Michael Feischl, Michael Innerberger

Wintersemester 2019/20
8. November 2019

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 5

Aufgabe 1. Es sei X ein Hilbert-Raum und Y ein normierter Raum mit stetiger Inklusion $Y \subseteq X$. Für $h > 0$ sei S_h eine Familie endlich-dimensionaler Teilräume von X mit

$$\min_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_X \leq C\, h \|u\|_Y \quad \text{für alle } u \in Y \text{ und } h > 0,$$

wobei $C > 0$ eine unabhängige Konstante sei. Dann ist die Inklusion $Y \subseteq X$ sogar kompakt.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{X}_h$ ein endlich dimensionaler Raum. Seien $p_1, p_2 \colon \mathcal{X}_h \to \mathbb{R}$ Seminormen auf $\mathcal{X}_h$ mit

$$p_1(v) = 0 \implies p_2(v) = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_h.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$p_2(v) \leq C p_1(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_h.$$

Aufgabe 3. Es sei T ein nicht-degeneriertes Dreieck. Für einen Polynomgrad $p \geq 2$ gilt dann die inverse Abschätzung

$$\|D^2 v_h\|_{L^2(T)} \leq C\, h_T^{-1} \|v_h\|_{H^1(T)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{P}^p(T).$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von der Formregularität $\sigma(T)$ ab. *Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2 um die Abschätzung zuerst auf dem Referenzdreieck zu zeigen. Ein Skalierungsargument hilft dann weiter.*

Aufgabe 4. Konstruieren Sie eine sogenannte polynomiale Bubble-Funktion. Für ein Dreieck T erfüllt eine Element-Bubble-Funktion $b_T \colon T \to \mathbb{R}$ die Bedingungen $b_T \in [0, 1]$, $\|b_T\|_{L^\infty(T)} = 1$, $b_T \in \mathcal{P}^k(T)$ und $b_T|_{\partial T} = 0$. Was ist der minimale Polynomgrad k der für eine solche Konstruktion ausreicht.