3.90	7.0270e-009	3.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4738e-003	4.2090e-005	5.13	2.0245e-006	4.38	1.1645e-007	4.12	7.1181e-009	4.03
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	8.3264e-004	9.6308e-006	6.43	1.4067e-007	6.10	2.1623e-009	6.02	3.3781e-011	6.00
$T_2=0.5000$	1.0025e-004	1.1414e-006	6.46	1.6604e-008	6.10	2.5511e-010	6.02	3.8327e-012	6.06
$T_3=0.7500$	9.9891e-004	1.1406e-005	6.45	1.6617e-007	6.10	2.5527e-009	6.02	4.0217e-011	5.99
$T_4=1.0000$	1.8573e-004	1.9933e-006	6.54	2.8647e-008	6.12	4.3861e-010	6.03	6.9655e-012	5.98
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9891e-004	1.1406e-005	6.45	1.6617e-007	6.10	2.5853e-009	6.01	4.0858e-011	5.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7258e-003	2.5313e-005	6.09	3.8880e-007	6.02	6.0416e-009	6.01	9.4872e-011	5.99
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	8.3285e-004	9.6326e-006	6.43	1.4069e-007	6.10	2.1626e-009	6.02	3.3992e-011	5.99
$T_2=0.5000$	1.0028e-004	1.1416e-006	6.46	1.6607e-008	6.10	2.5495e-010	6.03	4.0415e-012	5.98
$T_3=0.7500$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5531e-009	6.02	4.0274e-011	5.99
$T_4=1.0000$	1.8558e-004	1.9913e-006	6.54	2.8618e-008	6.12	4.3802e-010	6.03	7.0423e-012	5.96
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5855e-009	6.01	4.0805e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7255e-003	2.5313e-005	6.09	3.8879e-007	6.02	6.0422e-009	6.01	9.5131e-011	5.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_1=0.2500$	8.3286e-004	9.6326e-006	6.43	1.4069e-007	6.10	2.1627e-009	6.02	3.3700e-011	6.00
$T_2=0.5000$	1.0029e-004	1.1416e-006	6.46	1.6607e-008	6.10	2.5513e-010	6.02	3.9188e-012	6.02
$T_3=0.7500$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5533e-009	6.02	4.0394e-011	5.98
$T_4=1.0000$	1.8558e-004	1.9913e-006	6.54	2.8618e-008	6.12	4.3818e-010	6.03	6.8069e-012	6.01
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5857e-009	6.01	4.0993e-011	5.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7255e-003	2.5313e-005	6.09	3.8879e-007	6.02	6.0422e-009	6.01	9.4912e-011	5.99
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	8.3286e-004	9.6326e-006	6.43	1.4069e-007	6.10	2.1628e-009	6.02	3.3904e-011	6.00
$T_2=0.5000$	1.0029e-004	1.1416e-006	6.46	1.6607e-008	6.10	2.5500e-010	6.03	4.0127e-012	5.99
$T_3=0.7500$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5534e-009	6.02	4.0124e-011	5.99
$T_4=1.0000$	1.8558e-004	1.9913e-006	6.54	2.8618e-008	6.12	4.3828e-010	6.03	6.9051e-012	5.99
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5858e-009	6.01	4.0709e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7255e-003	2.5313e-005	6.09	3.8879e-007	6.02	6.0422e-009	6.01	9.5056e-011	5.99
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	20	40		80		160		320	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.2500$	8.3286e-004	9.6326e-006	6.43	1.4069e-007	6.10	2.1626e-009	6.02	3.3797e-011	6.00
$T_2=0.5000$	1.0029e-004	1.1416e-006	6.46	1.6606e-008	6.10	2.5494e-010	6.03	3.9475e-012	6.01
$T_3=0.7500$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5534e-009	6.02	4.0147e-011	5.99
$T_4=1.0000$	1.8558e-004	1.9913e-006	6.54	2.8617e-008	6.12	4.3821e-010	6.03	6.7542e-012	6.02
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9916e-004	1.1408e-005	6.45	1.6621e-007	6.10	2.5858e-009	6.01	4.0791e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7255e-003	2.5313e-005	6.09	3.8879e-007	6.02	6.0421e-009	6.01	9.4848e-011	5.99

Für ungerades m erreichen wir sogar Maximalordnung $m + 1$, und für ausreichend großen Polynomgrad startet die Ordnungsfolge mit 2, 4, 6, ...
 Für nicht äquidistantes Zufallsgitter scheitert die Differentialvariante auch auf IMR-Basis.

Tabelle 52:

Differentialvariante IMR (10.6)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.4)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3434e-002	3.9956e-003	2.55	8.9801e-004	2.15	2.1449e-004	2.07	5.2421e-005	2.03
$T_2=1.0000$	1.8722e-001	8.5585e-003	4.45	1.5503e-003	2.46	3.3314e-004	2.22	7.6967e-005	2.11
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.8722e-001	3.7240e-002	2.33	9.1218e-003	2.03	2.2586e-003	2.01	5.6208e-004	2.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.4823e-001	4.1402e-002	2.58	9.4616e-003	2.13	2.2946e-003	2.04	5.6626e-004	2.02
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	2.2276e-003	1.5225e-003	0.55	1.9861e-004	2.94	4.2386e-005	2.23	1.0289e-005	2.04
$T_2=1.0000$	2.2270e-001	2.6303e-003	6.40	2.6731e-004	3.30	5.5876e-005	2.26	1.3808e-005	2.02
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	2.2270e-001	1.5137e-002	3.88	2.1924e-003	2.79	4.7225e-004	2.21	1.1379e-004	2.05
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	2.7788e-001	1.5819e-002	4.13	2.1924e-003	2.85	4.7225e-004	2.21	1.1436e-004	2.05
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.0187e-002	6.8693e-004	4.88	7.1514e-005	3.26	1.5057e-005	2.25	3.6419e-006	2.05
$T_2=1.0000$	2.9851e-001	1.6422e-003	7.51	1.2066e-004	3.77	2.1937e-005	2.46	5.1245e-006	2.10
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	2.9851e-001	5.7639e-003	5.69	7.2260e-004	3.00	1.6288e-004	2.15	3.9772e-005	2.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.4377e-001	8.0953e-003	5.41	7.2746e-004	3.48	1.6288e-004	2.16	3.9824e-005	2.03
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.2933e-002	5.1962e-004	5.46	2.0080e-005	4.69	2.8883e-006	2.80	6.6602e-007	2.12
$T_2=1.0000$	3.0925e-001	1.2236e-003	7.98	4.4390e-005	4.78	4.7347e-006	3.23	9.7080e-007	2.29
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	3.0925e-001	5.0215e-003	5.94	1.7499e-004	4.84	2.9538e-005	2.57	7.1925e-006	2.04
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5248e-001	6.9832e-003	5.66	2.1228e-004	5.04	2.9907e-005	2.83	7.2056e-006	2.05
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3277e-002	5.1084e-004	5.51	1.3242e-005	5.27	6.0567e-007	4.45	8.7214e-008	2.80
$T_2=1.0000$	3.0961e-001	1.1494e-003	8.07	3.0322e-005	5.24	1.3084e-006	4.53	1.4175e-007	3.21
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	3.0961e-001	5.1981e-003	5.90	1.3304e-004	5.29	5.3921e-006	4.62	8.8982e-007	2.60
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5263e-001	6.9418e-003	5.67	1.5806e-004	5.46	6.0016e-006	4.72	9.0136e-007	2.74
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3324e-002	5.1068e-004	5.51	1.2727e-005	5.33	3.9126e-007	5.02	1.5092e-008	4.70
$T_2=1.0000$	3.0945e-001	1.1394e-003	8.09	2.8530e-005	5.32	8.9064e-007	5.00	3.3842e-008	4.72
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	3.0945e-001	5.2279e-003	5.89	1.3383e-004	5.29	4.0803e-006	5.04	1.4303e-007	4.83
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5247e-001	6.9430e-003	5.67	1.5503e-004	5.48	4.3682e-006	5.15	1.5081e-007	4.86
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3331e-002	5.1073e-004	5.51	1.2695e-005	5.33	3.8038e-007	5.06	1.1627e-008	5.03
$T_2=1.0000$	3.0940e-001	1.1386e-003	8.09	2.8376e-005	5.33	8.5859e-007	5.05	2.6448e-008	5.02
$\max_{r_i}(\ \cdots\)$	3.0940e-001	5.2299e-003	5.89	1.3395e-004	5.29	4.0746e-006	5.04	1.2940e-007	4.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5243e-001	6.9433e-003	5.67	1.5485e-004	5.49	4.3196e-006	5.16	1.3251e-007	5.03

10.2. Die Integralvariante: Wir führen zunächst eine neue Notation für den Integraldefekt ein.

$$(10.8) \quad \hat{D}_{[a,b]} := (\eta_a - \eta_b) - (t_a - t_b) \sum_{k=1}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k)$$

Zu lesen ist dieser als ‘Defekt von a bis b’ wobei die α_k jene sein sollen, mit denen die Summe dem $\int_a^b F(t, \eta) dt$ gemäß Lemma 1.2 entspricht.

Diese Definition ist sinnvoll, da Additivität vorliegt. Es gilt:

LEMMA 10.1. Für alle a, b, c gilt:

$$(10.9) \quad \hat{D}_{[a,c]} = \hat{D}_{[a,b]} + \hat{D}_{[b,c]}$$

BEWEIS. Die Summen aus (10.8) sind deshalb additiv, da sie gemäß Lemma 1.2 den Integralen von ein und demselben Polynom entsprechen, und es sich daher nur um Auswertungen eines Integralpolynoms (nennen wir es $Q(t)$) handelt. Die Aussage ist also äquivalent zu: $Q(t_a) - Q(t_c) = [Q(t_a) - Q(t_b)] + [Q(t_b) - Q(t_c)]$ und daher wahr. \square

Es ist zu beachten, dass der Defekt in dieser Schreibweise anders skaliert ist. Es gilt:

$$(10.10) \quad \hat{D}_{[t_i,j,t_{i,j-1}]} = \delta_{i,j} \hat{D}_{t_i,j}$$

Wir führen jetzt wieder wie gewohnt Defektkorrektur durch. (vgl. 10.1) Unser ‘Nachbarproblem’ sieht jetzt so aus:

$$(10.11) \quad \frac{\pi_1 - \pi_0}{\delta} = F(t_{\frac{1}{2}}, \frac{\pi_0 + \pi_1}{2}) + \hat{D}_{[0,1]}$$

oder, als Runge-Kutta-Schema:

$$(10.12) \quad \begin{aligned} \pi_{\frac{1}{2}} &= \pi_0 + \frac{\delta}{2} F(t_{\frac{1}{2}}, \pi_{\frac{1}{2}}) + \hat{D}_{[0,\frac{1}{2}]} \\ \pi_1 &= \pi_0 + \delta F(t_{\frac{1}{2}}, \pi_{\frac{1}{2}}) + \hat{D}_{[0,1]} \end{aligned}$$

und dann auf die übliche Darstellung zurückgerechnet (unter Ausnutzung der Additivität):

$$(10.13) \quad \frac{\pi_1 - \pi_0}{\delta} = F(t_{\frac{1}{2}}, \frac{\pi_0 + \pi_1}{2} + \frac{\hat{D}_{[0,\frac{1}{2}]} - \hat{D}_{[\frac{1}{2},1]}}{2}) + \hat{D}_{[0,1]}$$

Auf äquidistantem Gitter zeigt die einfachere Version (10.11) deutliche Vorteile gegenüber (10.13):

Tabelle 53:

Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz) (10.11)										
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)										
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)										
Iterationsschritt 0:										
Punkte:	12		24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	
$T_1=0.5000$	1.8314e-003	4.5776e-004	2.00	1.1443e-004	2.00	2.8608e-005	2.00	7.1520e-006	2.00	
$T_2=1.0000$	2.7127e-003	6.7678e-004	2.00	1.6911e-004	2.00	4.2271e-005	2.00	1.0567e-005	2.00	
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.7127e-003	7.1962e-004	1.91	1.8332e-004	1.97	4.6045e-005	1.99	1.1522e-005	2.00	
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9592e-003	7.3826e-004	2.00	1.8447e-004	2.00	4.6112e-005	2.00	1.1528e-005	2.00	

Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.0791e-005	4.9747e-007	5.39	2.1164e-008	4.55	1.1852e-009	4.16	7.2810e-011	4.02
$T_2=1.0000$	1.2332e-005	2.5057e-007	5.62	1.0079e-008	4.64	5.7423e-010	4.13	3.5450e-011	4.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0791e-005	5.5822e-007	5.22	2.6348e-008	4.41	1.5484e-009	4.09	9.5950e-011	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.0791e-005	5.5822e-007	5.22	2.6460e-008	4.40	1.5484e-009	4.09	9.5969e-011	4.01
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7371e-005	2.1922e-007	6.31	3.1245e-009	6.13	4.7695e-011	6.03	1.6271e-012	4.87
$T_2=1.0000$	1.1611e-005	1.6516e-007	6.14	2.5007e-009	6.05	3.9356e-011	5.99	1.3577e-012	4.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7371e-005	2.2225e-007	6.29	3.3911e-009	6.03	5.2935e-011	6.00	1.8185e-012	4.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7371e-005	2.2225e-007	6.29	3.3911e-009	6.03	5.2935e-011	6.00	1.8185e-012	4.86
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7446e-005	2.1970e-007	6.31	3.1295e-009	6.13	4.7765e-011	6.03	1.6279e-012	4.87
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6527e-007	6.14	2.5020e-009	6.05	3.9375e-011	5.99	1.3581e-012	4.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7446e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2982e-011	6.00	1.8194e-012	4.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7446e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2982e-011	6.00	1.8194e-012	4.86
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7448e-005	2.1970e-007	6.31	3.1295e-009	6.13	4.7765e-011	6.03	1.6282e-012	4.87
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6527e-007	6.14	2.5020e-009	6.05	3.9375e-011	5.99	1.3580e-012	4.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7448e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7448e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7449e-005	2.1970e-007	6.31	3.1295e-009	6.13	4.7765e-011	6.03	1.6282e-012	4.87
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6527e-007	6.14	2.5020e-009	6.05	3.9375e-011	5.99	1.3580e-012	4.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7449e-005	2.1970e-007	6.31	3.1295e-009	6.13	4.7765e-011	6.03	1.6282e-012	4.87
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6527e-007	6.14	2.5020e-009	6.05	3.9375e-011	5.99	1.3580e-012	4.86
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3952e-009	6.03	5.2981e-011	6.00	1.8193e-012	4.86

Tabelle 54:

Integralvariante IMR,(mit Defektdifferenz) (10.13)

einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.8314e-003	4.5776e-004	2.00	1.1443e-004	2.00	2.8608e-005	2.00	7.1520e-006	2.00
$T_2=1.0000$	2.7127e-003	6.7678e-004	2.00	1.6911e-004	2.00	4.2271e-005	2.00	1.0567e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.7127e-003	7.1962e-004	1.91	1.8332e-004	1.97	4.6045e-005	1.99	1.1522e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.9592e-003	7.3826e-004	2.00	1.8447e-004	2.00	4.6112e-005	2.00	1.1528e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.0220e-004	1.3842e-005	2.88	1.6977e-006	3.03	2.0902e-007	3.02	2.5913e-008	3.01
$T_2=1.0000$	7.8184e-005	1.0228e-005	2.93	1.3006e-006	2.98	1.6390e-007	2.99	2.0570e-008	2.99
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0220e-004	1.7272e-005	2.56	2.1574e-006	3.00	2.7070e-007	2.99	3.3815e-008	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2990e-004	1.7486e-005	2.89	2.1806e-006	3.00	2.7134e-007	3.01	3.3828e-008	3.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.3837e-005	5.9103e-007	5.33	2.5535e-008	4.53	1.4196e-009	4.17	8.6244e-011	4.04
$T_2=1.0000$	1.3847e-005	3.5351e-007	5.29	1.7715e-008	4.32	1.0755e-009	4.04	6.7083e-011	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3837e-005	5.9103e-007	5.33	2.9153e-008	4.34	1.6992e-009	4.10	1.0449e-010	4.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3837e-005	6.2062e-007	5.26	2.9426e-008	4.40	1.6998e-009	4.11	1.0450e-010	4.02
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7091e-005	2.0976e-007	6.35	2.8437e-009	6.20	3.9369e-011	6.17	1.4402e-012	4.77
$T_2=1.0000$	1.1537e-005	1.6330e-007	6.14	2.4546e-009	6.06	3.8322e-011	6.00	1.3130e-012	4.87
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7091e-005	2.2007e-007	6.28	3.2796e-009	6.07	5.1029e-011	6.01	1.8992e-012	4.75
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7091e-005	2.2007e-007	6.28	3.2796e-009	6.07	5.1029e-011	6.01	1.8992e-012	4.75
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7468e-005	2.1997e-007	6.31	3.1336e-009	6.13	4.7878e-011	6.03	1.6783e-012	4.83
$T_2=1.0000$	1.1628e-005	1.6533e-007	6.14	2.5028e-009	6.05	3.9342e-011	5.99	1.3227e-012	4.89
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7468e-005	2.2259e-007	6.29	3.3979e-009	6.03	5.3149e-011	6.00	1.9614e-012	4.76
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7468e-005	2.2259e-007	6.29	3.3979e-009	6.03	5.3149e-011	6.00	1.9614e-012	4.76
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7447e-005	2.1969e-007	6.31	3.1295e-009	6.13	4.7821e-011	6.03	1.6777e-012	4.83
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6526e-007	6.14	2.5019e-009	6.05	3.9324e-011	5.99	1.3230e-012	4.89
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7447e-005	2.2250e-007	6.29	3.3953e-009	6.03	5.3134e-011	6.00	1.9652e-012	4.76

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7447e-005	2.2250e-007	6.29	3.3953e-009	6.03	5.3134e-011	6.00	1.9652e-012	4.76
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7449e-005	2.1970e-007	6.31	3.1296e-009	6.13	4.7827e-011	6.03	1.6849e-012	4.83
$T_2=1.0000$	1.1623e-005	1.6527e-007	6.14	2.5019e-009	6.05	3.9326e-011	5.99	1.3255e-012	4.89
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3953e-009	6.03	5.3139e-011	6.00	1.9593e-012	4.76
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7449e-005	2.2250e-007	6.29	3.3953e-009	6.03	5.3139e-011	6.00	1.9593e-012	4.76

Die weiteren Ergebnisse beziehen sich daher auf die einfachere Version (10.11), oder auf deren Variante ‘mit linkem Punkt’:

$$(10.14) \quad \frac{\pi_1 - \pi_0}{\delta} = F\left(t_{\frac{1}{2}}, \frac{\pi_0 + \pi_1}{2}\right) + \hat{D}_{[0,1]}$$

wobei:

$$(10.15) \quad \hat{D}_{[0,1]} := (\eta_1 - \eta_0) - \delta \sum_{k=0}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k)$$

nurlich wieder mit den entsprechenden α_k aus Lemma 1.2. Wir stellen zunächst fest, dass diese Varianten auch auf nicht äquidistantem Gitter funktionieren, aber nur Ordnungsfolge 2, 3, 4, . . . liefern:

Tabelle 55:

Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz) (10.11)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.9212e-002	4.4845e-003	2.10	1.1134e-003	2.01	2.7879e-004	2.00	6.9838e-005	2.00
$T_1=1.0000$	1.9212e-002	4.4845e-003	2.10	1.1134e-003	2.01	2.7879e-004	2.00	6.9838e-005	2.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9212e-002	4.4845e-003	2.10	1.2331e-003	1.86	3.0501e-004	2.02	7.6630e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.0883e-002	4.7958e-003	2.12	1.2331e-003	1.96	3.0654e-004	2.01	7.6630e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	9.9858e-003	7.8738e-005	6.99	1.7140e-005	2.20	2.5560e-006	2.75	3.2474e-007	2.98
$T_1=1.0000$	9.9858e-003	7.8738e-005	6.99	1.7140e-005	2.20	2.5560e-006	2.75	3.2474e-007	2.98
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	9.9858e-003	3.2568e-004	4.94	3.1832e-005	3.35	4.1880e-006	2.93	5.2569e-007	2.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9858e-003	3.2568e-004	4.94	3.1832e-005	3.35	4.1880e-006	2.93	5.2569e-007	2.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_0=0.0000$	1.4728e-002	2.8643e-004	5.68	7.0337e-006	5.35	1.7365e-007	5.34	3.6191e-009	5.58
$T_1=1.0000$	1.4728e-002	2.8643e-004	5.68	7.0337e-006	5.35	1.7365e-007	5.34	3.6191e-009	5.58
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.4728e-002	2.8643e-004	5.68	7.3964e-006	5.28	2.2386e-007	5.05	8.4128e-009	4.73
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4728e-002	2.8643e-004	5.68	7.3964e-006	5.28	2.2454e-007	5.04	8.4128e-009	4.74
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5421e-002	3.0827e-004	5.64	8.1518e-006	5.24	2.3792e-007	5.10	7.2099e-009	5.04
$T_1=1.0000$	1.5421e-002	3.0827e-004	5.64	8.1518e-006	5.24	2.3792e-007	5.10	7.2099e-009	5.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.5421e-002	3.0827e-004	5.64	8.5081e-006	5.18	2.5957e-007	5.03	8.0360e-009	5.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5421e-002	3.0827e-004	5.64	8.5081e-006	5.18	2.5957e-007	5.03	8.0360e-009	5.01
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5501e-002	3.0971e-004	5.65	8.1920e-006	5.24	2.3916e-007	5.10	7.2485e-009	5.04
$T_1=1.0000$	1.5501e-002	3.0971e-004	5.65	8.1920e-006	5.24	2.3916e-007	5.10	7.2485e-009	5.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.5501e-002	3.0971e-004	5.65	8.5505e-006	5.18	2.6085e-007	5.03	8.0753e-009	5.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5501e-002	3.0971e-004	5.65	8.5505e-006	5.18	2.6085e-007	5.03	8.0753e-009	5.01
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5509e-002	3.0980e-004	5.65	8.1933e-006	5.24	2.3918e-007	5.10	7.2488e-009	5.04
$T_1=1.0000$	1.5509e-002	3.0980e-004	5.65	8.1933e-006	5.24	2.3918e-007	5.10	7.2488e-009	5.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.5509e-002	3.0980e-004	5.65	8.5519e-006	5.18	2.6087e-007	5.03	8.0756e-009	5.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5509e-002	3.0980e-004	5.65	8.5519e-006	5.18	2.6087e-007	5.03	8.0756e-009	5.01
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.5510e-002	3.0980e-004	5.65	8.1933e-006	5.24	2.3918e-007	5.10	7.2488e-009	5.04
$T_1=1.0000$	1.5510e-002	3.0980e-004	5.65	8.1933e-006	5.24	2.3918e-007	5.10	7.2488e-009	5.04
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.5510e-002	3.0980e-004	5.65	8.5519e-006	5.18	2.6087e-007	5.03	8.0756e-009	5.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5510e-002	3.0980e-004	5.65	8.5519e-006	5.18	2.6087e-007	5.03	8.0756e-009	5.01

Tabelle 56:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	1.6164e-002	4.1942e-003	1.95	1.0467e-003	2.00	2.6077e-004	2.01	6.5041e-005	2.00
$T_1=1.0000$	1.6164e-002	4.1942e-003	1.95	1.0467e-003	2.00	2.6077e-004	2.01	6.5041e-005	2.00

$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.6164e-002	4.1942e-003	1.95	1.0721e-003	1.97	2.8037e-004	1.94	7.0386e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.7423e-002	4.5519e-003	1.94	1.1383e-003	2.00	2.8270e-004	2.01	7.0848e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.4939e-004	2.7187e-005	4.05	3.0598e-006	3.15	3.5592e-007	3.10	4.2694e-008	3.06
$T_1=1.0000$	4.4939e-004	2.7187e-005	4.05	3.0598e-006	3.15	3.5592e-007	3.10	4.2694e-008	3.06
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.4939e-004	2.7187e-005	4.05	3.5716e-006	2.93	4.8817e-007	2.87	6.3626e-008	2.94
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	5.5487e-004	3.5808e-005	3.95	4.3919e-006	3.03	5.4083e-007	3.02	6.6974e-008	3.01
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.1031e-004	4.4224e-006	6.54	7.4585e-008	5.89	2.9653e-009	4.65	1.8114e-010	4.03
$T_1=1.0000$	4.1031e-004	4.4224e-006	6.54	7.4585e-008	5.89	2.9653e-009	4.65	1.8114e-010	4.03
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.1031e-004	4.6041e-006	6.48	9.7559e-008	5.56	3.4286e-009	4.83	2.5374e-010	3.76
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1031e-004	4.9388e-006	6.38	9.7559e-008	5.66	3.6814e-009	4.73	2.6432e-010	3.80
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.1616e-004	4.5068e-006	6.53	6.5963e-008	6.09	1.0213e-009	6.01	1.5990e-011	6.00
$T_1=1.0000$	4.1616e-004	4.5068e-006	6.53	6.5963e-008	6.09	1.0213e-009	6.01	1.5991e-011	6.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.1616e-004	4.7154e-006	6.46	8.5369e-008	5.79	1.3311e-009	6.00	2.1141e-011	5.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1616e-004	5.0572e-006	6.36	8.5369e-008	5.89	1.3567e-009	5.98	2.1297e-011	5.99
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.1588e-004	4.5035e-006	6.53	6.5862e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5877e-011	6.00
$T_1=1.0000$	4.1588e-004	4.5035e-006	6.53	6.5862e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5878e-011	6.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.1588e-004	4.7099e-006	6.46	8.5467e-008	5.78	1.3315e-009	6.00	2.1002e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1588e-004	5.0450e-006	6.37	8.5467e-008	5.88	1.3484e-009	5.99	2.1112e-011	6.00
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.1590e-004	4.5036e-006	6.53	6.5863e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5877e-011	6.00
$T_1=1.0000$	4.1590e-004	4.5036e-006	6.53	6.5863e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5878e-011	6.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.1590e-004	4.7102e-006	6.46	8.5466e-008	5.78	1.3315e-009	6.00	2.1003e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1590e-004	5.0454e-006	6.37	8.5466e-008	5.88	1.3485e-009	5.99	2.1113e-011	6.00
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	5	10		20		40		80	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_0=0.0000$	4.1590e-004	4.5036e-006	6.53	6.5863e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5877e-011	6.00
$T_1=1.0000$	4.1590e-004	4.5036e-006	6.53	6.5863e-008	6.10	1.0179e-009	6.02	1.5878e-011	6.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	4.1590e-004	4.7102e-006	6.46	8.5466e-008	5.78	1.3315e-009	6.00	2.1003e-011	5.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.1590e-004	5.0454e-006	6.37	8.5466e-008	5.88	1.3485e-009	5.99	2.1113e-011	6.00

