Michael Feischl Wintersemester 2019/20
24. Oktober 2019

Übungen zur Vorlesung
Finite Elemente Methode

Serie 3

Aufgabe 1. Seien X und Y Hilbert Räume mit stetiger Einbettung $X \subseteq Y$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $I : Y^* \to X^*, Iy^* := y^*|_X$ wohl-definiert, linear und stetig ist. Zeigen Sie, dass $I(Y^*) \subseteq X^*$ ein dichter Teilraum ist und falls $X \subseteq Y$ dicht bzgl. $\|\cdot\|_Y$ ist, die Abbildung I sogar injektiv ist.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω, und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle $v|_T \in C^1(\overline{T})$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass v genau dann in $H^1(\Omega)$ liegt, wenn $v \in C(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 3. Es sein $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω mit Knoten $\mathcal{K} = \{z_1, \dots, z_N\}$ und zugehörigen Hutfunktionen $\eta_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Es sei $u_h \in \mathcal{S}^1_*(\mathcal{T}) := \big\{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \mid \int_\Omega v_h \, dx = 0\big\}$ die Galerkin-Lösung zum Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \partial u/\partial n &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei die Daten $\int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma \phi \, ds = 0$ erfüllen. Wir definieren $A \in \mathbb{R}^{N\times N}_{\mathrm{sym}}$ und $b, c \in \mathbb{R}^N$ durch

$$A_{jk} = \int_\Omega \nabla\eta_j \cdot \nabla\eta_k \, dx, \quad b_k = \int_\Omega f\eta_k \, dx \quad \text{und} \quad c_k = \int_\Omega \eta_k \, dx \quad \text{für } j, k = 1, \dots, N.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} A & c \\ c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

regulär ist und dass mit der eindeutigen Lösung $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ auch $u_h = \sum_{j=1}^N x_j \eta_j$ gilt.

Aufgabe 4. Mit der Notation von Aufgabe 3 betrachten wir die Matrizen $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ und die rechte Seite $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^{N-1}$ definiert durch

$$\widetilde{A}_{jk} = \int_\Omega \nabla\eta_j \cdot \nabla\eta_k \, dx, \quad \text{und} \quad \widetilde{b}_k = \int_\Omega f\eta_k \, dx \quad \text{für } j, k = 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{A}$ positiv definit ist und dass $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$ eine eindeutige Lösung $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ besitzt. Zeigen Sie ferner, dass mit $\widetilde{u}_h := \sum_{j=1}^{N-1} \widetilde{x}_j \eta_j$ die Galerkin-Lösung $u_h \in \mathcal{S}^1_*(\mathcal{T})$ zum Neumann-Problem durch $u_h = \widetilde{u}_h - |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{u}_h \, dx$ gegeben ist.