# Projekt 5: Asymptotische Formeln für Summen

**Motivation:** Die Aufgabe ist, Summen von der folgenden Form für große $n$ effizient auszuwerten:

$$S_1(n) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, \qquad S_\alpha(n) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha}$$

Für $\alpha > 1$ existiert $\lim_{n\to\infty} S_\alpha(n)$[1]; allerdings konvergiert (für $\alpha$ nahe bei 1) die Summe nur sehr langsam, so daß eine direkte Auswertung nicht realistisch ist.

**Projektziel:** Es wird eine Technik kennengelernt, mit der solche Summen durch "asymptotische Entwicklungen" approximiert werden. Z.B. werden wir für $S_1(n)$ eine Darstellung der Form

$$S_1(n) = \ln n + \sum_{k=0}^{m-1} a_k n^{-k} + R_m(n)$$

herleiten. Hier ist $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, die Koeffizienten $a_k$ werden unten angegeben, und der Rest $R_m$ ist für große $n$ klein in dem Sinn, daß

$$|R_m(n)| \le C_m n^{-m} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $C_m > 0$ eine Konstante ist, die von $m$ abhängt. Für große $n$ liefert bereits für kleine $m$ die Summe $\ln n + \sum_{k=0}^{m-1} a_k n^{-k}$ eine sehr genaue Approximation an $S_1(n)$.

**1.** Definieren Sie die Bernoullipolynome rekursiv durch $B_0 = 1$ und

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x), \qquad \int_0^1 B_k(x)\,dx = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

**a)** Zeigen Sie induktiv:

$$\|B_k\|_{C([0,1])} \le k! \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

**b)** Zeigen Sie, daß für $t \in (-1, 1)$ und $x \in [0, 1]$ gilt: [2] [3]

$$G(t, x) := \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}. \tag{3}$$

*Hinweis:* Überlegen Sie sich mittels geeigneter Sätze aus der Analysis über die gliedweise Differenzierbarkeit von (unendlichen) Summen von Funktionen, daß nach (2) die $G$ definierende Summe für jedes feste $t$ gliedweise nach $x$ differenziert werden darf. Zeigen Sie $tG(t, x) = \partial_x G(t, x)$. Beachten Sie weiter die "Herleitung" in der Fußnote[2] und bemerken Sie, daß $G(t, \cdot)$ auch gliedweise integriert werden darf.

**c)** Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Bernoullipolynome:

1. $B_k(1 - x) = (-1)^k B_k(x) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$
   *Hinweis:* betrachte $G(-t, 1 - x)$; außerdem reicht es, $x \in (0, 1)$ zu betrachten (warum?)
2. $B_k(1) = B_k(0)$ für alle *geraden* $k$
3. $B_k(0) = B_k(1) = 0$ für alle *ungeraden* $k$

[1] der Wert ist gerade $\zeta(\alpha)$ mit der Riemannschen $\zeta$-Funktion

[2] die Funktion $G$ heißt die *erzeugende Funktion* für die Bernoullipolynome. Die erzeugende Funktion kann auch "hergeleitet" werden: setzt man $G(x, t) := \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)t^k/k!$ und geht formal vor, so ergibt sich aus (1): $\partial_x G = tG$. Diese Differentialgleichung kann gelöst werden: $G(x, t) = G(0, t)e^{xt}$; aus $\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0$ für $k \ge 1$ und $B_0 = 1$ "folgt" dann $\int_0^1 G(x, t)\,dx = 1$, d.h., es ergibt sich die in (3) angegebene Funktion.

[3] Mit den Techniken aus der VO Funktionentheorie werden Sie sehen, daß die Darstellung tatsächlich nicht nur für $t \in (-1, 1)$ und $x \in [0, 1]$ gilt sondern für $(t, x) \in \mathbb{C}^2$ mit $|t| < 2\pi$.

Weiterhin gilt auf dem Intervall $I = [0,1]$:

1. für $k \geq 1$ sind 0 und 1 die einzigen Nullstellen von $x \mapsto B_{2k}(x) - B_{2k}(0)$ in $I$
2. für $k \geq 1$ hat $x \mapsto B_{2k}(x)$ höchstens 2 Nullstellen in $I$
3. die einzigen Nullstellen von $x \mapsto B_{2k+1}(x)$ (für $k \geq 1$) in $I$ sind 0, 1/2, 1
4. $|B_{2k}(x)| \leq |B_{2k}(0)|$ für $x \in I$ und $|B_{2k}(x) - B_{2k}(0)| \leq (2 - 2^{1-2k})|B_{2k}(0)|$

Hinweise: Versuchen Sie Aussagen 1–3 gemeinsam durch Induktion zu zeigen. Für 4 überlegen Sie sich, wo $B_{2k}$ ein Maximum annehmen kann, und betrachten Sie $G(t,0) + G(t,1/2) = 2G(t/2,0)$.

