Michael Feischl Wintersemester 2019/20
17. Oktober 2019

Übungen zur Vorlesung
Finite Elemente Methode

Serie 2

Aufgabe 1. Es bezeichne $\gamma \in L(H^1(\Omega); L^2(\Gamma))$ den Spuroperator. Auf dem Bildraum $H^{1/2}(\Gamma) := \operatorname{range}(\gamma)$ definiert man üblicherweise die Norm

$$\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf \big\{ \|\widehat{w}\|_{H^1(\Omega)} \,|\, \widehat{w} \in H^1(\Omega) \text{ mit } \gamma \widehat{w} = w \big\}.$$

Zeigen Sie, dass $H^{1/2}(\Gamma)$ versehen mit dieser Norm ein Hilbert-Raum ist und stetig in $L^2(\Gamma)$ einbettet.

Aufgabe 2. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass die Einbettung $\iota \colon C^{k+1}([0,1]) \to C^k([0,1])$ kompakt ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Räume seien dabei mit den kanonischen Normen $\|\cdot\|_{C^k} := \|\cdot\|_\infty + \sum_{j=1}^k \|\partial_x^j(\cdot)\|_\infty$ versehen.

Aufgabe 3. Wir betrachten das Laplace-Problem mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \partial u/\partial n &= \phi \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dabei seien Γ_D und Γ_N offene und disjunkte Teilmengen von Γ mit $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, und Γ_D besitze positives Oberflächenmaß. Leiten Sie die schwache Form

$$(\nabla u\,;\,\nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f\,;\,v)_{L^2(\Omega)} + (\phi\,;\,\gamma v)_{L^2(\Gamma_D)} \quad \text{für alle } v \in H^1_D(\Omega)$$

her, und zeigen Sie für $f \in L^2(\Omega)$ und $\phi \in L^2(\Gamma_D)$ die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung $u \in H^1_D(\Omega)$.

Aufgabe 4. In Aufgabe 3 seien die Daten $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\phi \in C(\Gamma_N)$ gegeben. Wir nehmen an, dass die schwache Lösung $u \in H^1_D(\Omega)$ zusätzlich in $C^2(\overline{\Omega})$ liegt. Zeigen Sie, dass u dann auch eine Lösung der starken Formulierung ist.
Hinweis. Verwenden Sie, dass es für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ glatte Funktionen $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $\big\{ y \in \mathbb{R}^d \,|\, v(y) \neq 0 \big\} = U(x,\varepsilon)$.