Michael Feischl, Michael Innerberger Wintersemester 2019/20
2. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung
Numerik von partiellen Differentialgleichungen

Serie 10

Aufgabe 1. Es seien X, Y reelle Banachräume, von denen Y reflexiv ist, und $A \in L(X, Y^*)$. Dann ist A genau dann ein Isomorphismus, wenn die folgenden beiden Aussagen gelten:

- $\alpha := \inf_{x \in X\setminus\{0\}} \sup_{y \in Y\setminus\{0\}} \dfrac{(Ax)(y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0,$
- $\forall y \in Y\setminus\{0\} \exists x \in X \quad (Ax)(y) \neq 0.$

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine Basis des Sparse-Grid Raumes $\mathcal{X}_\ell := \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\boldsymbol{\ell}| \leq \ell}} \mathcal{Q}^1(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\ell}}^{\otimes})$ analog zu den Hutfunktionen.

Aufgabe 3. Es sei $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform auf reflexiven Banach-Räumen X und Y. Wir betrachten die Operatoren $A_1 \in L(X, Y^*)$ und $A_2 \in L(Y, X^*)$ definiert durch $A_1 x = b(x, \cdot)$ und $A_2 y = b(\cdot, y)$. Zeigen Sie, dass die Operatornormen $\|A_1\| = \|A_2\|$ erfüllen. Ferner ist A_1 genau dann ein Isomorphismus, wenn A_2 ein Isomorphismus ist. In diesem Fall gilt $\|A_1^{-1}\| = \|A_2^{-1}\|$.

Aufgabe 4. Implementieren Sie einen 1D Interpolationsoperator $I_h^2 \colon C^0([0,1]) \to \mathcal{S}^2(\mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T} = \{[0,h], [h,2h], \ldots, [1-h,h]\}$ für eine Intervallänge $h \in 1/\mathbb{N}$. Der Operator ist eindeutig definiert durch

$$\begin{aligned} (I_h^2 v)(kh) &= v(kh) \\ (I_h^2 v)\big((k+1/2)h\big) &= v\big((k+1/2)h\big) \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich geeignete Testbeispiele.