Tabelle 57:

Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz) (10.11)															
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)															
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	2.6131e-003	5.7974e-004	2.17	1.3694e-004	2.08	3.3275e-005	2.04	8.2005e-006	2.02						
$T_2=1.0000$	2.9368e-003	7.5048e-004	1.97	1.8942e-004	1.99	4.7566e-005	1.99	1.1917e-005	2.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.9368e-003	8.4253e-004	1.80	2.0781e-004	2.02	5.2310e-005	1.99	1.3045e-005	2.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.2762e-003	8.4861e-004	1.95	2.0827e-004	2.03	5.2310e-005	1.99	1.3045e-005	2.00						
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	1.1754e-004	2.3532e-005	2.32	3.2242e-006	2.87	4.1530e-007	2.96	5.2569e-008	2.98						
$T_2=1.0000$	3.2828e-004	3.0120e-005	3.45	3.2118e-006	3.23	3.7060e-007	3.12	4.4505e-008	3.06						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.2828e-004	3.9646e-005	3.05	4.6968e-006	3.08	5.7044e-007	3.04	7.0633e-008	3.01						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.2828e-004	3.9646e-005	3.05	4.6968e-006	3.08	5.7044e-007	3.04	7.0633e-008	3.01						
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	3.2667e-005	6.7374e-007	5.60	6.9639e-008	3.27	4.8390e-009	3.85	3.0406e-010	3.99						
$T_2=1.0000$	3.5983e-005	1.2732e-006	4.82	7.0580e-008	4.17	4.2498e-009	4.05	2.5934e-010	4.03						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.5983e-005	1.3207e-006	4.77	9.6879e-008	3.77	6.2111e-009	3.96	3.8525e-010	4.01						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.9852e-005	1.3207e-006	4.92	9.6879e-008	3.77	6.2111e-009	3.96	3.8525e-010	4.01						
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	4.4377e-005	5.3793e-007	6.37	6.9246e-009	6.28	9.1605e-011	6.24	1.0060e-011	3.19						
$T_2=1.0000$	2.9969e-005	4.2477e-007	6.14	6.4222e-009	6.05	1.0791e-010	5.90	9.2352e-012	3.55						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4377e-005	5.8312e-007	6.25	8.7041e-009	6.07	1.4199e-010	5.94	1.2389e-011	3.52						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.4377e-005	5.8312e-007	6.25	8.7041e-009	6.07	1.4280e-010	5.93	1.2389e-011	3.53						
Iterationsschritt 4:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	4.5308e-005	5.7448e-007	6.30	8.1910e-009	6.13	1.3217e-010	5.95	1.1402e-011	3.54						
$T_2=1.0000$	3.0234e-005	4.2933e-007	6.14	6.5240e-009	6.04	1.0866e-010	5.91	9.4295e-012	3.53						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5308e-005	5.7751e-007	6.29	8.8778e-009	6.02	1.4652e-010	5.92	1.2687e-011	3.53						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.5308e-005	5.7751e-007	6.29	8.8778e-009	6.02	1.4652e-010	5.92	1.2687e-011	3.53						
Iterationsschritt 5:															
Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	4.5369e-005	5.7571e-007	6.30	8.2131e-009	6.13	1.3254e-010	5.95	1.1409e-011	3.54						

$T_2=1.0000$	3.0252e-005	4.2955e-007	6.14	6.5279e-009	6.04	1.0873e-010	5.91	9.4309e-012	3.53
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5369e-005	5.7743e-007	6.30	8.8897e-009	6.02	1.4664e-010	5.92	1.2689e-011	3.53
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.5369e-005	5.7743e-007	6.30	8.8897e-009	6.02	1.4664e-010	5.92	1.2689e-011	3.53
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.5373e-005	5.7575e-007	6.30	8.2135e-009	6.13	1.3255e-010	5.95	1.1409e-011	3.54
$T_2=1.0000$	3.0253e-005	4.2956e-007	6.14	6.5280e-009	6.04	1.0873e-010	5.91	9.4310e-012	3.53
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.5373e-005	5.7743e-007	6.30	8.8899e-009	6.02	1.4664e-010	5.92	1.2689e-011	3.53
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.5373e-005	5.7743e-007	6.30	8.8899e-009	6.02	1.4664e-010	5.92	1.2689e-011	3.53

Tabelle 58:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.1487e-003	5.1521e-004	2.06	1.2667e-004	2.02	3.1420e-005	2.01	7.8247e-006	2.01
$T_2=1.0000$	2.9777e-003	7.3715e-004	2.01	1.8406e-004	2.00	4.6028e-005	2.00	1.1511e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.9777e-003	7.9522e-004	1.90	2.0018e-004	1.99	5.0265e-005	1.99	1.2564e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.1641e-003	8.0937e-004	1.97	2.0120e-004	2.01	5.0310e-005	2.00	1.2575e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.0084e-005	8.6266e-007	3.55	8.7838e-008	3.30	9.8523e-009	3.16	1.1652e-009	3.08
$T_2=1.0000$	3.4338e-006	3.7434e-007	3.20	4.9739e-008	2.91	6.5841e-009	2.92	8.5173e-010	2.95
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0084e-005	8.6266e-007	3.55	9.9127e-008	3.12	1.1873e-008	3.06	1.4604e-009	3.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.8159e-005	1.3295e-006	3.77	1.2077e-007	3.46	1.2914e-008	3.23	1.5164e-009	3.09
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.8399e-008	2.5169e-009	4.27	1.5627e-010	4.01	1.0308e-011	3.92	1.2243e-012	3.07
$T_2=1.0000$	1.4159e-007	4.3368e-009	5.03	1.8798e-010	4.53	9.6418e-012	4.29	8.2288e-013	3.55
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4159e-007	5.0098e-009	4.82	2.4518e-010	4.35	1.3858e-011	4.15	1.3025e-012	3.41
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1600e-007	1.5039e-008	5.36	5.2977e-010	4.83	1.7500e-011	4.92	1.3025e-012	3.75
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24		48		96		192	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.8453e-008	2.6272e-010	6.76	6.3091e-012	5.38	8.0287e-013	2.97	6.5322e-013	0.30
$T_2=1.0000$	3.9672e-008	2.1646e-010	7.52	4.3400e-012	5.64	5.9020e-013	2.88	5.4792e-013	0.11
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.9672e-008	3.1774e-010	6.96	7.0232e-012	5.50	8.1260e-013	3.11	7.3188e-013	0.15

$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7956e-007	6.9070e-010	8.02	7.0232e-012	6.62	8.1260e-013	3.11	7.3312e-013	0.15
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.4925e-008	1.3009e-010	7.58	8.7605e-013	7.21	6.4828e-013	0.43	6.4856e-013	-0.00
$T_2=1.0000$	3.4869e-008	1.0706e-010	8.35	1.0169e-012	6.72	5.4706e-013	0.89	5.4678e-013	0.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4869e-008	1.5906e-010	7.78	1.1600e-012	7.10	7.2891e-013	0.67	7.3036e-013	-0.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7790e-007	7.0775e-010	7.97	2.2874e-012	8.27	7.2891e-013	1.65	7.3145e-013	-0.01
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.4919e-008	1.2989e-010	7.58	8.6449e-013	7.23	6.4815e-013	0.42	6.4823e-013	-0.00
$T_2=1.0000$	3.4846e-008	1.0681e-010	8.35	1.0173e-012	6.71	5.4727e-013	0.89	5.4663e-013	0.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4846e-008	1.5871e-010	7.78	1.1548e-012	7.10	7.2900e-013	0.66	7.3028e-013	-0.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7790e-007	7.0809e-010	7.97	2.2949e-012	8.27	7.2900e-013	1.65	7.3138e-013	-0.00
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.4919e-008	1.2989e-010	7.58	8.6438e-013	7.23	6.4835e-013	0.41	6.4805e-013	0.00
$T_2=1.0000$	3.4845e-008	1.0681e-010	8.35	1.0172e-012	6.71	5.4728e-013	0.89	5.4649e-013	0.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4845e-008	1.5871e-010	7.78	1.1547e-012	7.10	7.2914e-013	0.66	7.3006e-013	-0.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.7790e-007	7.0810e-010	7.97	2.2949e-012	8.27	7.2914e-013	1.65	7.3117e-013	-0.00

Tabelle 59:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	6.0186e-003	1.4162e-003	2.09	3.4499e-004	2.04	8.5177e-005	2.02	2.1163e-005	2.01
$T_2=1.0000$	7.8730e-003	1.9766e-003	1.99	4.9555e-004	2.00	1.2408e-004	2.00	3.1047e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.8730e-003	2.1521e-003	1.87	5.3999e-004	1.99	1.3572e-004	1.99	3.3909e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.6204e-003	2.2002e-003	1.97	5.4246e-004	2.02	1.3586e-004	2.00	3.3916e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.9293e-005	8.2593e-006	2.25	1.2792e-006	2.69	1.7670e-007	2.86	2.3182e-008	2.93
$T_2=1.0000$	1.8058e-004	1.3998e-005	3.69	1.4478e-006	3.27	1.6723e-007	3.11	2.0179e-008	3.05
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8058e-004	1.7018e-005	3.41	2.0281e-006	3.07	2.5208e-007	3.01	3.1659e-008	2.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.9008e-004	1.7018e-005	3.48	2.0320e-006	3.07	2.5708e-007	2.98	3.2014e-008	3.01

Iterationsschritt 2:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.9471e-005	6.7119e-007	4.86	2.3906e-008	4.81	9.9698e-010	4.58	5.0834e-011	4.29
$T_2=1.0000$	4.4779e-005	1.0874e-006	5.36	3.3957e-008	5.00	1.2803e-009	4.73	5.6940e-011	4.49
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.4779e-005	1.1370e-006	5.30	3.8209e-008	4.90	1.5428e-009	4.63	7.3531e-011	4.39
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.2775e-005	1.5030e-006	5.78	3.8209e-008	5.30	1.5428e-009	4.63	7.3531e-011	4.39
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7600e-005	5.8889e-007	4.90	1.8731e-008	4.97	5.9177e-010	4.98	1.8629e-011	4.99
$T_2=1.0000$	4.0629e-005	9.0037e-007	5.50	2.3857e-008	5.24	6.8776e-010	5.12	2.0654e-011	5.06
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.0629e-005	9.0037e-007	5.50	2.5339e-008	5.15	7.5180e-010	5.07	2.2991e-011	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.9696e-005	1.3839e-006	5.85	2.7729e-008	5.64	7.5180e-010	5.20	2.2991e-011	5.03
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7538e-005	5.8739e-007	4.90	1.8697e-008	4.97	5.9097e-010	4.98	1.8609e-011	4.99
$T_2=1.0000$	4.0358e-005	8.9330e-007	5.50	2.3654e-008	5.24	6.8173e-010	5.12	2.0471e-011	5.06
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.0358e-005	8.9330e-007	5.50	2.5103e-008	5.15	7.4494e-010	5.07	2.2793e-011	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.9638e-005	1.3816e-006	5.85	2.7624e-008	5.64	7.4494e-010	5.21	2.2793e-011	5.03
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7536e-005	5.8737e-007	4.90	1.8697e-008	4.97	5.9097e-010	4.98	1.8608e-011	4.99
$T_2=1.0000$	4.0354e-005	8.9324e-007	5.50	2.3653e-008	5.24	6.8171e-010	5.12	2.0470e-011	5.06
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.0354e-005	8.9324e-007	5.50	2.5102e-008	5.15	7.4493e-010	5.07	2.2792e-011	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.9636e-005	1.3816e-006	5.85	2.7624e-008	5.64	7.4493e-010	5.21	2.2792e-011	5.03
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7536e-005	5.8737e-007	4.90	1.8697e-008	4.97	5.9097e-010	4.98	1.8608e-011	4.99
$T_2=1.0000$	4.0354e-005	8.9324e-007	5.50	2.3653e-008	5.24	6.8171e-010	5.12	2.0470e-011	5.06
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.0354e-005	8.9324e-007	5.50	2.5102e-008	5.15	7.4493e-010	5.07	2.2792e-011	5.03
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.9636e-005	1.3816e-006	5.85	2.7624e-008	5.64	7.4493e-010	5.21	2.2792e-011	5.03

Die Variante mit linkem Punkt erreicht wiederum die höhere Maximalordnung. Ziel ist es jetzt, durch Verwendung von speziellen nicht äquidistanten Gittern eine Ordnungsfolge von 2, 4, 6, ... zu erreichen. Das gelingt jedoch nur teilweise.

