Michael Feischl, Michael Innerberger Wintersemester 2019/20
27. November 2019

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 7

Aufgabe 1. Wir betrachten das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \partial u/\partial n &= \phi \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{$*$}$$

Es sei η ein a posteriori Fehlerschätzer, und $R_h \in H^1_D(\Omega)^*$ bezeichne das Residuum. Zeigen Sie, dass η genau dann zuverlässig ist, wenn es eine Konstante $C_1 > 0$ gibt mit

$$R_h(v) \leq C_1 \, \eta \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^1_D(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass η genau dann effizient ist, wenn es eine Konstante $C_2 > 0$ gibt mit

$$R_h(v) \geq C_2 \, \eta \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für mindestens ein } v \in H^1_D(\Omega).$$

Aufgabe 2. Es sei $u \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung des gemischten Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= u_D \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \partial u/\partial n &= \phi \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Daten $u_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, wobei Γ_D positives Maß habe. Es sei $u_{Dh} := \widehat{u}_{Dh}|_{\Gamma_D}$ mit $\widehat{u}_{Dh} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ eine Approximation von u_D und $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die zugehörige Lösung der P1-FEM. Leiten Sie einen zuverlässigen a posteriori Fehlerschätzer η für $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ her.
Hinweis. Betrachten Sie die schwache Lösung $w \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ w &= u_D - u_{Dh} \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \partial w/\partial n &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

und beachten Sie $(u - u_h) - w \in H^1_D(\Omega)$. Beweisen Sie zunächst $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, \|u_D - u_{Dh}\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$. Eine zuverlässige Schranke für $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ erhält man schließlich mittels Dreiecksungleichung.

Aufgabe 3. Man kann den residualen Fehlerschätzer aus der Vorlesung noch verbessern. Zeigen Sie für $z \in \mathcal{K}$ die Abschätzung

$$h_z \|f\|_{L^2(\Omega_z)} \leq C\big(h_z \|f - f_z\|_{L^2(\Omega_z)} + h_z^{1/2} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E} \\ z \in E}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(E)}\big)$$

Hier ist $f_z := |\Omega_z|^{-1} \int_{\Omega_z} f \, dx$. Wie sieht der neue Fehlerschätzer aus, und welchen Vorteil hat er? *Tipp:* Verwenden Sie die Testfunktion $v := \zeta_z f_z$ für einen Knoten $z \in \mathcal{K}$ um $C_{\mathrm{ref}}^{-2} \|f_z\|^2_{L^2(\Omega_z)} \leq (f_z, v)_{L^2(T)}$ für $T \in \widetilde{\omega}_E$ zu zeigen. Verwenden Sie dann Techniken aus dem Effizienzbeweis (Theorem 4.13, Schritt 2).

Aufgabe 4. Der sogenannte $h - h/2$-Fehlerschätzer ist wie folgt definiert: Sei $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung, und sei $\widehat{\mathcal{T}}$ jene Triangulierung die man erhält wenn jedes $T \in \mathcal{T}$ durch seine Rot-Verfeinerung ersetzt wird. Dann ist der Fehlerschätzer gegeben durch

$$\mu := \|\nabla(u_h - \widehat{u}_h)\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei $\widehat{u}_h \in \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}})$ die Galerkin Lösung zu $\widehat{\mathcal{T}}$ ist. Zeigen Sie, dass μ effizient aber nicht zuverlässig ist.