Vektoriteration

Iterationsvorschrift:

repeat{

$$x_{l+1} := \frac{Ax_l}{\|Ax_l\|_2}$$

$$\widetilde{\lambda}_{l+1} = x_{l+1}^\top A x_{l+1}$$

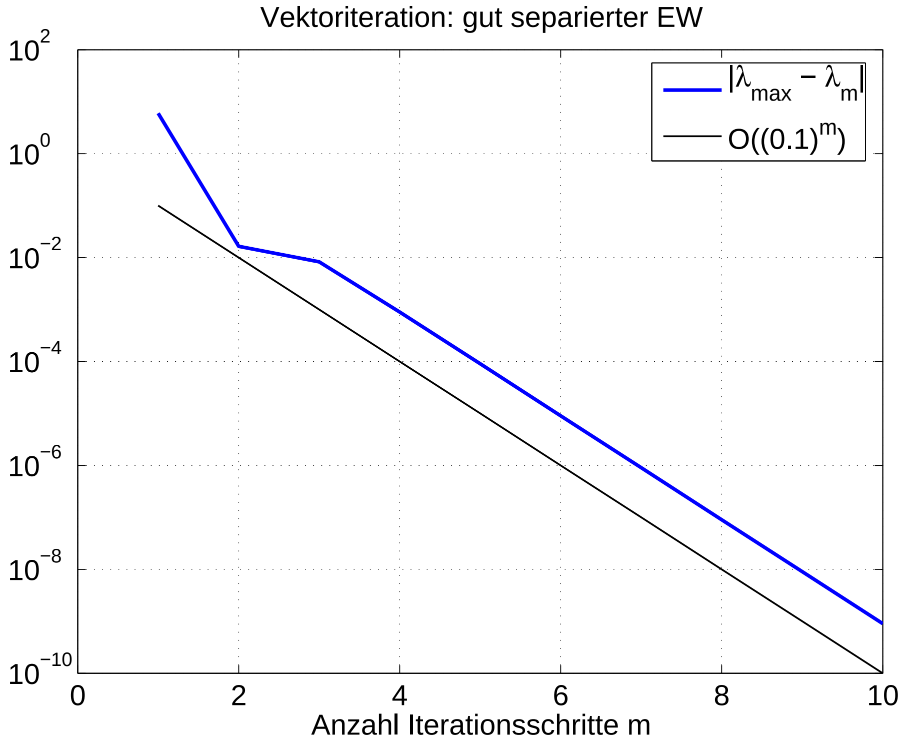
$$l := l + 1$$

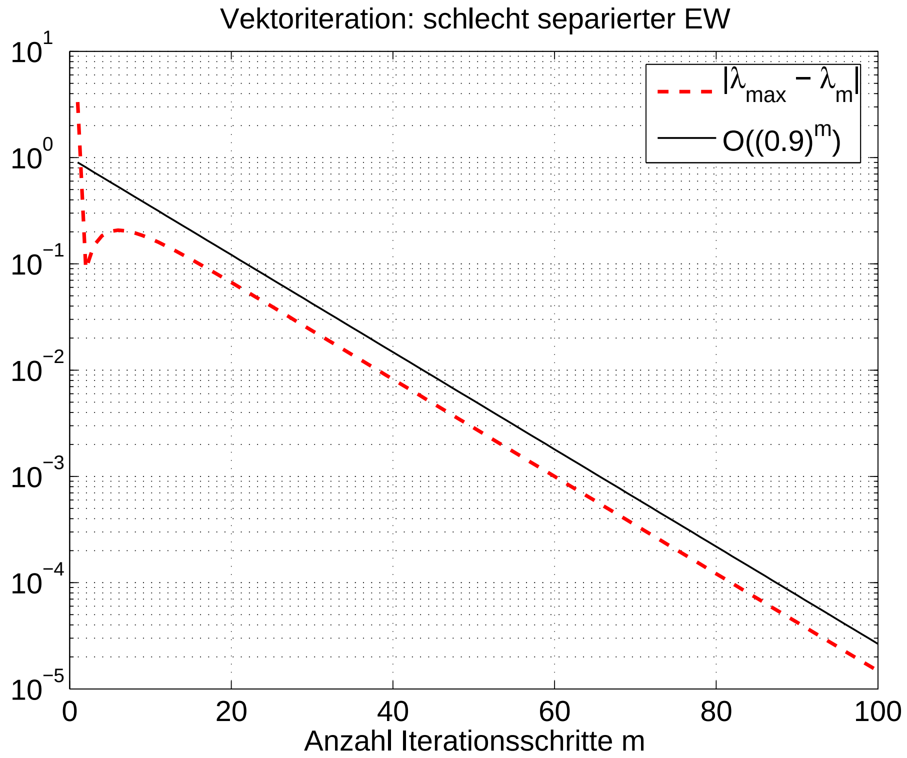
}**until** genau genug

Beispiel 1: gut und schlecht separierte EW; $\quad x_0 = (1,1,1)^\top$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 0.1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 0, \quad \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 0.9$$





Beispiel 2: nicht (betragsmäßig) separierte EW; $x_0 = (1,1,1)^\top$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$c = \cos(\pi/3), \quad s = \sin(\pi/3),$$

$$\lambda = 0.5 \pm 0.5\sqrt{3}\,\mathbf{i}, \quad \lambda = 0.1$$

Iterationszahl l	$\widetilde{\lambda}_l$
1	0.36666666666667
2	0.49800995024876
3	0.49998000099995
4	0.49999980000010
5	0.49999999800000
6	0.49999999998000
7	0.49999999999980
8	0.50000000000000
9	0.50000000000000
10	0.50000000000000
11	0.50000000000000

Konvergenz gegen komplexe EW kann natürlich für reelle Matrizen und reelle Startwerte nicht erwartet werden...

Beispiel 2: nicht (betragsmäßig) separierte EW;

$$x_0 = (1 + 7\mathbf{i}, 2 + 11\mathbf{i}, 3 + 17\mathbf{i})^\top$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$c = \cos(\pi/3), \quad s = \sin(\pi/3)$$