Anmerkung: Durch gezieltes Experimentieren mit dem Phänomen des Ordnungssprunges können wir die gewünschte Ordnungsfolge sofort erreichen. Da aber zu vermuten ist, dass Maximalordnung die mit einem ‘Sprung’ angenommen wird nur für ausreichend grobe Gitter gilt, ist dies etwas fraglich.

10.3. Gauß-Knoten: Da wieder mit Superkonvergenzeffekten zu rechnen ist, begnügen wir uns mit 2 - 4 Gauß-Knoten:

Zuerst ohne Verwendung des linken Punktes:

Tabelle 60:

Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz) (10.11)																		
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)																		
Gitter: 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)																		
Iterationsschritt 0:																		
Punkte:	6			12			24			48			96					
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p					
$T_1=0.5000$	1.3808e-002	3.4800e-003	1.99	8.7050e-004	2.00	2.1764e-004	2.00	5.4410e-005	2.00	2.2958e-002	5.2857e-003	2.12	1.2950e-003	2.03	3.2211e-004	2.01	8.0427e-005	2.00
$T_2=1.0000$	2.2958e-002	5.2857e-003	2.12	1.2950e-003	2.03	3.2211e-004	2.01	8.0427e-005	2.00	2.2958e-002	5.6020e-003	2.03	1.4038e-003	2.00	3.5084e-004	2.00	8.7694e-005	2.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	2.2958e-002	5.6020e-003	2.03	1.4038e-003	2.00	3.5084e-004	2.00	8.7694e-005	2.00	2.2958e-002	5.7248e-003	2.05	1.4177e-003	2.01	3.5272e-004	2.01	8.7923e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3676e-002	5.7248e-003	2.05	1.4177e-003	2.01	3.5272e-004	2.01	8.7923e-005	2.00	2.3676e-002	6.9103e-004	3.92	4.3375e-005	3.99	2.7385e-006	3.99	1.7173e-007	4.00
Iterationsschritt 1:																		
Punkte:	6			12			24			48			96					
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p					
$T_1=0.5000$	9.7673e-004	6.1191e-005	4.00	3.7891e-006	4.01	2.3534e-007	4.01	1.4658e-008	4.01	1.6472e-003	9.2864e-005	4.15	5.6861e-006	4.03	3.5433e-007	4.00	2.2152e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.6472e-003	9.2864e-005	4.15	5.6861e-006	4.03	3.5433e-007	4.00	2.2152e-008	4.00	1.6472e-003	1.0469e-004	3.98	6.4222e-006	4.03	4.0437e-007	3.99	2.5221e-008	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.6472e-003	1.0469e-004	3.98	6.4222e-006	4.03	4.0437e-007	3.99	2.5221e-008	4.00	1.6472e-003	1.0469e-004	3.98	6.4222e-006	4.03	4.0437e-007	3.99	2.5221e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.0489e-002	6.9103e-004	3.92	4.3375e-005	3.99	2.7385e-006	3.99	1.7173e-007	4.00	1.0489e-002	6.9103e-004	3.92	4.3375e-005	3.99	2.7385e-006	3.99	1.7173e-007	4.00
Iterationsschritt 2:																		
Punkte:	6			12			24			48			96					
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p					
$T_1=0.5000$	9.9246e-004	6.0069e-005	4.05	3.6362e-006	4.05	2.2307e-007	4.03	1.3805e-008	4.01	1.9730e-003	1.1204e-004	4.14	6.9356e-006	4.01	4.3503e-007	3.99	2.7291e-008	3.99
$T_2=1.0000$	1.9730e-003	1.1204e-004	4.14	6.9356e-006	4.01	4.3503e-007	3.99	2.7291e-008	3.99	1.9730e-003	1.2354e-004	4.00	7.7510e-006	3.99	4.8216e-007	4.01	3.0228e-008	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9730e-003	1.2354e-004	4.00	7.7510e-006	3.99	4.8216e-007	4.01	3.0228e-008	4.00	1.9730e-003	1.2354e-004	4.00	7.7510e-006	3.99	4.8216e-007	4.01	3.0228e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9172e-003	6.4843e-004	3.93	4.0955e-005	3.98	2.5622e-006	4.00	1.6037e-007	4.00	9.9172e-003	6.4843e-004	3.93	4.0955e-005	3.98	2.5622e-006	4.00	1.6037e-007	4.00
Iterationsschritt 3:																		
Punkte:	6			12			24			48			96					
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p					
$T_1=0.5000$	9.3690e-004	5.7362e-005	4.03	3.4798e-006	4.04	2.1353e-007	4.03	1.3214e-008	4.01	1.9719e-003	1.1113e-004	4.15	6.8544e-006	4.02	4.2919e-007	4.00	2.6901e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.9719e-003	1.1113e-004	4.15	6.8544e-006	4.02	4.2919e-007	4.00	2.6901e-008	4.00	1.9719e-003	1.2133e-004	4.02	7.6297e-006	3.99	4.7385e-007	4.01	2.9652e-008	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9719e-003	1.2133e-004	4.02	7.6297e-006	3.99	4.7385e-007	4.01	2.9652e-008	4.00	1.9719e-003	1.2133e-004	4.02	7.6297e-006	3.99	4.7385e-007	4.01	2.9652e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9238e-003	6.4838e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00	9.9238e-003	6.4838e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00
Iterationsschritt 4:																		
Punkte:	6			12			24			48			96					
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p					
$T_1=0.5000$	9.3173e-004	5.7223e-005	4.03	3.4757e-006	4.04	2.1340e-007	4.03	1.3210e-008	4.01	1.9705e-003	1.1106e-004	4.15	6.8521e-006	4.02	4.2911e-007	4.00	2.6898e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.9705e-003	1.1106e-004	4.15	6.8521e-006	4.02	4.2911e-007	4.00	2.6898e-008	4.00	1.9705e-003	1.2120e-004	4.02	7.6264e-006	3.99	4.7374e-007	4.01	2.9648e-008	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.9705e-003	1.2120e-004	4.02	7.6264e-006	3.99	4.7374e-007	4.01	2.9648e-008	4.00	1.9705e-003	1.2120e-004	4.02	7.6264e-006	3.99	4.7374e-007	4.01	2.9648e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9227e-003	6.4839e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00	9.9227e-003	6.4839e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00

Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.3132e-004	5.7217e-005	4.02	3.4756e-006	4.04	2.1340e-007	4.03	1.3210e-008	4.01
$T_2=1.0000$	1.9704e-003	1.1106e-004	4.15	6.8520e-006	4.02	4.2911e-007	4.00	2.6898e-008	4.00
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.9704e-003	1.2120e-004	4.02	7.6263e-006	3.99	4.7374e-007	4.01	2.9648e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9227e-003	6.4839e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	9.3130e-004	5.7217e-005	4.02	3.4756e-006	4.04	2.1340e-007	4.03	1.3210e-008	4.01
$T_2=1.0000$	1.9704e-003	1.1106e-004	4.15	6.8520e-006	4.02	4.2911e-007	4.00	2.6898e-008	4.00
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.9704e-003	1.2120e-004	4.02	7.6263e-006	3.99	4.7374e-007	4.01	2.9648e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.9227e-003	6.4839e-004	3.94	4.0953e-005	3.98	2.5639e-006	4.00	1.6048e-007	4.00

Tabelle 61:

Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz) (10.11)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.8112e-003	1.9610e-003	1.99	4.9042e-004	2.00	1.2261e-004	2.00	3.0653e-005	2.00
$T_2=1.0000$	1.2412e-002	2.9477e-003	2.07	7.2768e-004	2.02	1.8135e-004	2.00	4.5302e-005	2.00
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	1.2412e-002	3.1278e-003	1.99	7.8883e-004	1.99	1.9753e-004	2.00	4.9396e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2571e-002	3.1780e-003	1.98	7.9325e-004	2.00	1.9820e-004	2.00	4.9472e-005	2.00

Iterationsschritt 1:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.7808e-005	2.1155e-006	4.16	1.2924e-007	4.03	8.0618e-009	4.00	5.0459e-010	4.00
$T_2=1.0000$	2.6205e-005	1.5122e-006	4.12	9.4071e-008	4.01	5.8801e-009	4.00	3.6765e-010	4.00
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	3.7808e-005	2.8487e-006	3.73	1.8314e-007	3.96	1.1548e-008	3.99	7.2424e-010	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.8006e-004	2.9056e-005	4.75	1.0217e-006	4.83	5.0819e-008	4.33	3.4092e-009	3.90

Iterationsschritt 2:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.7926e-005	3.6216e-007	5.63	1.4011e-008	4.69	7.8487e-010	4.16	4.8022e-011	4.03
$T_2=1.0000$	2.0621e-005	1.6820e-007	6.94	5.5082e-009	4.93	5.5071e-010	3.32	3.7589e-011	3.87
$\max_{r_i}(\ \dots\)$	2.0621e-005	3.6216e-007	5.83	1.4510e-008	4.64	9.2025e-010	3.98	5.8514e-011	3.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.1787e-004	2.2184e-005	5.02	6.8470e-007	5.02	2.1454e-008	5.00	6.8671e-010	4.97

Iterationsschritt 3:									
Punkte:	8	16	32	64	128				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6336e-005	2.3082e-007	6.15	3.5798e-009	6.01	5.6262e-011	5.99	8.8227e-013	5.99
$T_2=1.0000$	2.3101e-005	3.1876e-007	6.18	4.7226e-009	6.08	7.1921e-011	6.04	1.1076e-012	6.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3101e-005	3.4057e-007	6.08	5.1392e-009	6.05	8.0075e-011	6.00	1.2408e-012	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2562e-004	2.2193e-005	5.03	6.7989e-007	5.03	2.1011e-008	5.02	6.5245e-010	5.01
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6300e-005	2.3016e-007	6.15	3.5671e-009	6.01	5.5965e-011	5.99	8.7431e-013	6.00
$T_2=1.0000$	2.3041e-005	3.1869e-007	6.18	4.7311e-009	6.07	7.2257e-011	6.03	1.1186e-012	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3041e-005	3.3817e-007	6.09	5.1125e-009	6.05	7.9541e-011	6.01	1.2329e-012	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2613e-004	2.2198e-005	5.03	6.8004e-007	5.03	2.1013e-008	5.02	6.5249e-010	5.01
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6301e-005	2.3019e-007	6.15	3.5677e-009	6.01	5.5975e-011	5.99	8.7409e-013	6.00
$T_2=1.0000$	2.3033e-005	3.1861e-007	6.18	4.7299e-009	6.07	7.2239e-011	6.03	1.1183e-012	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3033e-005	3.3812e-007	6.09	5.1114e-009	6.05	7.9535e-011	6.01	1.2327e-012	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2616e-004	2.2198e-005	5.03	6.8004e-007	5.03	2.1013e-008	5.02	6.5249e-010	5.01
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.6302e-005	2.3019e-007	6.15	3.5677e-009	6.01	5.5974e-011	5.99	8.7420e-013	6.00
$T_2=1.0000$	2.3032e-005	3.1861e-007	6.18	4.7299e-009	6.07	7.2239e-011	6.03	1.1183e-012	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.3032e-005	3.3811e-007	6.09	5.1114e-009	6.05	7.9535e-011	6.01	1.2328e-012	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2616e-004	2.2198e-005	5.03	6.8004e-007	5.03	2.1013e-008	5.02	6.5249e-010	5.01

Tabelle 62:

Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz) (10.11)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.9396e-003	1.2411e-003	1.99	3.1040e-004	2.00	7.7604e-005	2.00	1.9401e-005	2.00
$T_2=1.0000$	7.8386e-003	1.8645e-003	2.07	4.6051e-004	2.02	1.1478e-004	2.00	2.8673e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.8386e-003	1.9785e-003	1.99	4.9920e-004	1.99	1.2502e-004	2.00	3.1264e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.2160e-003	2.0000e-003	2.04	5.0313e-004	1.99	1.2530e-004	2.01	3.1315e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	1.4441e-005	8.2558e-007	4.13	5.0557e-008	4.03	3.1441e-009	4.01	1.9622e-010	4.00
$T_2=1.0000$	1.1221e-005	6.2812e-007	4.16	3.8353e-008	4.03	2.3839e-009	4.01	1.4874e-010	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.4441e-005	1.2239e-006	3.56	7.4799e-008	4.03	4.6489e-009	4.01	2.9044e-010	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	1.0411e-004	4.7426e-006	4.46	2.9141e-007	4.02	1.7791e-008	4.03	1.1058e-009	4.01
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.7280e-007	4.8692e-008	4.16	2.8939e-009	4.07	1.7842e-010	4.02	1.1192e-011	3.99
$T_2=1.0000$	7.2322e-007	3.8100e-008	4.25	2.3077e-009	4.05	1.4325e-010	4.01	8.9593e-012	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.7280e-007	5.7914e-008	3.91	3.4956e-009	4.05	2.1920e-010	4.00	1.3735e-011	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.8504e-005	6.5915e-007	5.87	1.2810e-008	5.69	3.6353e-010	5.14	1.5993e-011	4.51
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.0751e-007	2.8531e-010	8.56	2.0585e-012	7.11	1.3021e-013	3.98	9.6926e-014	0.43
$T_2=1.0000$	8.3558e-008	2.7061e-010	8.27	1.0437e-012	8.02	1.0407e-013	3.33	8.0492e-014	0.37
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.0751e-007	3.1696e-010	8.41	2.4185e-012	7.03	1.4872e-013	4.02	1.0856e-013	0.45
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.8362e-005	6.0630e-007	5.98	9.3641e-009	6.02	1.4520e-010	6.01	2.3575e-012	5.94
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1510e-007	3.9066e-010	8.20	1.4028e-012	8.12	9.0875e-014	3.95	9.6526e-014	-0.09
$T_2=1.0000$	9.1161e-008	3.7218e-010	7.94	1.4127e-012	8.04	7.6259e-014	4.21	7.9848e-014	-0.07
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.1510e-007	5.4615e-010	7.72	2.0130e-012	8.08	1.0029e-013	4.33	1.0774e-013	-0.10
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.8389e-005	6.0665e-007	5.98	9.3678e-009	6.02	1.4524e-010	6.01	2.3579e-012	5.94
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1445e-007	3.8384e-010	8.22	1.3050e-012	8.20	9.2389e-014	3.82	9.6521e-014	-0.06
$T_2=1.0000$	9.1457e-008	3.7586e-010	7.93	1.4664e-012	8.00	7.6589e-014	4.26	7.9854e-014	-0.06
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.1445e-007	5.4449e-010	7.72	1.9925e-012	8.09	1.0103e-013	4.30	1.0763e-013	-0.09
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.8391e-005	6.0667e-007	5.98	9.3680e-009	6.02	1.4524e-010	6.01	2.3578e-012	5.94
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1443e-007	3.8374e-010	8.22	1.3046e-012	8.20	9.2428e-014	3.82	9.6521e-014	-0.06
$T_2=1.0000$	9.1457e-008	3.7587e-010	7.93	1.4666e-012	8.00	7.6568e-014	4.26	8.0007e-014	-0.06
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	1.1443e-007	5.4438e-010	7.72	1.9920e-012	8.09	1.0092e-013	4.30	1.0774e-013	-0.09
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.8391e-005	6.0667e-007	5.98	9.3680e-009	6.02	1.4524e-010	6.01	2.3579e-012	5.94

Dasselbe mit Verwendung des linken Punktes:

Tabelle 63:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)

Gitter: 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.3808e-002	3.4800e-003	1.99	8.7050e-004	2.00	2.1764e-004	2.00	5.4410e-005	2.00
$T_2=1.0000$	2.2958e-002	5.2857e-003	2.12	1.2950e-003	2.03	3.2211e-004	2.01	8.0427e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.2958e-002	5.6020e-003	2.03	1.4038e-003	2.00	3.5084e-004	2.00	8.7694e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.3676e-002	5.7248e-003	2.05	1.4177e-003	2.01	3.5272e-004	2.01	8.7923e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1431e-003	6.8302e-005	4.06	4.2177e-006	4.02	2.6281e-007	4.00	1.6413e-008	4.00
$T_2=1.0000$	9.0310e-004	5.2209e-005	4.11	3.2011e-006	4.03	1.9912e-007	4.01	1.2430e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1431e-003	7.6922e-005	3.89	4.7937e-006	4.00	3.0333e-007	3.98	1.8948e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2595e-003	7.8015e-005	4.01	4.7937e-006	4.02	3.0333e-007	3.98	1.8948e-008	4.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1118e-003	6.7308e-005	4.05	4.1697e-006	4.01	2.6002e-007	4.00	1.6242e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.0024e-003	5.7827e-005	4.12	3.5435e-006	4.03	2.2038e-007	4.01	1.3757e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1118e-003	7.4157e-005	3.91	4.6256e-006	4.00	2.9231e-007	3.98	1.8267e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4380e-003	7.8992e-005	4.19	4.7414e-006	4.06	2.9507e-007	4.01	1.8338e-008	4.01
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1039e-003	6.6836e-005	4.05	4.1408e-006	4.01	2.5822e-007	4.00	1.6130e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.0008e-003	5.7723e-005	4.12	3.5371e-006	4.03	2.1998e-007	4.01	1.3732e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1039e-003	7.4144e-005	3.90	4.6242e-006	4.00	2.9186e-007	3.99	1.8239e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4312e-003	7.8994e-005	4.18	4.7269e-006	4.06	2.9461e-007	4.00	1.8310e-008	4.01
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1038e-003	6.6835e-005	4.05	4.1408e-006	4.01	2.5822e-007	4.00	1.6130e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.0006e-003	5.7721e-005	4.12	3.5371e-006	4.03	2.1998e-007	4.01	1.3732e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1038e-003	7.4144e-005	3.90	4.6242e-006	4.00	2.9186e-007	3.99	1.8239e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4311e-003	7.8994e-005	4.18	4.7268e-006	4.06	2.9461e-007	4.00	1.8310e-008	4.01
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1038e-003	6.6835e-005	4.05	4.1408e-006	4.01	2.5822e-007	4.00	1.6130e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.0006e-003	5.7721e-005	4.12	3.5371e-006	4.03	2.1998e-007	4.01	1.3732e-008	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.1038e-003	7.4144e-005	3.90	4.6242e-006	4.00	2.9186e-007	3.99	1.8239e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4311e-003	7.8994e-005	4.18	4.7268e-006	4.06	2.9461e-007	4.00	1.8310e-008	4.01

Iterationsschritt 6:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.1038e-003	6.6835e-005	4.05	4.1408e-006	4.01	2.5822e-007	4.00	1.6130e-008	4.00
$T_2=1.0000$	1.0006e-003	5.7721e-005	4.12	3.5371e-006	4.03	2.1998e-007	4.01	1.3732e-008	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.1038e-003	7.4144e-005	3.90	4.6242e-006	4.00	2.9186e-007	3.99	1.8239e-008	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4311e-003	7.8994e-005	4.18	4.7268e-006	4.06	2.9461e-007	4.00	1.8310e-008	4.01

Tabelle 64:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	7.8112e-003	1.9610e-003	1.99	4.9042e-004	2.00	1.2261e-004	2.00	3.0653e-005	2.00
$T_2=1.0000$	1.2412e-002	2.9477e-003	2.07	7.2768e-004	2.02	1.8135e-004	2.00	4.5302e-005	2.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.2412e-002	3.1278e-003	1.99	7.8883e-004	1.99	1.9753e-004	2.00	4.9396e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2571e-002	3.1780e-003	1.98	7.9325e-004	2.00	1.9820e-004	2.00	4.9472e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.3469e-005	2.2267e-006	4.29	1.3192e-007	4.08	8.1344e-009	4.02	5.0668e-010	4.00
$T_2=1.0000$	2.7902e-005	1.5523e-006	4.17	9.4835e-008	4.03	5.8960e-009	4.01	3.6802e-010	4.00
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	4.3469e-005	3.0654e-006	3.83	1.8737e-007	4.03	1.1643e-008	4.01	7.2659e-010	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5715e-004	1.3318e-005	3.56	9.2264e-007	3.85	5.8640e-008	3.98	3.6939e-009	3.99
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.7825e-006	1.3601e-007	4.35	1.1244e-008	3.60	7.4996e-010	3.91	4.7631e-011	3.98
$T_2=1.0000$	1.1058e-005	7.5407e-008	7.20	7.3025e-009	3.37	5.7581e-010	3.66	3.7906e-011	3.93
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.1058e-005	1.3601e-007	6.35	1.2685e-008	3.42	9.0472e-010	3.81	5.8323e-011	3.96
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9862e-005	1.5368e-006	5.87	3.4707e-008	5.47	1.2473e-009	4.80	6.3573e-011	4.29
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.4256e-006	6.9987e-008	5.98	1.1030e-009	5.99	1.7268e-011	6.00	2.6327e-013	6.04
$T_2=1.0000$	1.3490e-005	1.9141e-007	6.14	2.9192e-009	6.03	4.5333e-011	6.01	7.0269e-013	6.01
$\max_{T_i}(\ \dots\)$	1.3490e-005	1.9141e-007	6.14	3.1724e-009	5.91	4.9306e-011	6.01	7.6352e-013	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8750e-005	1.4335e-006	5.95	2.2706e-008	5.98	3.5506e-010	6.00	5.5665e-012	6.00
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	8	16		32		64		128	

	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.4660e-006	7.0648e-008	5.98	1.1133e-009	5.99	1.7429e-011	6.00	2.6574e-013	6.04
$T_2=1.0000$	1.3502e-005	1.9168e-007	6.14	2.9237e-009	6.03	4.5404e-011	6.01	7.0369e-013	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3502e-005	1.9168e-007	6.14	3.1768e-009	5.92	4.9375e-011	6.01	7.6476e-013	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8698e-005	1.4317e-006	5.95	2.2680e-008	5.98	3.5462e-010	6.00	5.5597e-012	6.00
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.4645e-006	7.0618e-008	5.98	1.1128e-009	5.99	1.7421e-011	6.00	2.6607e-013	6.03
$T_2=1.0000$	1.3501e-005	1.9166e-007	6.14	2.9233e-009	6.03	4.5398e-011	6.01	7.0362e-013	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3501e-005	1.9166e-007	6.14	3.1763e-009	5.92	4.9368e-011	6.01	7.6473e-013	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8699e-005	1.4317e-006	5.95	2.2680e-008	5.98	3.5462e-010	6.00	5.5598e-012	6.00
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	8	16		32		64		128	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.4644e-006	7.0617e-008	5.98	1.1128e-009	5.99	1.7421e-011	6.00	2.6598e-013	6.03
$T_2=1.0000$	1.3501e-005	1.9166e-007	6.14	2.9233e-009	6.03	4.5398e-011	6.01	7.0336e-013	6.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3501e-005	1.9166e-007	6.14	3.1763e-009	5.92	4.9367e-011	6.01	7.6465e-013	6.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.8699e-005	1.4317e-006	5.95	2.2680e-008	5.98	3.5462e-010	6.00	5.5597e-012	6.00

Tabelle 65:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	4.9396e-003	1.2411e-003	1.99	3.1040e-004	2.00	7.7604e-005	2.00	1.9401e-005	2.00
$T_2=1.0000$	7.8386e-003	1.8645e-003	2.07	4.6051e-004	2.02	1.1478e-004	2.00	2.8673e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.8386e-003	1.9785e-003	1.99	4.9920e-004	1.99	1.2502e-004	2.00	3.1264e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.2160e-003	2.0000e-003	2.04	5.0313e-004	1.99	1.2530e-004	2.01	3.1315e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	1.4393e-005	8.2497e-007	4.12	5.0543e-008	4.03	3.1436e-009	4.01	1.9626e-010	4.00
$T_2=1.0000$	1.1251e-005	6.2869e-007	4.16	3.8365e-008	4.03	2.3843e-009	4.01	1.4882e-010	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4393e-005	1.2244e-006	3.56	7.4805e-008	4.03	4.6490e-009	4.01	2.9052e-010	4.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.0932e-005	4.3586e-006	4.02	2.7684e-007	3.98	1.7280e-008	4.00	1.0791e-009	4.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p

