Michael Feischl

Wintersemester 2019/20
17. Oktober 2019

Übungen zur Vorlesung
Finite Elemente Methode

Serie 1

Aufgabe 1. Sei H ein reeller, separabler Hilbertraum. Gegeben sei eine Folge geschachtelter, endlich dimensionaler Teilräume $(\mathcal{X}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset H$, $\mathcal{X}_\ell \subset \mathcal{X}_{\ell+1}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$, konstruieren Sie ein Element $u \in H$, welches

$$\min_{v_\ell \in \mathcal{X}_\ell} \|u - v_\ell\|_H \geq C \mathrm{dim}(\mathcal{X}_\ell)^{-\varepsilon} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

erfüllt, wobei $C > 0$ eine von ℓ unabhängige Konstante sein soll.

Aufgabe 2. Es sei H ein reeller Hilbert-Raum und $A : H \to H^*$ ein Lipschitz-stetiger und monotoner Operator, d.h. es gilt für alle $u, v \in H$

$$\|Au - Av\|_{H^*} \leq L \,\|u - v\|_H \quad \text{und} \quad \langle Au - Av \,;\, u - v\rangle_{H^*\times H} \geq \alpha \,\|u - v\|_H^2$$

mit Konstanten $L, \alpha > 0$, die nur von A abhängen. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist.

Hinweis. Injektivität folgt aus der Monotonie von A. Um Surjektivität zu zeigen, betrachte man zu gegebenem $F \in H^*$ die Abbildung $\Phi(u) := u - C\, I_H^{-1}(Au - F)$ und zeige, dass Φ für geeignet gewähltes $C > 0$ eine Kontraktion auf H ist. Dabei bezeichnet $I_H : H \to H^*$, $I_H(u) := (u\,;\,\cdot)_H$ die Riesz-Abbildung.

Aufgabe 3. Man folgere aus Aufgabe 2 das Lemma von Lax-Milgram: Es sei $a(\cdot,\cdot)$ eine stetige und elliptische Bilinearform auf dem reellen Hilbert-Raum H, d.h. es gilt für alle $u, v \in H$

$$a(u, v) \leq M \,\|u\|_H \|v\|_H \quad \text{und} \quad a(u, u) \geq \alpha \,\|u\|_H^2.$$

Dann existiert zu $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit $a(u, \cdot) = F \in H^*$.

Aufgabe 4. Man formuliere das Galerkin-Verfahren im Kontext von Aufgabe 2, d.h. gesucht ist zu gegebener rechter Seite $F \in H^*$ die Lösung $u \in H$ von $Au = F \in H^*$. Man zeige, dass die Galerkin-Abbildung $\mathbb{G}_h : H \to X_h$ auf einen endlich-dimensionalen Teilraum $X_h \subset H$ eine wohldefinierte (aber i.a. nichtlineare) Projektion ist, d.h. $\mathbb{G}_h^2 = \mathbb{G}_h$. Man zeige das Céa-Lemma in der Form

$$\|u - \mathbb{G}_h u\|_H \leq C \min_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_H$$

mit einer Konstante $C > 0$, die nur von A abhängt.

Aufgabe 5. Wie berechnet man im Kontext von Aufgabe 2 eine Galerkin-Approximation $u_h = \mathbb{G}_h u \in X_h$ zur Lösung $u \in H$ von $Au = F \in H^*$? Mit $N = \dim X_h$, formuliere man ein (nichtlineares) Gleichungssystem in $\mathbb{R}^N$, das die eindeutige Lösung $u_h = \mathbb{G}_h u \in X_h$ charakterisiert. Welches Gleichungssystem muss man lösen, wenn A linear ist (d.h. im Kontext des Lemmas von Lax-Milgram)?