14: NUMERICS OF STIFF DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 4, T 133 – T 134

AUZINGER, W.; FRANK, R.; MACSEK, F.

Fehlerstrukturen bei steifen Differentialgleichungen

In den letzten Jahren sind zahlreiche Konvergenzaussagen für Diskretisierungen nichtlinearer steifer Differentialgleichungen angegeben worden. Der zentrale Konvergenzbegriff ist hier die sogenannte B-*Konvergenz* (vgl. z. B. [2]). Für das einfachste für steife Probleme geeignete Verfahren — das implizite Euler-Verfahren — gilt beispielsweise folgende Fehlerschranke:

$$\|\eta_\nu - y(t_\nu)\| \leqq \begin{cases} \|S_0\| + t_\nu \dfrac{M_2}{2} h\,, & m = 0\,, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{1-hm}\right)^\nu \|S_0\| + \dfrac{\left(\dfrac{1}{1-hm}\right)^\nu - 1}{m} \dfrac{M_2}{2} h\,, & m \neq 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Hier bedeutet $y(t)$ die exakte Lösung des gegebenen steifen Anfangswertproblems und η_ν die numerische Approximation an der Stelle $t_\nu = \nu h$ zur Schrittweite h. $S_0 = \eta_0 - y(0)$ ist der Fehler am Start, und M_2 ist eine globale Schranke für $\|y''(t)\|$. Der wesentliche Punkt ist das Auftreten der — bei typischen steifen Problemen moderaten — einseitigen Lipschitzkonstante m (vgl. [2]) anstelle der „klassischen" Lipschitzkonstante L, die bei steifen Problemen prinzipiell groß ist.

Für viele Zwecke (z. B. Schrittweitensteuerung, theoretische Rechtfertigung *Beschleunigter Algorithmen* wie Extrapolation oder Defektkorrektur) sind reine Konvergenzaussagen jedoch zu schwach, und man benötigt Aussagen über die Struktur des globalen Fehlers.

Für nichtsteife Probleme sind sogenannte *Asymptotische Entwicklungen* des globalen Diskretisierungsfehlers nach Potenzen der Schrittweite h schon lange bekannt (siehe z. B. [3]). Für das implizite Euler-Verfahren lautet die entsprechende Entwicklung

$$\eta_\nu - y(t_\nu) = he_1(t_\nu) + h^2 e_2(t_\nu) + \dots + h^q e_q(t_\nu) + R_\nu\,, \tag{2}$$

wobei sich die Frage erhebt, ob diese Entwicklung auch im steifen Fall asymptotisch korrekt ist, d. h. ob wie im klassischen, nichtsteifen Fall eine Abschätzung der Form

$$\|R_\nu\| \leqq \textit{moderater Ausdruck} \cdot h^{q+1} \tag{3}$$

gilt. Im Gegensatz zum klassischen Fall, bei dem alle auftretenden Ableitungen moderat sind und man die gewünschte Aussage (3) durch einfache Abschätzung von Restgliedern gewisser Taylor-Entwicklungen und durch eine klassische Stabilitätsabschätzung gewinnen kann, sind bei steifen Problemen subtilere Werkzeuge erforderlich. Unsere Argumente basieren auf Techniken der *Singulären Störungstheorie*.

Wir betrachten steife Probleme der Gestalt

$$y'(t) = A(t)\, y(t) + \varphi(t, y(t))\,, \qquad y(0) = y_0\,, \tag{4}$$

wobei die Matrix $A(t)$ ein steifes Spektrum besitzt, d. h. es gelte

$$A(t) = T(t)\, \Lambda(t)\, T^{-1}(t)\,, \qquad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_2(t)}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

mit glatten Funktionen $T(t)$, $T^{-1}(t)$, $c_1(t)$ und $c_2(t)$ (deren Ableitungen als moderat angenommen werden). Weiters setzen wir voraus

$$\operatorname{Re}\left(c_2(t)\right) \geqq \varkappa > 0\,; \tag{6}$$

$\varepsilon > 0$ ist ein kleiner Parameter, der die Steifheit des Problems charakterisiert. $\varphi(t, y)$ sei eine glatte Funktion.

Der stark steife Fall

Unter *stark steif* verstehen wir den Fall, daß der steife Eigenwert $-c_2(t)/\varepsilon$ so weit links in der komplexen Ebene liegt, daß

$$\varepsilon \leqq Ch^q \tag{7}$$

gilt mit einer moderaten Konstanten C. In dieser Situation ist die asymptotische Entwicklung für das implizite Euler-Verfahren asymptotisch korrekt.