$T_1=0.5000$	8.8701e-007	4.8367e-008	4.20	2.8807e-009	4.07	1.7770e-010	4.02	1.1046e-011	4.01
$T_2=1.0000$	7.3488e-007	3.7888e-008	4.28	2.2983e-009	4.04	1.4275e-010	4.01	8.9012e-012	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.8701e-007	5.7595e-008	3.94	3.4810e-009	4.05	2.1837e-010	3.99	1.3597e-011	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	4.3555e-006	8.2583e-008	5.72	3.9124e-009	4.40	2.2824e-010	4.10	1.3869e-011	4.04
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.4761e-008	3.0720e-010	8.11	2.2848e-012	7.07	3.1464e-014	6.18	2.8299e-014	0.15
$T_2=1.0000$	7.6580e-008	3.0618e-010	7.97	2.0743e-012	7.21	1.2604e-014	7.36	2.3225e-014	-0.88
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.4761e-008	3.0720e-010	8.11	2.3102e-012	7.05	4.2551e-014	5.76	3.1358e-014	0.44
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5754e-006	2.7742e-008	7.01	2.1815e-010	6.99	1.7587e-012	6.95	3.3230e-014	5.73
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.6317e-008	3.0854e-010	8.13	1.2496e-012	7.95	3.5120e-014	5.15	2.8854e-014	0.28
$T_2=1.0000$	7.7422e-008	2.8553e-010	8.08	1.0332e-012	8.11	2.1512e-014	5.59	2.3718e-014	-0.14
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.6317e-008	3.9694e-010	7.76	1.5506e-012	8.00	3.8375e-014	5.34	3.2016e-014	0.26
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5312e-006	2.7028e-008	7.03	2.0738e-010	7.03	1.6011e-012	7.02	3.4928e-014	5.52
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.5964e-008	3.0453e-010	8.14	1.1910e-012	8.00	3.3800e-014	5.14	2.8699e-014	0.24
$T_2=1.0000$	7.7750e-008	2.9028e-010	8.07	1.1063e-012	8.04	2.1131e-014	5.71	2.3573e-014	-0.16
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.5964e-008	3.9484e-010	7.77	1.5252e-012	8.02	3.7591e-014	5.34	3.1949e-014	0.23
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5315e-006	2.7028e-008	7.03	2.0742e-010	7.03	1.6010e-012	7.02	3.5004e-014	5.52
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	10	20		40		80		160	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	8.5962e-008	3.0452e-010	8.14	1.1911e-012	8.00	3.3763e-014	5.14	2.8860e-014	0.23
$T_2=1.0000$	7.7752e-008	2.9029e-010	8.07	1.1063e-012	8.04	2.1172e-014	5.71	2.3428e-014	-0.15
$\max_{\tau_i}(\ \cdots\)$	8.5962e-008	3.9480e-010	7.77	1.5251e-012	8.02	3.7539e-014	5.34	3.2016e-014	0.23
$\max_{t_{i,j}}(\ \cdots\)$	3.5316e-006	2.7028e-008	7.03	2.0742e-010	7.03	1.6010e-012	7.02	3.5004e-014	5.52

Es ist also hier kein Problem, mit Ordnungsfolge 2, 4, ... zu starten, allerdings setzen wir fort mit 2, 4, 4, ... Andere reguläre Randwertprobleme (auch nichtlineare) wurden getestet, hilft aber im dem Sinne bessere Ordnungsfolgen als 2, 4, 4, ... zu erzielen nicht weiter. Wir versuchen das jetzt allgemeiner mit symmetrischen Zufallsknoten, aber entsprechend höherem Polynomgrad:
Wieder zuerst 'ohne linken Punkt':

Tabelle 66:

Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz) (10.11)
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)
Gitter: 5 symmetrische Zufallsknoten ($m = 6$)

Iterationsschritt 0:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.9713e-003	7.4083e-004	2.00	1.8515e-004	2.00	4.6285e-005	2.00	1.1571e-005	2.00
$T_2=1.0000$	4.2976e-003	1.0895e-003	1.98	2.7326e-004	2.00	6.8368e-005	2.00	1.7095e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.2976e-003	1.1593e-003	1.89	2.9623e-004	1.97	7.4473e-005	1.99	1.8640e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.8041e-003	1.2069e-003	1.99	2.9839e-004	2.02	7.4760e-005	2.00	1.8662e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.5843e-004	1.7816e-005	4.33	1.0321e-006	4.11	6.2753e-008	4.04	3.8802e-009	4.02
$T_2=1.0000$	1.9949e-004	1.1220e-005	4.15	6.6923e-007	4.07	4.0951e-008	4.03	2.5339e-009	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.5843e-004	2.4520e-005	3.87	1.4290e-006	4.10	8.6845e-008	4.04	5.3661e-009	4.02
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.5843e-004	2.4520e-005	3.87	1.4290e-006	4.10	8.6845e-008	4.04	5.3661e-009	4.02
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	3.6577e-005	5.5407e-007	6.04	6.5725e-009	6.40	2.4703e-010	4.73	2.7611e-011	3.16
$T_2=1.0000$	2.2935e-005	5.6391e-007	5.35	1.9179e-008	4.88	8.3044e-010	4.53	4.1955e-011	4.31
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.6577e-005	9.6263e-007	5.25	2.6506e-008	5.18	9.3789e-010	4.82	5.0458e-011	4.22
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6577e-005	9.8150e-007	5.22	2.7297e-008	5.17	9.5837e-010	4.83	5.0458e-011	4.25
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.5552e-005	3.1812e-007	6.33	4.3477e-009	6.19	6.0818e-011	6.16	2.4393e-012	4.64
$T_2=1.0000$	1.6763e-005	2.3941e-007	6.13	3.6159e-009	6.05	5.7016e-011	5.99	2.2635e-012	4.65
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.5552e-005	3.3840e-007	6.24	5.0451e-009	6.07	7.8577e-011	6.00	3.0622e-012	4.68
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5552e-005	3.3840e-007	6.24	5.0451e-009	6.07	7.8577e-011	6.00	3.0622e-012	4.68
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.5113e-005	3.1609e-007	6.31	4.5000e-009	6.13	6.9054e-011	6.03	2.7518e-012	4.65
$T_2=1.0000$	1.6755e-005	2.3789e-007	6.14	3.5997e-009	6.05	5.6968e-011	5.98	2.2957e-012	4.63
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.5113e-005	3.2054e-007	6.29	4.8853e-009	6.04	7.6671e-011	5.99	3.0775e-012	4.64
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5113e-005	3.2054e-007	6.29	4.8853e-009	6.04	7.6671e-011	5.99	3.0775e-012	4.64
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	12	24	48	96	192				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1=0.5000$	2.5088e-005	3.1596e-007	6.31	4.5016e-009	6.13	6.9112e-011	6.03	2.7530e-012	4.65
$T_2=1.0000$	1.6754e-005	2.3784e-007	6.14	3.5995e-009	6.05	5.6975e-011	5.98	2.2958e-012	4.63
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.5088e-005	3.1999e-007	6.29	4.8836e-009	6.03	7.6663e-011	5.99	3.0779e-012	4.64
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5088e-005	3.1999e-007	6.29	4.8836e-009	6.03	7.6663e-011	5.99	3.0779e-012	4.64
Iterationsschritt 6:									

Punkte:	12			24			48			96			192		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=0.5000$	2.5087e-005	3.1596e-007	6.31	4.5016e-009	6.13	6.9113e-011	6.03	2.7528e-012	4.65						
$T_2=1.0000$	1.6754e-005	2.3784e-007	6.14	3.5995e-009	6.05	5.6975e-011	5.98	2.2956e-012	4.63						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.5087e-005	3.1997e-007	6.29	4.8836e-009	6.03	7.6663e-011	5.99	3.0776e-012	4.64						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5087e-005	3.1997e-007	6.29	4.8836e-009	6.03	7.6663e-011	5.99	3.0776e-012	4.64						

Für $m = 6$ startet die Ordnungsfolge also zumindest mit $2, 4, \dots$. Dasselbe gilt für die geraden und ausreichend großen m . Für ungerade m ist nichteinmal $2, 4, \dots$ gesichert.

Tabelle 67:

Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz) (10.11)															
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)															
Gitter: 6 symmetrische Zufallsknoten ($m = 7$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	2.9273e-002	6.3363e-003	2.21	1.5396e-003	2.04	3.8228e-004	2.01	9.5408e-005	2.00						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.9273e-002	6.3363e-003	2.21	1.6353e-003	1.95	4.1441e-004	1.98	1.0392e-004	2.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.4596e-002	6.9380e-003	2.32	1.6610e-003	2.06	4.1950e-004	1.99	1.0412e-004	2.01						
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	2.5427e-002	1.4229e-003	4.16	1.3440e-004	3.40	1.5124e-005	3.15	1.8086e-006	3.06						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.5427e-002	1.5792e-003	4.01	2.1090e-004	2.90	2.4168e-005	3.13	2.9229e-006	3.05						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.5427e-002	1.5792e-003	4.01	2.1090e-004	2.90	2.4168e-005	3.13	2.9229e-006	3.05						
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	3.6073e-003	1.0974e-004	5.04	5.4136e-006	4.34	3.1601e-007	4.10	1.9392e-008	4.03						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.6073e-003	1.2259e-004	4.88	8.1064e-006	3.92	4.7782e-007	4.08	2.9819e-008	4.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.6073e-003	1.2259e-004	4.88	8.1064e-006	3.92	4.7782e-007	4.08	2.9819e-008	4.00						
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	7.5678e-004	8.5870e-006	6.46	1.9201e-007	5.48	5.6621e-009	5.08	3.7522e-010	3.92						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.5678e-004	8.5870e-006	6.46	2.7340e-007	4.97	8.4723e-009	5.01	5.8010e-010	3.87						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.5678e-004	8.5870e-006	6.46	2.7340e-007	4.97	8.4723e-009	5.01	5.8010e-010	3.87						
Iterationsschritt 4:															
Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	4.4009e-004	2.3623e-006	7.54	1.8901e-008	6.97	3.7040e-010	5.67	2.9394e-010	0.33						

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4009e-004	2.3623e-006	7.54	2.1090e-008	6.81	5.5007e-010	5.26	4.0137e-010	0.45
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.4009e-004	2.3623e-006	7.54	2.1090e-008	6.81	5.5007e-010	5.26	4.0137e-010	0.45
Iterationsschritt 5:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	4.0617e-004	1.9848e-006	7.68	1.3268e-008	7.22	3.0654e-010	5.44	2.9353e-010	0.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.0617e-004	1.9848e-006	7.68	1.4248e-008	7.12	4.4244e-010	5.01	4.0071e-010	0.14
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.0617e-004	1.9848e-006	7.68	1.4248e-008	7.12	4.4788e-010	4.99	4.0071e-010	0.16
Iterationsschritt 6:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	4.0254e-004	1.9616e-006	7.68	1.3082e-008	7.23	3.0554e-010	5.42	2.9352e-010	0.06
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.0254e-004	1.9616e-006	7.68	1.4053e-008	7.13	4.4114e-010	4.99	4.0071e-010	0.14
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.0254e-004	1.9616e-006	7.68	1.4053e-008	7.13	4.4691e-010	4.97	4.0071e-010	0.16

Dasselbe ‘mit linkem Punkt’:

Tabelle 68:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 symmetrische Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.7533e-002	4.1135e-003	2.09	1.0134e-003	2.02	2.5243e-004	2.01	6.3051e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7533e-002	4.1135e-003	2.09	1.0770e-003	1.93	2.7365e-004	1.98	6.8679e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.8763e-002	4.4493e-003	2.08	1.1075e-003	2.01	2.7622e-004	2.00	6.8899e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	6.0107e-005	2.4931e-006	4.59	1.5761e-007	3.98	9.9098e-009	3.99	6.2051e-010	4.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.0107e-005	5.4422e-006	3.47	2.8707e-007	4.24	1.8936e-008	3.92	1.1719e-009	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.1323e-004	4.8372e-005	4.24	3.0017e-006	4.01	1.7867e-007	4.07	1.1340e-008	3.98
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	5.6950e-006	1.0030e-006	2.51	6.1727e-008	4.02	3.8110e-009	4.02	2.3731e-010	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.6950e-006	1.4208e-006	2.00	9.4380e-008	3.91	5.7733e-009	4.03	3.6293e-010	3.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1995e-004	2.6013e-006	5.53	1.2536e-007	4.38	6.5412e-009	4.26	3.8349e-010	4.09
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p

$T_1=1.0000$	2.0303e-005	5.9329e-008	8.42	2.9867e-010	7.63	2.5979e-012	6.85	1.6021e-013	4.02
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0303e-005	5.9329e-008	8.42	6.6570e-010	6.48	9.0667e-012	6.20	1.9092e-013	5.57
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.7834e-005	1.8733e-007	8.00	8.7990e-010	7.73	9.0667e-012	6.60	3.1305e-013	4.86
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.8889e-005	4.7559e-008	8.63	1.5430e-010	8.27	5.0378e-013	8.26	1.3784e-013	1.87
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.8889e-005	4.7559e-008	8.63	1.5430e-010	8.27	5.0431e-013	8.26	1.8097e-013	1.48
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	5.2255e-005	1.9893e-007	8.04	8.2226e-010	7.92	3.1896e-012	8.01	1.8483e-013	4.11

Im Gegensatz zur vorigen Variante schaffen wir hier auch bei ungeradem m Ordnungsfolge $2, 4, \dots$ aber eben nicht $2, 4, 6, \dots$:

Tabelle 69:

