

QR-Algorithmus ohne und mit Shift

QR-Iteration ohne Shift

$$A \quad := \quad QR$$

$$A \quad := \quad RQ$$

QR-Iteration mit single Shift

$$\sigma \quad := \quad A_{nn} \quad \% \text{ wähle Shift-Param.}$$

$$A - \sigma I \quad := \quad QR$$

$$A \quad := \quad RQ + \sigma I$$

prüfe, ob A zerfällt. Falls ja:
wende QR-Alg. mit Shift
auf oberen Teilblock an.

Wir erwarten:

1. **lineare Konvergenz** beim QR-Algorithmus **ohne** Shift
(genauer: wenn die EW die Bedingung $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ erfüllen).
2. **schnelle (asymptotisch quadratische) Konvergenz** beim QR-Algorithm. **mit** Shift

Beispiel

Ausgangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 3.5488 & 15.593 & 8.5775 & -4.0123 \\ 2.3595 & 24.524 & 14.596 & -5.8157 \\ 0.0899 & 27.599 & 21.438 & -5.8415 \\ 1.9227 & 55.667 & 39.717 & -10.558 \end{pmatrix},$

Hessenbergform $Q^T A Q = H = \begin{pmatrix} 3.5488 & -9.8025 & 4.1046 & -14.8282 \\ -3.0450 & 36.5229 & -8.3593 & 55.8301 \\ 0 & 25.8343 & -2.5900 & 41.15901 \\ 0 & 0 & -0.5372 & 1.4710 \end{pmatrix}$

Eigenwerte (MATLAB):

