Serie 7

Besprechung: in der Woche vom 17.11.08

7.1. **a)** Formulieren Sie einen Algorithmus, der von einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine RQ-Zerlegung bestimmt, d.h. $A = RQ$ und $Q \in \mathcal{O}_n$ und R ist obere Dreiecksmatrix.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat *obere Hessenbergform*, wenn $A_{ij} = 0$ für $i > j+1$. Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der eine Matrix $Q \in \mathcal{O}_n$ erzeugt, so daß Q^TAQ obere Hessenbergform hat. *Hinweis:* Überlegen Sie sich eine Householdertransformation, die einen Vektor x auf ein $y \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ abbildet.

7.2. Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$. Setze $\widetilde{A} := (A, a) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$. Zeige: $\operatorname{cond}(\widetilde{A}) \geq \operatorname{cond}(A)$. *Hinweis:* Aufg. 6.8.

7.3. **(Programmieraufgabe)** Schreiben Sie ein MATLABprogramm `d = dividierte_differenzen(x,y)` welches die Koeffizienten d_j, $j = 0,\dots,n$ der Newtondarstellung $\pi(x) = \sum_{j=0}^n d_j\omega_j(x)$ bestimmt. Hier ist π das Polynom $\pi \in \mathcal{P}_n$ mit $\pi(x_i) = y_i$, $i = 0,\dots,n$. Sie dürfen annehmen, daß die Vektoren x und y die gleiche Länge haben. Schreiben Sie weiters ein Programm `y = horner(x,d,t)`, welches π mittels des Hornerschemas auswertet; hier ist t ein Vektor mit Auswertungsstellen und x der Vektor mit den Knoten.

Schreiben Sie das Programm $z =$ `serie7`(n), welches folgendes leistet:

a) Für $f_1(x) = 1 - \cos x$ und $f_2(x) = |x|$ werden die Interpolationspolynome π_1 und $\pi_2 \in \mathcal{P}_n$ für f_1 und f_2 auf $[-1,1]$ geplottet (verwenden Sie $t = [-1 : 0.1 : 1]$), wobei die Interpolationspunkte $x_i = -1 + ih$, $h = 2/n$ äquidistant sind.

b) Der Rückgabewert z der Funktion `serie7` ist eine Approximation an die Nullstelle der *monotonen* Funktion $x \mapsto f(x) = 2^x - 3$, die mittels *inverser Interpolation* bestimmt wird. Bei inverser Interpolation wird zu Wertepaaren (x_i, f_i), $i = 0,\dots,n$, mit $f_i = f(x_i)$ die inverse Funktion $f^{-1}(y)$ in den Punkten (f_i, x_i), $i = 0,\dots,n$, interpoliert und an der Stelle $y = 0$ ausgewertet. Bestimmen Sie z mittels inverser Interpolation von f zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$ und $x_3 = 2$.

7.4. (**schriftlich**) Seien $x_0,\dots,x_n$ paarweise verschiedene Knoten und f, g stetige Funktionen. Zeigen Sie:

a) $f[x_0,\dots,x_n]$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Knoten.

b) falls $f \in C^n(\mathbb{R})$, so existiert ein $\xi \in (\min_i x_i, \max_i x_i)$ mit $f[x_0,\dots,x_n] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$.
Hinweis: Satz von Rolle wie im Beweis von Satz 6.12 der VO.

c) Leibniz-Regel: $(fg)[x_0,\dots,x_n] = \sum_{i=0}^n f[x_0,\dots,x_i]g[x_i,\dots,x_n]$. *Hinweis:* vollständige Induktion

7.5. Seien $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Definiere die *Vandermonde*-Determinante

$$V_n(x_0,\dots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Zeigen Sie: $V_n(x_0,\dots,x_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$ *Hinweis:* Betrachten Sie $\pi : z \mapsto V_n(x_0,\dots,x_{n-1},z)$. Überlegen Sie sich, daß $\pi \in \mathcal{P}_n$, was die Nullstellen von π sind und was der führende Koeffizient von π ist.

7.6. Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = e^{\lambda x}$ auf dem Intervall $[a,b]$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_i^{(n)} \in [a,b]$, $i = 0,\dots,n$ paarweise verschieden und $p_n \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom von f zu den Knoten $x_i^{(n)}$, $i = 0,\dots,n$. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{C([a,b])} = 0$.

7.7. Sei $n = 2m$ eine gerade Zahl. Die Funktion $x \mapsto f(x) = e^{2x}$ soll auf dem Intervall $I = [0, 2]$ in äquidistanten Punkten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n = 2m$ mit $h = 2/n$ auf zwei Arten interpoliert werden: $p_n \in \mathcal{P}_n$ ist das Interpolationspolynom (welches die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert) und s_n ist eine stückweise quadratische Funktion definiert durch $s_n|_{[x_{2k}, x_{2k+2}]} \in \mathcal{P}_2$, $k = 0, \ldots, m-1$ und den Interpolationsbedingungen $s_n(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n = 2m$. Geben Sie eine (sinnvolle) obere Schranke für $\|f - p_n\|_{C([0,2])}$ und $\|f - s_n\|_{C([0,2])}$ an. Wie muß man in beiden Fällen n wählen, damit dieser Fehler $\leq 10^{-4}$ wird?