Integralvariante IMR (mit linkem Punkt) (10.14)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 6 symmetrische Zufallsknoten ($m = 7$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.4623e-002	3.0633e-003	2.26	7.3727e-004	2.05	1.8262e-004	2.01	4.5550e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4623e-002	3.0633e-003	2.26	7.8267e-004	1.97	1.9796e-004	1.98	4.9615e-005	2.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5175e-002	3.2097e-003	2.24	7.8935e-004	2.02	1.9942e-004	1.98	4.9716e-005	2.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	3.8506e-005	1.8073e-006	4.41	1.0725e-007	4.07	6.6209e-009	4.02	4.1001e-010	4.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.8506e-005	3.8391e-006	3.33	2.1622e-007	4.15	1.3186e-008	4.04	8.1695e-010	4.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.4301e-004	2.0882e-005	3.54	1.2796e-006	4.03	8.0698e-008	3.99	5.0370e-009	4.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3838e-006	6.3733e-008	4.44	3.5571e-009	4.16	2.1665e-010	4.04	1.4448e-011	3.91
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3838e-006	7.6334e-008	4.18	5.3239e-009	3.84	3.2764e-010	4.02	2.3151e-011	3.82
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.4536e-005	4.9235e-007	4.88	1.6699e-008	4.88	6.2537e-010	4.74	3.0683e-011	4.35
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	7	14		28		56		112	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	9.2915e-007	2.0827e-009	8.80	9.0292e-012	7.85	3.1520e-012	1.52	3.0353e-012	0.05
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.2915e-007	3.7885e-009	7.94	1.9937e-011	7.57	3.9821e-012	2.32	4.0136e-012	-0.01
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.8543e-006	1.0266e-008	7.50	1.1093e-010	6.53	5.3180e-012	4.38	4.0417e-012	0.40
Iterationsschritt 4:									

Punkte:	7			14			28			56			112		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	9.6323e-007	2.6293e-009	8.52	6.6462e-012	8.63	2.9929e-012	1.15	3.0328e-012	-0.02						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	9.6323e-007	3.0911e-009	8.28	8.6603e-012	8.48	3.9157e-012	1.15	4.0134e-012	-0.04						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.6263e-006	4.2073e-009	8.59	1.0799e-011	8.61	3.9281e-012	1.46	4.0266e-012	-0.04						

11. Ein Versuch: Die Defektkorrektur auf Basis des Raudau-IIa-Verfahrens

Das Verfahren Radau-IIa schreibt sich als:

$$(11.1) \quad \begin{aligned} \eta_{\frac{1}{3}} &= \eta_0 + \delta \left(\frac{5}{12} F(t_{\frac{1}{3}}, \eta_{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{12} F(t_1, \eta_1) \right) \\ \eta_1 &= \eta_0 + \delta \left(\frac{3}{4} F(t_{\frac{1}{3}}, \eta_{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{4} F(t_1, \eta_1) \right) \end{aligned}$$

Man kann das als 3-stufiges Runge-Kutta Verfahren interpretieren, bei dem $\eta_{\frac{2}{3}}$ nicht vorkommt. Eine Umformung in eine Schreibweise analog zu (10.1) ist aber nicht möglich. Es ist daher nötig, die $\eta_{\frac{1}{3}}$ mitzuberechnen, als wären sie normale Gitterpunkte. Der Defekt wird ebenfalls auch für der Stelle $t_{\frac{1}{3}}$ berechnet wobei sich hier für die Differentialvariante folgende zwei Versionen anbieten:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \hat{d}_{\frac{1}{3}} &= p'(t_{\frac{1}{3}}) - F(t_{\frac{1}{3}}, p(t_{\frac{1}{3}})), \\ \hat{d}_1 &= p'(t_1) - F(t_1, \eta_1). \end{aligned}$$

oder

$$(11.3) \quad \begin{aligned} \hat{d}_{\frac{1}{3}} &= p'(t_{\frac{1}{3}}) - F(t_{\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{3}}), \\ \hat{d}_1 &= p'(t_1) - F(t_1, \eta_1). \end{aligned}$$

Für die F Auswertung an der Stelle $\frac{1}{3}$ nimmt man also entweder das Polynom p an der Stelle $\frac{1}{3}$ (11.2), oder man zieht einfach die berechneten $\eta_{\frac{1}{3}}$ heran (11.3).

Analog dazu gibt es für die Integralvariante folgende zwei Versionen den Defekt in der Schreibweise des vorigen Kapitels anzuschreiben:

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \hat{D}_{[0, \frac{1}{3}]} &= (p(t_{\frac{1}{3}}) - \eta_0) - \frac{\delta}{3} \sum_{k=1}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k), \\ \hat{D}_{[0, 1]} &= (\eta_1 - \eta_0) - \delta \sum_{k=1}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k). \end{aligned}$$

oder

$$(11.5) \quad \begin{aligned} \hat{D}_{[0, \frac{1}{3}]} &= (\eta_{\frac{1}{3}} - \eta_0) - \frac{\delta}{3} \sum_{k=1}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k), \\ \hat{D}_{[0, 1]} &= (\eta_1 - \eta_0) - \delta \sum_{k=1}^m \alpha_k F(t_k, \eta_k). \end{aligned}$$

Auf äquidistantem Gitter zeigt sich für die Differentialvariante folgendes Bild:

Tabelle 70:

Differentialvariante Radau-IIa, benutze $p(\frac{1}{3})$ (11.2)

einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	4.4515e-004	5.5661e-005	3.00	6.9522e-006	3.00	8.6851e-007	3.00	1.0853e-007	3.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4515e-004	1.0224e-004	2.12	1.2802e-005	3.00	1.7164e-006	2.90	2.1433e-007	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9400e-004	1.1001e-004	3.02	1.3763e-005	3.00	1.7164e-006	3.00	2.1433e-007	3.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	2.8149e-006	4.0163e-008	6.13	2.3134e-010	7.44	4.9780e-012	5.54	7.7886e-012	-0.65
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.8149e-006	2.5352e-007	3.47	1.5980e-009	7.31	1.6359e-011	6.61	8.6725e-012	0.92
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1157e-005	5.5395e-007	6.79	4.3443e-009	6.99	3.0506e-011	7.15	8.6725e-012	1.81
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	3.4817e-006	5.6258e-008	5.95	4.4049e-010	7.00	6.9231e-012	5.99	6.7407e-012	0.04
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4817e-006	2.5754e-007	3.76	1.6320e-009	7.30	1.5378e-011	6.73	8.5437e-012	0.85
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1370e-005	5.5572e-007	6.79	4.2086e-009	7.04	2.9263e-011	7.17	8.5437e-012	1.78
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	3.4820e-006	5.6259e-008	5.95	4.3996e-010	7.00	7.2477e-012	5.92	7.3856e-012	-0.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4820e-006	2.5753e-007	3.76	1.6322e-009	7.30	1.5333e-011	6.73	8.2639e-012	0.89
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1370e-005	5.5571e-007	6.79	4.2087e-009	7.04	2.9790e-011	7.14	8.2639e-012	1.85
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12	24	48	96				
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p
$T_1 = 1.0000$	3.4820e-006	5.6259e-008	5.95	4.4033e-010	7.00	7.6418e-012	5.85	7.1190e-012	0.10
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.4820e-006	2.5753e-007	3.76	1.6323e-009	7.30	1.5209e-011	6.75	7.9943e-012	0.93
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.1370e-005	5.5571e-007	6.79	4.2083e-009	7.04	2.9474e-011	7.16	7.9943e-012	1.88

Tabelle 71:

Differentialvariante Radau-IIa, benutze berechnete $\eta_{\frac{1}{3}}$ (11.3)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									

Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	4.4515e-004	5.5661e-005	3.00	6.9522e-006	3.00	8.6851e-007	3.00	1.0853e-007	3.00	1.0853e-007	3.00	1.0853e-007	3.00		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4515e-004	1.0224e-004	2.12	1.2802e-005	3.00	1.7164e-006	2.90	2.1433e-007	3.00	2.1433e-007	3.00	2.1433e-007	3.00		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9400e-004	1.1001e-004	3.02	1.3763e-005	3.00	1.7164e-006	3.00	2.1433e-007	3.00	2.1433e-007	3.00	2.1433e-007	3.00		
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	1.4751e-004	1.7783e-005	3.05	2.1880e-006	3.02	2.7149e-007	3.01	3.3814e-008	3.01	3.3814e-008	3.01	3.3814e-008	3.01		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4751e-004	9.5221e-005	0.63	1.1667e-005	3.03	1.4464e-006	3.01	1.8010e-007	3.01	1.8010e-007	3.01	1.8010e-007	3.01		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.0012e-004	9.5221e-005	3.07	1.1667e-005	3.03	1.4468e-006	3.01	1.8022e-007	3.00	1.8022e-007	3.00	1.8022e-007	3.00		
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	1.7254e-004	1.9605e-005	3.14	2.3508e-006	3.06	2.8823e-007	3.03	3.5689e-008	3.01	3.5689e-008	3.01	3.5689e-008	3.01		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.7254e-004	7.9947e-005	1.11	9.7720e-006	3.03	1.2094e-006	3.01	1.5061e-007	3.01	1.5061e-007	3.01	1.5061e-007	3.01		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.7061e-004	7.9947e-005	3.07	9.8278e-006	3.02	1.2158e-006	3.01	1.5129e-007	3.01	1.5129e-007	3.01	1.5129e-007	3.01		
Iterationsschritt 3:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	1.4684e-004	1.6653e-005	3.14	1.9885e-006	3.07	2.4315e-007	3.03	3.0065e-008	3.02	3.0065e-008	3.02	3.0065e-008	3.02		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4684e-004	7.6894e-005	0.93	9.4189e-006	3.03	1.1669e-006	3.01	1.4524e-007	3.01	1.4524e-007	3.01	1.4524e-007	3.01		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.4278e-004	7.6894e-005	3.06	9.4305e-006	3.03	1.1698e-006	3.01	1.4559e-007	3.01	1.4559e-007	3.01	1.4559e-007	3.01		
Iterationsschritt 4:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	1.4047e-004	1.6068e-005	3.13	1.9263e-006	3.06	2.3598e-007	3.03	2.9204e-008	3.01	2.9204e-008	3.01	2.9204e-008	3.01		
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4047e-004	7.7269e-005	0.86	9.4733e-006	3.03	1.1742e-006	3.01	1.4618e-007	3.01	1.4618e-007	3.01	1.4618e-007	3.01		
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.4516e-004	7.7269e-005	3.06	9.4733e-006	3.03	1.1762e-006	3.01	1.4642e-007	3.01	1.4642e-007	3.01	1.4642e-007	3.01		

Es funktioniert also nur die Version mit der Auswertung der Interpolationspolynom anstelle der Benützung der errechneten $\eta_{\frac{1}{3}}$.

Ein ganz ähnliches Bild zeigt sich für die Integralvariante:

Tabelle 72:

Integralvariante RadauIIa, benutze $p(\frac{1}{3})$ (11.4)															
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)															
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	4.4515e-004	5.5661e-005	3.00	6.9522e-006	3.00	8.6851e-007	3.00	1.0853e-007	3.00	1.0853e-007	3.00	1.0853e-007	3.00		

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4515e-004	1.0224e-004	2.12	1.2802e-005	3.00	1.7164e-006	2.90	2.1433e-007	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9400e-004	1.1001e-004	3.02	1.3763e-005	3.00	1.7164e-006	3.00	2.1433e-007	3.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	2.0979e-003	2.7281e-005	6.26	7.1463e-007	5.25	3.2582e-008	4.46	1.8666e-009	4.13
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	2.0979e-003	3.3206e-005	5.98	7.8952e-007	5.39	3.5743e-008	4.47	2.0662e-009	4.11
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.0979e-003	3.3206e-005	5.98	7.9023e-007	5.39	3.6213e-008	4.45	2.0685e-009	4.13
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	7.1309e-004	7.8291e-006	6.51	1.1355e-007	6.11	1.7857e-009	5.99	3.7298e-011	5.58
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.1309e-004	1.1923e-005	5.90	1.4269e-007	6.38	2.0417e-009	6.13	3.8963e-011	5.71
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.1486e-004	1.1923e-005	6.09	1.4269e-007	6.38	2.0577e-009	6.12	3.9214e-011	5.71
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.3124e-003	1.3865e-005	6.56	1.9737e-007	6.13	2.9968e-009	6.04	5.6474e-011	5.73
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3124e-003	1.9969e-005	6.04	2.6424e-007	6.24	4.0404e-009	6.03	6.7142e-011	5.91
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3124e-003	1.9969e-005	6.04	2.6424e-007	6.24	4.0404e-009	6.03	6.8016e-011	5.89
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.0646e-003	1.1355e-005	6.55	1.6161e-007	6.13	2.4479e-009	6.04	4.5784e-011	5.74
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.0646e-003	1.7162e-005	5.96	2.1804e-007	6.30	3.3246e-009	6.04	5.4770e-011	5.92
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.1955e-003	1.7162e-005	6.12	2.1804e-007	6.30	3.3246e-009	6.04	5.6103e-011	5.89

Tabelle 73:

Integralvariante RadauIIa, benutze berechnete $\eta_{\frac{1}{3}}$ (11.5)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	4.4515e-004	5.5661e-005	3.00	6.9522e-006	3.00	8.6851e-007	3.00	1.0853e-007	3.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.4515e-004	1.0224e-004	2.12	1.2802e-005	3.00	1.7164e-006	2.90	2.1433e-007	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.9400e-004	1.1001e-004	3.02	1.3763e-005	3.00	1.7164e-006	3.00	2.1433e-007	3.00
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	8.0460e-003	2.4218e-003	1.73	6.0866e-004	1.99	1.5205e-004	2.00	3.7995e-005	2.00

