Michael Feischl, Michael Innerberger Wintersemester 2019/20
10. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 11

Aufgabe 1. Es seien X und Y Banach-Räume und $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. Zu $y^* \in Y^*$ sei $x \in X$ eine Lösung von $a(x, \cdot) = y^* \in Y^*$. Seien X_h und Y_h endlich-dimensionale Teilräume von X und Y. Wir nehmen an, dass die diskreten LBB-Bedingungen gelten, d.h.

- $\alpha_h := \inf\limits_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup\limits_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \dfrac{a(x_h, y_h)}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y} > 0,$
- $\forall y_h \in Y_h \setminus \{0\} \exists x_h \in X_h \quad a(x_h, y_h) \neq 0.$

Zeigen Sie, dass dann eine eindeutige Lösung $x_h \in X_h$ von $a(x_h, \cdot) = y^* \in Y_h^*$ existiert. Zeigen Sie ferner das Céa-Lemma in der Form

$$\|x - x_h\|_X \le \big(1 + \|a\|/\alpha_h\big) \min_{v_h \in X_h} \|x - v_h\|_X.$$

Dabei bezeichnet $\|a\| := \sup\limits_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \dfrac{a(x, y)}{\|x\|_X \|y\|_Y}$ die Stetigkeitskonstante von $a(\cdot, \cdot)$.

Aufgabe 2. Es seien X ein Hilbert-Raum, Y ein reflexiver Banachraum und $a : X \times X \to \mathbb{R}$ sowie $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen. Es seien X_h und Y_h endlichdimensionale Teilräume von X und Y. Zeigen Sie, dass die Berechnung einer diskreten Lösung $(x_h, y_h) \in X_h \times Y_h$ von

$$\begin{aligned} a(x_h, \cdot) \quad + \quad b(\cdot, y_h) &= x^* \in X_h^*, \\ b(x_h, \cdot) \qquad\qquad\qquad &= y^* \in Y_h^*, \end{aligned}$$

äquivalent ist zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer Matrix der Gestalt $M := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

$$M := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich sei A positiv definit auf dem Kern von B. Zeigen Sie, dass M genau dann regulär ist, wenn $\mathrm{range}(B) = \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein allgemeines Petrov-Galerkin Problem $T\colon X \to Y^*$, $Tx = y^* \in Y^*$ mit endlich dimensionalen Räumen X_h und Y_h und Galerkin Approximation $x_h \in X_h$. Geben Sie Bedingungen an unter denen die exakte sowie die Galerkin Lösung eindeutig sind und das Residuum äquivalent zum Fehler ist, d.h.

$$\|x - x_h\|_X \simeq \|y^* - Tx_h\|_{Y^*}.$$