Die Funktionswerte $B_k(0)$ heißen Bernoullizahlen; es gilt:

$$B_0(0) = 1, \quad B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_4(0) = -\frac{1}{30}, \quad B_6(0) = \frac{1}{42}, \quad B_8(0) = -\frac{1}{30}.$$

**2.** (Euler-McLaurin'sche Summenformel) Zeigen Sie für beliebige $a$, $n$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a < n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=a}^{n} f(j) &= \int_a^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(f(a) + f(n)\right) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_m(n), \quad (4) \\ R_m(n) &= \frac{B_{2m}(0)}{(2m)!}\left(f^{(2m-1)}(n) - f^{(2m-1)}(a)\right) - \int_a^n \frac{B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\,dx \\ &= \int_a^n \frac{B_{2m}(0) - B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\,dx \end{aligned}$$

**3.** **a)** Zeigen Sie: Für $\alpha > 1$ hat $S_\alpha(n)$ eine asymptotische Entwicklung der folgenden Form: Es existiert eine Folge $(a_\nu)_{\nu=-1}^{\infty}$ so daß für jedes $m' \in \mathbb{N}_0$

$$S_\alpha(n) = a_{-1} + \sum_{\nu=0}^{m'} a_\nu n^{1-\alpha-\nu} + \widehat{R}_{m'}(n), \quad (5)$$

geschrieben werden kann, wobei der Rest $\widehat{R}_{m'}(n)$ eine Abschätzung der Form

$$|\widehat{R}_{m'}(n)| \leq C_{m'} n^{1-\alpha-(m'+1)} \qquad \forall n$$

erfüllt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Euler-McLaurinschen Summenformel für ein kleines $m$, schreiben Sie das dortige Restglied als $\int_1^n = \int_1^\infty - \int_n^\infty$ und integrieren Sie den zweiten Term hinreichend oft partiell.

**b)** Geben Sie $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ an—der Bestimmung von $a_{-1}$ ist der nächste Aufgabenteil gewidmet!

**c)** Offensichtlich ist $a_{-1} = \lim_{n\to\infty} S_\alpha(n)$. Bestimmen Sie für $\alpha = 1.01$ diesen Wert mit einem absoluten Fehler von $10^{-12}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Wählen Sie eine Kombination von $n$ und $m'$, so daß Sie aus der asymptotischen Entwicklung (5) durch direkte Berechnung von $S_\alpha(n)$ (mit Matlab oder Maple) und Abschätzung des Restgliedes $\widehat{R}_{m'}(n)$ den gesuchten Wert $a_{-1}$ mit der gewünschten Genauigkeit berechnen können. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert (der exakte Wert ist `zeta`($\alpha$) (Matlab) bzw. `Zeta`($\alpha$) (Maple). Schätzen Sie ab, für welche $n$ Sie mit der "direkten" Methode $|\lim_{\nu\to\infty} S_\alpha(\nu) - S_\alpha(n)| \leq 10^{-12}$ garantieren können.

**4.** Betrachten Sie nun die Auswertung von

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

für große $n$. Zeigen Sie: existiert eine Konstante $\gamma$ (die Euler-Mascheronische Zahl), so daß für jedes $m' \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m'-1} \frac{B_{2k}(0)}{2k} \frac{1}{n^{2k}} + \widehat{R}_{m'}(n),$$

wobei der Rest $\widehat{R}_{m'}(n)$ einer Abschätzung der Form

$$\left| \widehat{R}_{m'}(n) \right| \le \frac{|B_{2m'}(0)|}{(2m')!} (2 - 2^{1-2m'}) \frac{(2m')!}{n^{2m'}}$$

genügt. Sehr gute Werte für $\gamma \approx 0.577$ ergeben sich wieder durch konkrete Wahl von $m'$ und $n$ (z.B. $m' = 2$, $n = 1000$ liefert eine Approximation an $\gamma$ mit einem Fehler $\le 10^{-14}$).