Michael Feischl

Wintersemester 2019/20
5. November 2019

# Übungen zur Vorlesung
# Finite Elemente Methode

## Serie 4

**Aufgabe 1.** Gegeben sei ein nicht-entartetes Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $h_T/\rho_T$ genau dann gegen Unendlich strebt, wenn der minimale Innenwinkel von $T$ gegen Null geht. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\rho_T$ und dem Inkreisradius $r_T$ von $T$, d.h. dem Radius der größten Kugel, die noch in $T$ enthalten ist.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass eine Funktion $v \in H^{m+1}(T)$ auf einem Lipschitz-Gebiet $T \subset \mathbb{R}^d$ genau dann $D^{m+1}v = 0$ erfüllt, wenn $v \in \mathcal{P}^m(T)$ gilt. (Sie dürfen den Fall $m = 0$ voraussetzen.)

**Aufgabe 3.** Es sei $\Omega$ ein Lipschitz-Gebiet in $\mathbb{R}^d$. Zu einer Funktion $v \in H^1(\Omega)$ definieren wir die Funktion $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T})$ durch $v_{\mathcal{T}}|_T = (1/|T|)\int_T v\,dx$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass

$$\|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|h\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt. Die Konstante $C > 0$ hängt dabei weder von $\Omega$, noch von $v$ oder $\mathcal{T}$ ab.

**Aufgabe 4.** Auf der Homepage zur Lehrveranstaltung finden Sie einen Matlab-Code der Funktion `solveLaplace`, die für gegebenen Quellterm $f \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ eine $P1$-FEM zum reinen Dirichlet-Problem realisiert. Die Funktion berechnet den nodalen Koeffizientenvektor der Galerkin-Lösung $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Erweitern Sie die Funktion auf das Neumann Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \partial u/\partial n &= \phi \quad \text{auf } \Gamma, \\ \int_\Omega u\,dx &= 0 \end{aligned}$$

für zusätzliche Neumann-Daten $\phi \in C(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$. Wie in der gegebenen Funktion dürfen Sie alle auftretenden Integrale durch Mittelpunktsquadratur approximativ berechnen.