$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.0460e-003	2.9300e-003	1.46	8.0297e-004	1.87	2.0028e-004	2.00	5.0565e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.2530e-002	3.2677e-003	1.94	8.1265e-004	2.01	2.0268e-004	2.00	5.0566e-005	2.00
Iterationsschritt 2:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	3.6120e-003	1.2010e-003	1.59	3.0377e-004	1.98	7.5968e-005	2.00	1.8990e-005	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.6120e-003	1.4337e-003	1.33	4.0035e-004	1.84	1.0001e-004	2.00	2.5258e-005	1.99
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.0870e-003	1.6169e-003	1.91	4.0488e-004	2.00	1.0115e-004	2.00	2.5260e-005	2.00
Iterationsschritt 3:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	1.4170e-003	5.9256e-004	1.26	1.5156e-004	1.97	3.7954e-005	2.00	9.4916e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.4170e-003	6.9651e-004	1.02	1.9957e-004	1.80	4.9937e-005	2.00	1.2617e-005	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	3.4294e-003	7.9727e-004	2.10	2.0166e-004	1.98	5.0477e-005	2.00	1.2619e-005	2.00
Iterationsschritt 4:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	6.0899e-004	2.8945e-004	1.07	7.5578e-005	1.94	1.8961e-005	1.99	4.7440e-006	2.00
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.0899e-004	3.3399e-004	0.87	9.9428e-005	1.75	2.4935e-005	2.00	6.3025e-006	1.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	2.2867e-003	3.9090e-004	2.55	1.0039e-004	1.96	2.5189e-005	1.99	6.3036e-006	2.00

Es fällt auf, dass die Differentialvariante besser funktioniert als ihr Integral Gegenstück. Dieser Trend setzt sich auch auf nicht äquidistantem Gitter fort, wenn man bedenkt, dass die Differentialvariante hier gar nicht funktionieren sollte.

Tabelle 74:

Differentialvariante Radau-IIa, benutze $p(\frac{1}{3})$ (11.2)									
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)									
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)									
Iterationsschritt 0:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	8.6980e-004	8.5671e-005	3.34	1.0287e-005	3.06	1.2700e-006	3.02	1.5792e-007	3.01
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	8.6980e-004	1.4607e-004	2.57	1.8835e-005	2.96	2.4910e-006	2.92	3.1074e-007	3.00
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.5784e-003	1.5581e-004	3.34	2.0348e-005	2.94	2.5184e-006	3.01	3.1247e-007	3.01
Iterationsschritt 1:									
Punkte:	6	12		24		48		96	
	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i}-y(T_i)\ $	p
$T_1=1.0000$	6.4064e-005	3.3353e-006	4.26	3.5204e-007	3.24	4.1643e-008	3.08	5.1126e-009	3.03
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	6.4064e-005	3.3477e-006	4.26	5.8695e-007	2.51	7.7048e-008	2.93	9.7684e-009	2.98
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	9.4941e-005	4.3175e-006	4.46	6.2055e-007	2.80	7.8167e-008	2.99	9.8893e-009	2.98
Iterationsschritt 2:									

Iterationsschritt 3:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	3.1226e-005	4.0561e-007	6.27	2.2173e-008	4.19	2.5833e-009	3.10	3.0826e-010	3.07						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.1226e-005	4.0561e-007	6.27	3.5752e-008	3.50	4.6410e-009	2.95	5.9404e-010	2.97						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.2831e-005	5.6980e-007	7.00	3.5752e-008	3.99	4.7344e-009	2.92	6.0506e-010	2.97						

Iterationsschritt 4:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	3.0922e-005	3.1184e-007	6.63	5.2102e-009	5.90	2.1024e-010	4.63	3.0931e-011	2.76						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.0922e-005	3.1184e-007	6.63	6.8405e-009	5.51	3.4173e-010	4.32	4.5884e-011	2.90						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.3606e-005	6.4699e-007	6.83	9.0700e-009	6.16	3.8419e-010	4.56	4.6819e-011	3.04						

Iterationsschritt 4:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	3.0917e-005	3.1414e-007	6.62	4.8732e-009	6.01	7.7578e-011	5.97	8.9949e-012	3.11						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.0917e-005	3.1414e-007	6.62	6.4826e-009	5.60	1.0010e-010	6.02	1.1645e-011	3.10						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.3562e-005	6.4199e-007	6.84	7.6262e-009	6.40	1.0430e-010	6.19	1.2077e-011	3.11						

Tabelle 75:

Integralvariante RadauIIa, benutze $p(\frac{1}{3})$ (11.4)															
einfaches lineares Randwertproblem (6.2)															
Gitter: 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)															
Iterationsschritt 0:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	3.8317e-004	6.0564e-005	2.66	7.9209e-006	2.93	1.0079e-006	2.97	1.2707e-007	2.99						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	3.8317e-004	1.2917e-004	1.57	1.5388e-005	3.07	2.0261e-006	2.93	2.5301e-007	3.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	8.6212e-004	1.4683e-004	2.55	1.6780e-005	3.13	2.0655e-006	3.02	2.5588e-007	3.01						
Iterationsschritt 1:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	1.3470e-003	2.2896e-005	5.88	1.0617e-006	4.43	1.0635e-007	3.32	1.3402e-008	2.99						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	1.3470e-003	3.0138e-005	5.48	2.0032e-006	3.91	2.2141e-007	3.18	2.7625e-008	3.00						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	1.3470e-003	3.0138e-005	5.48	2.0032e-006	3.91	2.2720e-007	3.14	2.8594e-008	2.99						
Iterationsschritt 2:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	4.1957e-004	7.5947e-006	5.79	6.2049e-007	3.61	7.4205e-008	3.06	9.2251e-009	3.01						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	4.1957e-004	1.2256e-005	5.10	1.0297e-006	3.57	1.3870e-007	2.89	1.7734e-008	2.97						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	4.1957e-004	2.4717e-005	4.09	2.2303e-006	3.47	1.9593e-007	3.51	2.0631e-008	3.25						
Iterationsschritt 3:															

Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	7.7885e-004	1.1556e-005	6.07	6.1819e-007	4.22	7.0858e-008	3.13	8.9507e-009	2.98						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	7.7885e-004	1.9393e-005	5.33	1.1915e-006	4.02	1.4151e-007	3.07	1.7812e-008	2.99						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	7.7885e-004	1.9393e-005	5.33	1.3065e-006	3.89	1.5468e-007	3.08	1.8670e-008	3.05						
Iterationsschritt 4:															
Punkte:	6			12			24			48			96		
	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p	$\ \eta_{T_i} - y(T_i)\ $	p		
$T_1=1.0000$	5.7029e-004	7.0109e-006	6.35	2.1062e-007	5.06	1.9713e-008	3.42	2.4043e-009	3.04						
$\max_{\tau_i}(\ \dots\)$	5.7029e-004	1.1441e-005	5.64	3.7423e-007	4.93	3.8727e-008	3.27	4.7627e-009	3.02						
$\max_{t_{i,j}}(\ \dots\)$	6.8519e-004	1.1441e-005	5.90	4.2742e-007	4.74	4.5501e-008	3.23	5.1437e-009	3.15						

Literaturverzeichnis

- [1] U. Ascher, R.M.M. Mattheij, R.D. Russell: *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988. *Phys. Rev. B*, 37(3):1067–1084, 1988.
- [2] W. Auzinger: *Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1999.
- [3] W. Auzinger, O. Koch, E. Weinmüller: *Efficient Collocation Schemes for Singular Boundary Value Problems*, erscheint in *Numer. Algor.* Siehe auch ANUM Preprint Nr. 5/01 (unter <http://www.math.tuwien.ac.at/~inst115/preprints.htm>).
- [4] W. Auzinger, O. Koch, E. Weinmüller: *New Variants of Defect Correction for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, zur Publikation eingereicht.
- [5] R. Frank: Schätzungen des globalen Diskretisierungsfehlers bei Runge-Kutta-Methoden, *ISNM*, 27:45–70, 1975.
- [6] R. Frank: The method of Iterated Defect Correction and its application to two-point boundary value problems, Part I, *Numer. Math.*, 25:409–419, 1976.
- [7] R. Frank, C. Überhuber: Iterated Defect Correction for differential equations, Part I: Theoretical results, *Computing*, 20:207–228, 1978.
- [8] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
- [9] K.H. Schild: *Gaussian Collocation via Defect Correction*, *Numer. Math.*, 58:369–386, 1990.
- [10] H.J. Stetter: The defect correction principle and discretization methods, *Numer. Math.*, 29:425–443, 1978.
- [11] P.E. Zadunaisky: On the estimation of errors propagated in the numerical integration of ODEs, *Numer. Math.*, 27:21–39, 1976.

Tabellenverzeichnis

1	Differentialvariante impl.-Euler, Primitives Randwertproblem (6.1), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	29
2	Differentialvariante impl.-Euler, Primitives Randwertproblem (6.1), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	30
3	Differentialvariante impl.-Euler, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	32
4	Differentialvariante impl.-Euler, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	34
5	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	36
6	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	37
7	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	39
8	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	40
9	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	41
10	Differentialvariante impl.-Euler, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)	43
11	Differentialvariante impl.-Euler, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	44
12	Differentialvariante impl.-Euler, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	45
13	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, stark oszillierendes Randwertproblem (6.6), 7 äquidistante Knoten ($m = 8$)	47
14	Differentialvariante impl.-Euler, stark oszillierendes Randwertproblem (6.6), 7 äquidistante Knoten ($m = 8$)	49
15	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	51
16	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	53
17	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	55
18	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	57

19	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	58
20	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, einfaches nichtlineares Randwertproblem (6.8), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	60
21	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)	61
22	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)	62
23	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	64
24	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	65
25	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	67
26	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	69
27	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	70
28	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 100$ (6.11), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	72
29	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 100$ (6.11), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	73
30	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	75
31	Integralvariante Euler, ohne linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)	77
32	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	79
33	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	81
34	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	83
35	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	85
36	Ableitungen, Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Beispiel:(6.1), 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)	86
37	Ableitungen, Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Beispiel:(6.1), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	88
38	Differenzenquotienten, Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Beispiel:(6.1), 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)	89
39	Differenzenquotienten, Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Beispiel:(6.1), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	91
40	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)	92

41	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)	94
42	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	96
43	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, Randwertproblem mit oszillierender Lösung (6.5), 5 Gauss-Knoten ($m = 6$)	97
44	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	99
45	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	100
46	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	102
47	Integralvariante Euler, benutze linken Punkt, steifes Anfangswertproblem mit $\lambda = 1000$ (6.12), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	103
48	Differentialvariante IMR, Versuch mit $\frac{\eta_0 + \eta_1}{2}$, Primitives Randwertproblem (6.1), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	105
49	Differentialvariante IMR, einfaches lineares Randwertproblem (6.4), 2 äquidistante Knoten ($m = 3$)	106
50	Differentialvariante IMR, einfaches lineares Randwertproblem (6.4), 3 äquidistante Knoten ($m = 4$)	108
51	Differentialvariante IMR, einfaches lineares Randwertproblem (6.4), 4 äquidistante Knoten ($m = 5$)	110
52	Differentialvariante IMR, einfaches lineares Randwertproblem (6.4), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	111
53	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	113
54	Integralvariante IMR,(mit Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	114
55	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	116
56	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 5$)	117
57	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	119
58	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	120
59	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 3 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 4$)	121
60	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)	123
61	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)	124
62	Integralvariante IMR,(ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	125

63	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 2 Gauss-Knoten ($m = 3$)	126
64	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 3 Gauss-Knoten ($m = 4$)	128
65	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 4 Gauss-Knoten ($m = 5$)	129
66	Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 symetrische Zufallsknoten ($m = 6$)	130
67	Integralvariante IMR, (ohne Defektdifferenz), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 6 symetrische Zufallsknoten ($m = 7$)	132
68	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 symetrische Zufallsknoten ($m = 6$)	133
69	Integralvariante IMR (mit linkem Punkt), einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 6 symetrische Zufallsknoten ($m = 7$)	134
70	Differentialvariante Radau-IIa, benutze $p(\frac{1}{3})$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	135
71	Differentialvariante Radau-IIa, benutze berechnete $\eta_{\frac{1}{3}}$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	136
72	Integralvariante RadauIIa, benutze $p(\frac{1}{3})$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	137
73	Integralvariante RadauIIa, benutze berechnete $\eta_{\frac{1}{3}}$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 äquidistante Knoten ($m = 6$)	138
74	Differentialvariante Radau-IIa, benutze $p(\frac{1}{3})$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	139
75	Integralvariante RadauIIa, benutze $p(\frac{1}{3})$, einfaches lineares Randwertproblem (6.2), 5 nicht äquidistante Zufallsknoten ($m = 6$)	140