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \pm 0.5\sqrt{3}\,\mathbf{i} \approx 0.5 \pm 0.866\mathbf{i}$$

$$\lambda_3 = 0.1$$

l	$\widetilde{\lambda}_l$
1	0.247991543340381 + 0.010985523092403i
2	0.493302618271716 + 0.029195147896992i
3	0.499931897311201 + 0.029687244244732i
4	0.499999318858303 + 0.029692248996665i
5	0.499999993188572 + 0.029692299052706i
6	0.499999999931886 + 0.029692299553267i
7	0.499999999999319 + 0.029692299558273i
8	0.499999999999993 + 0.029692299558323i
9	0.500000000000000 + 0.029692299558324i
10	0.500000000000000 + 0.029692299558324i
11	0.500000000000000 + 0.029692299558324i

Inverse Iteration und Rayleighquotienteniteration

Inverse Iteration mit Shift λ:

$$\widetilde{\lambda}_l = x_l^\top A x_l$$

$$\widetilde{x}_{l+1} := (A - \lambda)^{-1} x_l$$

$$x_{l+1} := \frac{\widetilde{x}_{l+1}}{\|\widetilde{x}_{l+1}\|_2}$$

Rayleighquotientenmethode

$$\widetilde{\lambda}_l = x_l^\top A x_l$$

$$\widetilde{x}_{l+1} := (A - \widetilde{\lambda}_l)^{-1} x_l$$

$$x_{l+1} := \frac{\widetilde{x}_{l+1}}{\|\widetilde{x}_{l+1}\|_2}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 \approx 10.6180, \quad \lambda_2 \approx 8.3820, \quad \lambda_3 = 0,$$

$$x_0 = (1, -1, 0)^\top \rightsquigarrow \text{Rayleighquotienteniteration konvergiert gegen } \lambda_2$$