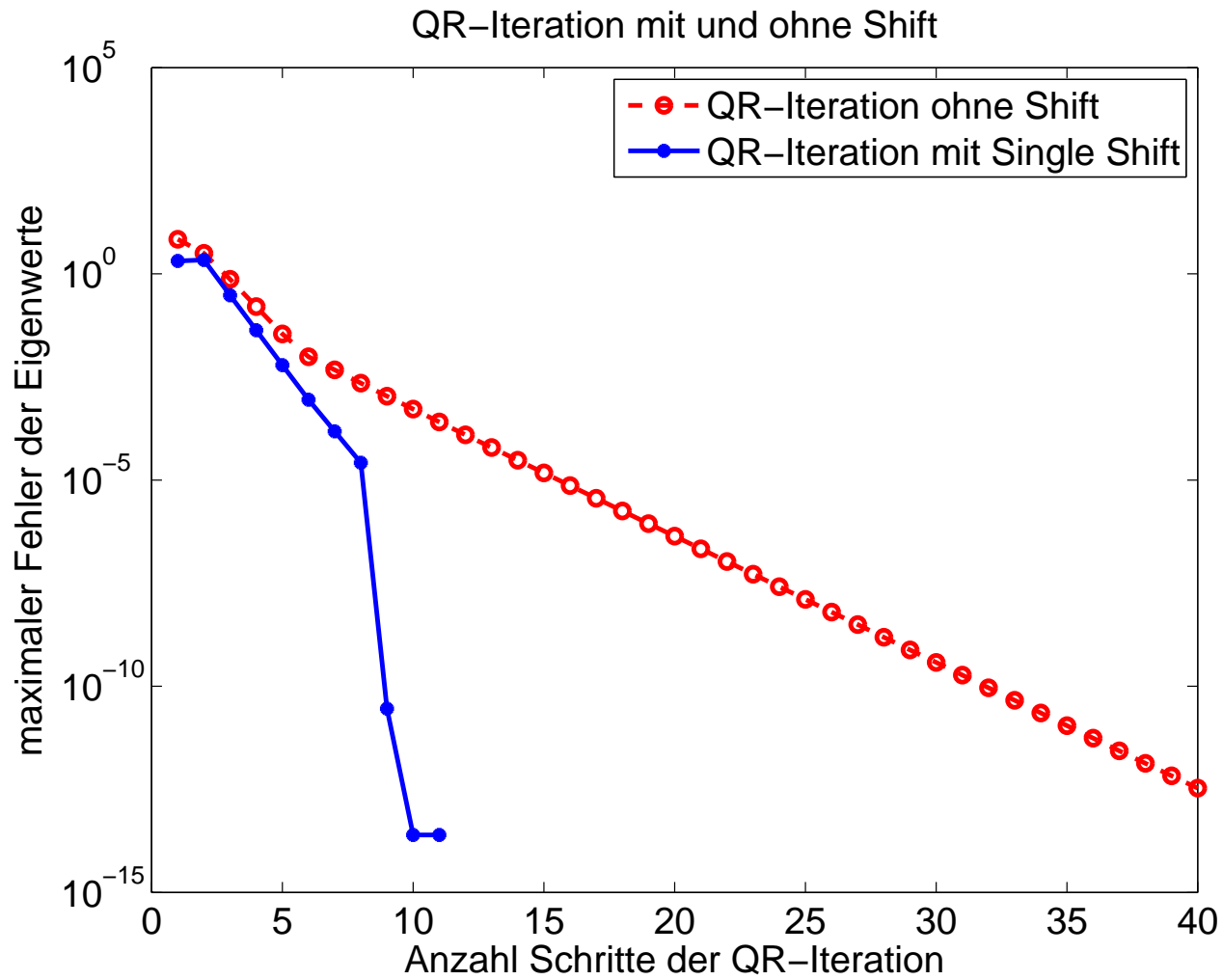
29.96642406212449

5.99902388398071

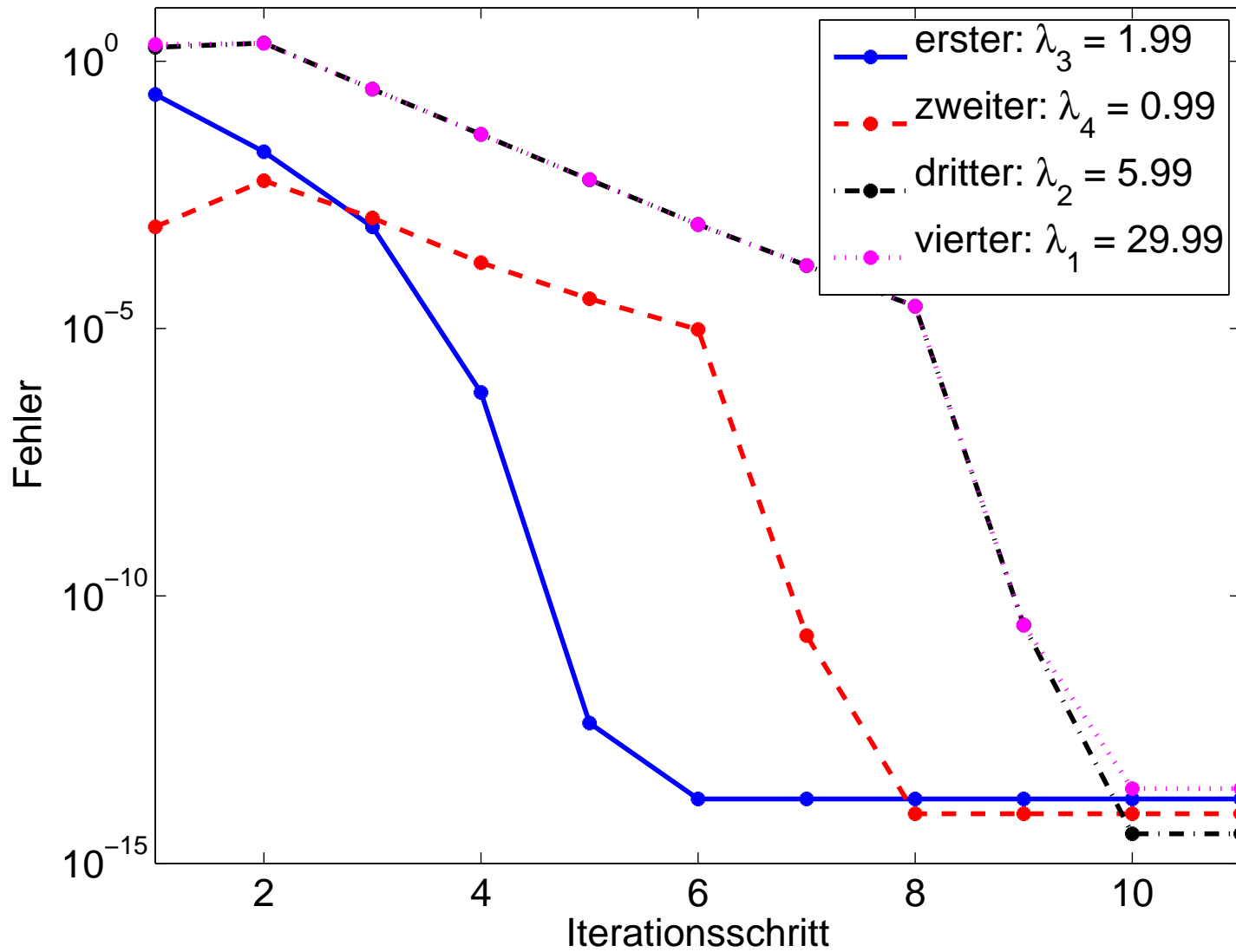
1.99941121279189

0.98794084110292

Vergleich QR mit und ohne Shift



Konvergenzgeschichte aller EW bei QR mit Shift



asymptot. quadr. Konvergenz eines EW und gleichzeitig lineare Konvergenz der übrigen EW

