Michael Feischl, Michael Innerberger Wintersemester 2019/20
20. November 2019

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 6

Aufgabe 1. Der klassische Clément Operator ist definiert für Funktionen $v \in L^2(\Omega)$ durch

$$I_h(v) = \sum_{z\in\mathcal{K}} |\Omega_z|^{-1} \Big(\int_{\Omega_z} v\, dx \Big) \zeta_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$$

Zeigen Sie die Approximationsabschätzung für $v \in H^1(\Omega)$

$$\|(1 - I_h)(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|h\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

wobei $C > 0$ nur an $\sigma(\mathcal{T})$ hängen soll. *Tipp:* Verwenden Sie die Zerlegung der Eins $v(x) = \sum_{z\in\mathcal{K}} \zeta_z(x)v(x)$, also $(1 - I_h)v = \sum_{z\in\mathcal{K}} \zeta_z(v - v_z)$ für das Integralmittel $v_z := |\Omega_z|^{-1}\Big(\int_{\Omega_z} v\, dx\Big) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Sei $P_h \colon L^2(\Omega) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ eine stetige, lineare Projektion. Zeigen Sie

$$\|(1 - P_h)(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|h\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$, wobei $C > 0$ nur an $\sigma(\mathcal{T})$ und der Stetigkeit von P_h hängen soll.

Aufgabe 3. Wir betrachten das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \partial u/\partial n &= \phi && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Daten $u_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, wobei Γ_D positives Maß habe. Es sei $\widehat{u}_D \in H^1(\Omega)$ eine Fortsetzung von u_D auf Ω und $\widehat{u}_{Dh} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ eine Approximation der Dirichlet-Daten. Zeigen Sie die eindeutige Existenz einer Funktion $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ mit

$$\begin{aligned} u_h|_{\Gamma_D} &= \widehat{u}_{Dh}|_{\Gamma_D}, \\ (\nabla u_h\,;\nabla v_h)_{L^2(\Omega)} &= (f\,;v_h)_{L^2(\Omega)} + (\phi\,;v_h)_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1_D(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Wie kann man den Koeffizientenvektor $x \in \mathbb{R}^N$ von $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ bezüglich der nodalen Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ berechnen?

Aufgabe 4. Für eine $\mathcal{T}$-stückweise Funktion $f \in H^1(\mathcal{T})$ definieren wir $F(v) := \int_\Omega fv\, dx$ und $F_h(v_h) := \sum_{T\in\mathcal{T}} |T| f_T v_h(s_T)$, wobei $f_T := |T|^{-1}\int_T f\, dx$ das Integralmittel von f auf einem Dreieck $T \in \mathcal{T}$ bezeichne und s_T den Schwerpunkt des Dreiecks. Zeigen Sie

$$\|F - F_h\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{T})^*} := \sup_{v_h\in\mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \frac{(F - F_h)(v_h)}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \leq C\,\|h\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei die Konstante $C > 0$ weder von Ω, $\mathcal{T}$ oder f abhängt. *Tipp:* Für welche Funktionen v ist die Quadraturformel $|T|v(s_T) = \int_T v\, dx$ exakt?