zu Abbruchkriterien

Notation/Voraussetzungen:

- A diagonalisierbar mit $T^{-1}AT = D$.
- $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$
- Rayleighquotient $R(x) = x^\top Ax = \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}$.
- $r := Ax - R(x)x$.

Eigenwertfehlerabschätzungen:

- $\min_i |\lambda_i - R(x)| \leq \mathrm{cond}_2(T)\|r\|_2$
- $\min_i |\lambda_i - R(x)| \leq \|r\|_2$ falls A symmetrisch
- $\min_i |\lambda_i - R(x)| \leq C\|r\|_2^2$ falls A symmetrisch und $R(x)$ hinreichend nahe an einem einfachen EW

Beispiele (Standard-Vektoriteration); (Startvektor: $x_0 = (1,1,1)^\top$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

m	$\lvert\lambda_{max} - R(x_m)\rvert$	$\frac{\lvert\lambda_{max} - R(x_m)\rvert}{\lVert r_m\rVert_2^2}$
1	5.78	2.5_{-1}
2	4.6_{-2}	1.09_{-1}
3	3.6_{-4}	1.08_{-1}
4	2.8_{-6}	1.08_{-1}
5	2.1_{-8}	1.08_{-1}
6	1.7_{-10}	1.08_{-1}
7	1.3_{-12}	1.08_{-1}
8	1.0_{-14}	0.9_{-1}

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(T) \approx 26.5.$$

m	$\lvert\lambda_{max} - R(x_m)\rvert$	$\frac{\lvert\lambda_{max} - R(x_m)\rvert}{\lVert r_m\rVert_2}$
1	2.0	1.1
10	5.3_{-2}	8.2
20	2.2_{-1}	10.8
30	1.5_{-2}	11.6
40	4.6_{-3}	11.8
50	1.4_{-3}	11.9
60	4.3_{-4}	11.9

Vektoriteration für EWP mit nicht (betragsmäßig) separierten EW

$$A_3 = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$c = \cos(\pi/3), \quad s = \sin(\pi/3),$$

$$\lambda = 0.5 \pm 0.5\sqrt{3}\,\mathbf{i}, \quad \lambda = 0.1$$

l	$\widetilde{\lambda}_l$	$\|Ax_l - \widetilde{\lambda}_l x_l\|_2$
0	0.36666666666667	0.73181661333667
1	0.49800995024876	0.86432674164283
2	0.49998000099995	0.86600837240466
3	0.49999980000010	0.86602523346615
4	0.49999999800000	0.86602540208126
5	0.49999999998000	0.86602540376741
6	0.49999999999980	0.86602540378427
7	0.50000000000000	0.86602540378444
8	0.50000000000000	0.86602540378444
9	0.50000000000000	0.86602540378444
10	0.50000000000000	0.86602540378444

$$x_0 = (1, 1, 1)^\top / \sqrt{3}$$