Michael Feischl, Michael Innerberger Wintersemester 2019/20
29. November 2019

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 8

Aufgabe 1. Es sei H ein Hilbert-Raum und X_h ein endlichdimensionaler Teilraum von H mit zugehöriger Orthogonalprojektion $\Pi_h : H \to X_h$. Wie berechnet man zu gegebenem $u \in H$ ihre Bestapproximation $\Pi_h u \in X_h$?

Aufgabe 2. Welche Projektion berechnet der Code `who_am_I.m` und wie funktioniert das?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Folge von abgeschlossenen Räumen $\mathcal{X}_\ell \subseteq H^1(\Omega)$ mit $\mathcal{X}_\ell \subseteq \mathcal{X}_{\ell+1}$, $\ell \in \mathbb{N}$ und den zugehörigen Galerkin Lösungen u_ℓ gilt: Es existiert $u_\infty \in H^1(\Omega)$ mit

$$\lim_{\ell \to \infty} u_\ell = u_\infty \quad \text{ in } H^1(\Omega).$$

Aufgabe 4. Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Implementieren Sie den Fehlerschätzer

$$\eta := \|\nabla u_h - \Pi_h \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

Dabei bezeichnet $\Pi_h : L^2(\Omega) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die L^2-Orthogonalprojektion. Verwenden Sie die elementweisen Beiträge $\eta_T^2 := \|\nabla u_h - \Pi_h \nabla u_h\|_{L^2(T)}^2$ als Verfeinerungsindikatoren im adaptiven Algorithmus in `adaptive.m`. Plotten Sie Fehlerschätzer vs. Anzahl der Elemente für $\theta = 1/2$ und $\theta = 1$, sowie für $\Omega = [0,1]^2$ und $\Omega = [-1,1]^2 \setminus [0,1]^2$.
Alternativ: Implementieren Sie $\Pi_h : \mathcal{P}^0(\mathcal{T}) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ in Python und visualisieren Sie die Projektionen $\Pi_h v$ für verschiedene Funktionen $v \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T})$.