Michael Feischl, Michael Innerberger

Wintersemester 2019/20
6. Dezember 2019

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 9

Aufgabe 1. Geben sei ein Dreieck $T \subseteq \mathbb{R}^2$ durch seine Knoten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ und eine affine Funktion $v \in \mathcal{P}^1(T)$ durch ihre Werte an den Knoten, d.h., $v(z_1), v(z_2), v(z_3) \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie eine Funktion `computeH1`, welche die H^1-Norm $\|v\|_{H^1(T)}$ berechnet. *Tipp:* Die Berechnung des Gradienten wurde auch in Serie 4 verwendet.

Aufgabe 2. Betrachten Sie den Raum $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}) := \operatorname{span}\big(\{b_E \,|\, E \in \mathcal{E}\} \cup \{\zeta_z \,|\, z \in \mathcal{K}\}\big)$, wobei b_E die Kanten-Bubble Funktion ($b_E = 4\zeta_z\zeta_{z'}$ für $E = \operatorname{conv}\{z, z'\}$ und $z, z' \in \mathcal{K}$) und ζ_z die Hutfunktion bezeichnet. Der Nodale Interpolationsoperator $I^2 \colon C(\overline{\Omega}) \to \mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ ist definiert durch $I^2 v \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ mit

$$\begin{aligned} (I^2 v)(z) &= v(z) \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K} \text{ und} \\ (I^2 v)(m_E) &= v(m_E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $I^2 v$ wohldefiniert und eindeutig ist, und

$$\|I^2 v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

(Hier ist m_E der Mittelpunkt der Kante.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie

$$\|v - I^2 v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|h^3 D^3 v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^3(\Omega).$$

Tipp: Zeigen Sie die letzte Aussage zunächst auf einem Element $T \in \mathcal{T}$ unter Verwendung des Bramble-Hilbert-Lemmas und der Transformationsformel. Sie dürfen verwenden, dass $\mathcal{P}^2(T)$ die lineare Hülle der Hutfunktionen und der Kanten-Bubble-Funktionen ist.

Aufgabe 4. Es sei $T = \operatorname{conv}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht-entarteter Simplex und $T_{\mathrm{ref}} = \operatorname{conv}\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ der Referenzsimplex. Konstruieren Sie einen affinen Diffeomorphismus $\Phi_T : T_{\mathrm{ref}} \to T$ mit linearem Anteil $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Schätzen Sie die Größen $\|B\|_F$ und $\|B^{-1}\|_F$ analog zu 2D ab.