QR-Iteration ohne Shift

$$A_1 = \begin{pmatrix} 23.9 & -6.6 & 39.2 & 34.5 \\ -\mathbf{21.8} & 12.8 & -42.1 & -38.6 \\ 0 & \mathbf{1.0} & 0.63 & -0.6 \\ 0 & 0 & \mathbf{0.72} & 1.6 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 29.99 & 32.66 & 71.6 & -10.6 \\ -\mathbf{2.1}_{-2} & 6.0 & 1.7 & -0.44 \\ 0 & \mathbf{1.5}_{-2} & 2.02 & -0.21 \\ 0 & 0 & \mathbf{6.4}_{-2} & 0.97 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 29.97 & 32.9 & 70.68 & 14.9 \\ -\mathbf{6.6}_{-6} & 6.0 & 1.79 & 0.56 \\ 0 & \mathbf{6.2}_{-5} & 2.0 & 0.27 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1.8}_{-3} & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 29.9 & 32.9 & 70.65 & -15.05 \\ -\mathbf{2.1}_{-9} & 6.0 & 1.79 & -0.56 \\ 0 & \mathbf{2.6}_{-7} & 2.0 & -0.28 \\ 0 & 0 & \mathbf{5.3}_{-5} & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 29.97 & 32.9 & 70.65 & 15.1 \\ -\mathbf{6.8}_{-13} & 6.0 & 1.79 & 0.56 \\ 0 & \mathbf{1.1}_{-9} & 2.0 & 0.28 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1.6}_{-6} & 0.99 \end{pmatrix}$$

QR-Iteration mit Shift und Deflation

$$A_1 = \begin{pmatrix} 32.0 & 1.66 & -28.9 & 49.9 \\ -23.4 & 4.17 & 23.6 & -42.1 \\ 0 & -0.65 & 0.99 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.33 & 1.76 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 32.1 & 30.8 & 8.1 & -71.9 \\ -1.8 & 3.8 & -0.05 & 3.2 \\ 0 & 0.14 & 0.98 & 0.085 \\ 0 & 0 & -0.16 & 2.02 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 30.3 & 32.7 & -4.17 & 72.15 \\ -0.2 & 5.70 & 0.08 & 1.21 \\ 0 & -4.0_{-2} & 0.99 & -0.29 \\ 0 & 0 & 2.98_{-3} & 2.0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 30.1 & 32.9 & -4.06 & -72.12 \\ -0.03 & 6.0 & 0.089 & -1.78 \\ 0 & 1.01_{-2} & 0.99 & 0.27 \\ 0 & 0 & -2.3_{-6} & 2.0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.9 & -4.14 & 72.12 \\ -4.5_{-3} & 6.0 & 0.07 & 1.86 \\ 0 & -2.56_{-3} & 0.99 & -0.28 \\ 0 & 0 & 1.5_{-12} & 2.0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.9 & -4.12 & -72.12 \\ -6.4_{-4} & 6.0 & 0.07 & -1.87 \\ 0 & 6.5_{-4} & 0.99 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.9 & 4.12 \\ -1.1_{-5} & 6.0 & -0.07 \\ 0 & 1.2_{-9} & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.9 & -4.12 \\ -2.0_{-5} & 6.0 & 0.073 \\ 0 & 0.0 & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 30.0 & -32.9 \\ 2.1_{-11} & 6.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.9 \\ -2.5_{-23} & 6.0 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksgestalt R gerundet:

$$R = \begin{pmatrix} 30.0 & 32.94 & -4.12 & -72.1 \\ 0.0 & 6.0 & 0.073 & -1.87 \\ 0 & 0.0 & 0.99 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

Vergleich: (maximaler Fehler der EW):
 kein Shift: $\approx 10^{-5}$ nach 20 Schritten
 Single Shift: $\approx 10^{-15}$ nach 10 Schritten