Vergleich von Φ_1 und Φ_2

Iterationsverfahren: $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2 - e^x}, \qquad \Phi_2(x) = \ln(2 - x^2),$$

Startwert: $x_0 = 0.5$

n	$x_{n+1} = \Phi_1(x_n)$	$x_{n+1} = \Phi_2(x_n)$
0	0.592687716508341	0.559615787935423
1	0.437214425050104	0.522851128605001
2	0.672020792350124	0.546169619063046
3	0.204473907097276	0.531627015197373
4	0.879272743474883	0.540795632739194
5	Abbruch $(2 - e^{0.87} < 0)$	0.535053787215218
6		0.538664955236433
7		0.536399837485597
8		0.537823020842571
9		0.536929765486145
$\vdots$		$\vdots$
∞		0.537274449173857
	$\lvert\Phi_1'(x^*)\rvert \approx 1.59 > 1$	$\lvert\Phi_2'(x^*)\rvert \approx 0.63 < 1$

Newtonverfahren zur Bestimmung der NS von $F(x) = 2 - x^2 - e^x$

$$x_{n+1} = \Phi_{Newton}(x_n), \qquad \Phi_{Newton}(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{2 - x^2 - e^x}{-2x - e^x}$$

Startwert: $x_0 = 0.5$

n	$x_{n+1} = \Phi_2(x_n)$	$\lvert x^* - x_{n+1}\rvert$	$\frac{\lvert x^* - x_{n+1}\rvert}{\lvert x^* - x_n\rvert^{1}}$	$x_{n+1} = \Phi_{Newton}(x_n)$	$\lvert x^* - x_{n+1}\rvert$	$\frac{\lvert x^* - x_{n+1}\rvert}{\lvert x^* - x_n\rvert^{2}}$
0	0.55961578793	2.23e-02		0.538236839194900	9.62e-04	
1	0.52285112860	1.44e-02	6.46e-01	0.537275065500959	6.16e-07	6.65e-01
2	0.54616961906	8.90e-03	6.17e-01	0.537274449174110	2.53e-13	6.65e-01
3	0.53162701519	5.65e-03	6.35e-01	0.537274449173857	Maschinen-	
4	0.54079563273	3.52e-03	6.24e-01	0.537274449173857	genauigkeit	
5	0.53505378721	2.22e-03	6.31e-01	0.537274449173857		
6	0.53866495523	1.39e-03	6.26e-01	0.537274449173857		
7	0.53639983748	8.75e-04	6.29e-01	0.537274449173857		
8	0.53782302084	5.49e-04	6.27e-01	0.537274449173857		
9	0.53692976548	3.45e-04	6.28e-01	0.537274449173857		

Newtonverfahren in $\mathbb{R}^d$

$$\underline{x}_{n+1} = \Phi_{Newton}(\underline{x}_n), \qquad \Phi_{Newton}(\underline{x}) = \underline{x} - \left(F'(\underline{x})\right)^{-1} F(\underline{x})$$

Beispiel: Finde Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}^2$ von

$$F(\underline{x}) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^4 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

Bestimme $F'(\underline{x})$:

$$F'(\underline{x}) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1(\underline{x}) & \partial_{x_2} F_1(\underline{x}) \\ \partial_{x_1} F_2(\underline{x}) & \partial_{x_2} F_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -4x_2^3 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Newtonverfahren in $\mathbb{R}^d$, Fortsetzung

1. Für $\underline{x}_n = (x_1, x_2)^\top$ löse für $\underline{\delta} \in \mathbb{R}^2$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F'(\underline{x}_n)\underline{\delta} &= -F(\underline{x}_n) \\ \begin{pmatrix} 2x_1 & -4x_2^3 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix} \underline{\delta} &= -\begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^4 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. $\underline{x}_{n+1} := \underline{x}_n + \delta$

n	$\underline{x}_n$ (Startwert: $x_0 = (0.5, 0.5)^\top$)	$\lVert \underline{x}^* - \underline{x}_n \rVert_2$
0	$(0.7,\ 0.7)^\top$	4.24e-01
1	$(0.87850000000000,\ 1.064285714285714)^\top$	1.37e-01
2	$(1.01815943274188,\ 1.00914882463936)^\top$	2.03e-02
3	$(1.00023355916300,\ 1.00015913936075)^\top$	2.83e-04
4	$(1.00000000583852,\ 1.00000002726552)^\top$	2.79e-08
5	$(0.99999999999998,\ 1.000000000000000)^\top$	2.11e-15
6	$(1,\ 1)^\top$	