Satz: *Unter der Annahme* (7) *besitzt der globale Fehler des impliziten Euler-Verfahrens die Entwicklung*

$$\eta_\nu - y(t_\nu) = he_1(t_\nu) + h^2 e_2(t_\nu) + \dots + h^q e_q(t_\nu) + R_\nu\,. \tag{8}$$

Dabei sind die $e_i(t)$ glatte Lösungen der „Variationsgleichungen“

$$\left.\begin{aligned} e_1'(t) &= \big(A(t) + \varphi_y(t, y(t))\big)\, e_1(t) + \tfrac{1}{2}\, y''(t)\,, \\ e_2'(t) &= \big(A(t) + \varphi_y(t, y(t))\big)\, e_2(t) - \tfrac{1}{6}\, y'''(t) + \tfrac{1}{2}\, e_1''(t) + \tfrac{1}{2}\, \varphi_{yy}(t, y(t))\, e_1^2(t)\,, \\ &\dots, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und es gilt

$$R_\nu = O(h^{q+1})\,. \tag{10}$$

Beweis: siehe [1].

Man beachte, daß die Variationsgleichungen (9) selbst steif sind, da sie von ähnlichem Typ wie das Originalproblem (4) — jedoch linear — sind. Um glatte Lösungen dieser Gleichungen zu erhalten, muß man daher geeignete Startwerte setzen. Der Beweis der obigen Aussage beruht auf einer ganz speziellen Wahl dieser Startwerte.

In [1] ist eine etwas allgemeinere Formulierung des obigen Satzes angegeben (Theorem 4.1), die es ermöglicht, auch beliebige nichtäquidistante Gitter abzudecken.

Die Aussage (10) über das Restglied ist im Sinn von (3) zu verstehen. Das Symbol $O(h^{q+1})$ bedeutet hier nicht — wie allgemein üblich — daß die entsprechende Aussage (3) gleichmäßig für $h \to 0$ gilt ($h \to 0$ steht offensichtlich im Widerspruch zur Annahme (7)), sondern eben nur innerhalb eines Bereiches von Schrittweiten, für die $\varepsilon \leqq Ch^q$ erfüllt ist. Der entscheidende Punkt ist hier, daß die Restgliedabschätzung (10) — ähnlich wie die Abschätzung (1) für den globalen Fehler — von quantitativer Natur ist und daher nicht nur asymptotisch für $h \to 0$, sondern für jedes feste h sinnvoll ist.

Der mittelsteife Fall

Wenn die obige Annahme (7) nicht erfüllt ist, d. h. wenn der sogenannte „mittelsteife“ Fall vorliegt (z. B. $h \approx \varepsilon$), ist die Entwicklung (2) für das implizite Euler-Verfahren nicht mehr asymptotisch korrekt. Es läßt sich jedoch auch in diesem Fall der Verlauf des Restgliedes quantitativ beschreiben. Es stellt sich heraus, daß unmittelbar nach dem Start (oder nach einem Schrittweitenwechsel) Restgliedterme auf h^2-Niveau auftreten, die jedoch mit fortschreitender Integration rasch weggedämpft werden (siehe Theorem 5.1, 5.6 und 5.7 in [1]). Beispielsweise ist im Fall $\varepsilon \leqq Ch$ (vgl. Theorem 5.1, 5.6 in [1]) das rasche Abklingen dieser Terme durch Faktoren der Gestalt

$$\text{Polynom}\,(\nu) \left(\frac{1}{1 + \dfrac{c_2(0)\,h}{\varepsilon}}\right)^{\nu} \tag{11}$$

charakterisiert. Das bedeutet, daß sich mit fortschreitender Integration die volle asymptotische Entwicklung auch im mittelsteifen Fall wieder einstellt. Diese Ergebnisse wurden in [1] mit Hilfe „diskreter singulärer Störungstechniken“ hergeleitet; die Terme vom Typ (11) entsprechen den bei singulär gestörten Differentialgleichungsproblemen auftretenden „boundary layer“-Termen.

Ähnliche Resultate bezüglich des impliziten Euler-Verfahrens sind unabhängig und parallel in [4] hergeleitet worden.

Literatur

1 Auzinger, W.; Frank, R.; Macsek, F.: Asymptotic error expansions for stiff equations: The implicit Euler scheme. Report Nr. 72/87, Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, TU Wien 1987. (Erscheint in SIAM J. Numer. Anal.)
2 Frank, R.; Schneid, J.; Überhuber, C. W.: Quantitative Analyse von Verfahren für steife Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 4, T 135—T 136.
3 Gragg, W. B.: Repeated extrapolation to the limit in the numerical solution of ordinary differential equations. Dissertation, UCLA 1963.
4 Hairer, E.; Lubich, Ch.: Extrapolation at stiff differential equations. Numer. Math. 52 (1988), 377—400.

Anschrift: Dr. Winfried Auzinger, Dr. R. Frank, Dr. F. Macsek, Technische Universität Wien, Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Wiedner Hauptstraße 6—10, A-1040 Wien, Österreich

Anmerkung der Redaktion

Durch ein Versehen der Redaktion kann der ebenfalls in Sitzung 14 gehaltene Vortrag

Auzinger, W.; Frank, R.: Asymptotische Fehlerentwicklungen bei steifen Differentialgleichungen: Ergebnisse und numerische Verifikation

erst am Ende dieses Heftes auf den Seiten T 273 und T 274 erscheinen. Die Leser werden gebeten, sich dort zu informieren.