Normen

Definition 1. [Norm] Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Norm, wenn:

(i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ (Positivität)

(ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^n$ (Homogenität)

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. (Dreiecksungleichung)

Beispiele:

1. die ℓ_1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
2. die ℓ_∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
3. die ℓ_p-Norm $(1 \leq p < \infty)$: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

Matrixnormen

Definition 2. [Matrixnorm] Seien $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^m}$ Normen auf $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$. Auf dem (Vektorraum) der $m \times n$ Matrizen ist die (induzierte) Matrixnorm durch

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{K}^n} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^m}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}}$$

definiert.

Eigenschaften:

1. Norm: $A \mapsto \|A\|$ ist eine Norm
2. Submultiplikativität: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times \mu}$
3. $\|I\| = 1$ ($I =$ Identitätsmatrix)
4. $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$ (falls A regulär)