

# adaptive Quadratur

Warum adaptive Quadratur? Anforderungen an moderne Quadraturverfahren?

- **Zuverlässigkeit:** der Algorithmus liefert ein Ergebnis, das bis auf eine vorgegebene Toleranz korrekt ist
- **Effizienz:** möglichst geringer Aufwand (sinnvolles Aufwandsmaß: z.B. Anzahl Funktionsauswertungen)
- **Anwendbarkeit:** Verfahren soll für eine große Klasse von Integranden funktionieren. Insbesondere sollte der Algorithmus “selbst” herausfinden, wo der Integrand glatt ist.

**Aufgabe:** zu geg.  $f$  und Toleranz  $\tau > 0$  finde eine Zerlegung  $\Delta$  von  $[a, b]$ , s.d.

1. 
$$\left| \int_a^b f - Q_{\Delta}^{Trapez}(f) \right| \leq \tau$$

2.  $\Delta$  hat möglichst wenig Knoten.

# adaptive Quadratur: rekursive Rohfassung

Trapezregel: 
$$T([a, b]) := \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b))$$

- 1: **adapt**(f,a,b, $\tau$ )
- 2: % bestimmt  $\int_a^b f(x) dx$  mit vorgeschriebener Genauigkeit  $\tau$
- 3: **if**  $|\int_a^b (f) dx - T([a, b])| \leq \tau$  { % gewünschte Genauigkeit erreicht :)
- 4:     **return** (T([a,b])) }
- 5: **else** {
- 6: % gewünschte Genauigkeit nicht erreicht  $\rightarrow$  unterteile  $[a, b]$  in  $[a, m]$  und  $[m, b]$
- 7:  $m := (a + b)/2$
- 8:  $I := \mathbf{adapt}(f, a, m, \tau/2) + \mathbf{adapt}(f, m, b, \tau/2)$
- 9: **return**(I) }

# adaptive Quadratur I

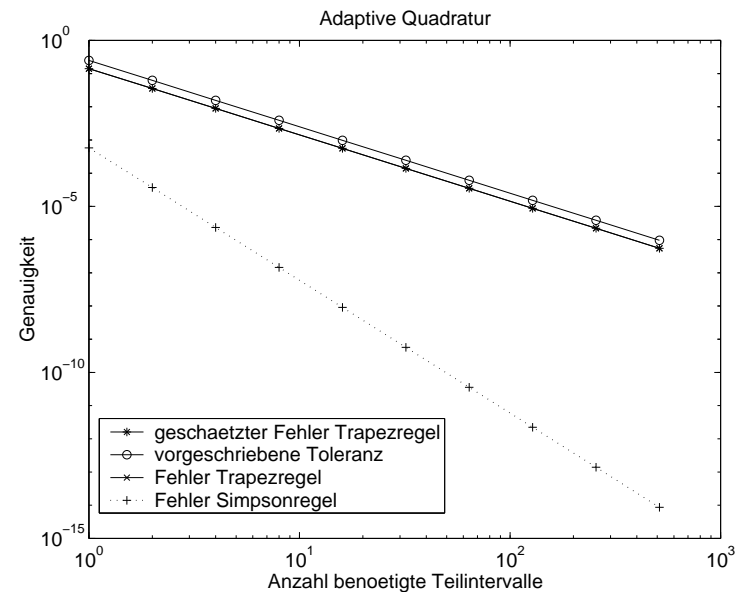
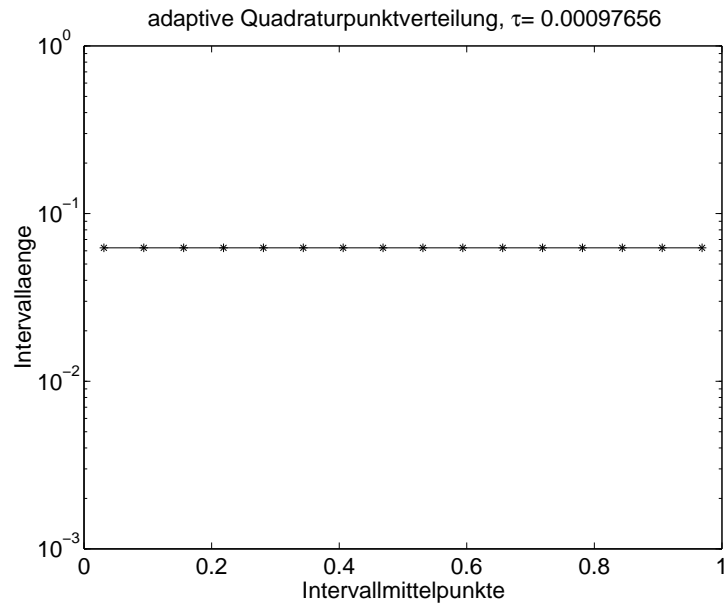
Simpsonregel:  $S([a, b]) := \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(m) + f(b))$ ,  $m = \frac{a+b}{2}$

- 1: **adapt**(f,a,b, $\tau$ )
- 2: % bestimmt  $\int_a^b f(x) dx$  mit vorgeschriebener Genauigkeit  $\tau$
- 3: %  $h_{min}$  = minimale Intervalllänge ;  $\rho \in (0, 1)$  Sicherheitsfaktor
- 4: **if**  $(b - a) \leq h_{min}$  **return**(T([a, b])) %erzwungener Abbruch!
- 5: **if**  $|S([a, b]) - T([a, b])| \leq \rho\tau$  { gewünschte Genauigkeit erreicht :)
- 6:     **return** (T([a,b])) }
- 7: **else** {
- 8:     %gewünschte Genauigkeit nicht erreicht  $\rightarrow$  unterteile  $[a, b]$  in  $[a, m]$  und  $[m, b]$
- 9:      $m := (a + b)/2$
- 10:      $I := \mathbf{adapt}(f, a, m, \tau/2) + \mathbf{adapt}(f, m, b, \tau/2)$
- 11:     **return**(I) }

## adaptive Quadratur II (mutiger!)

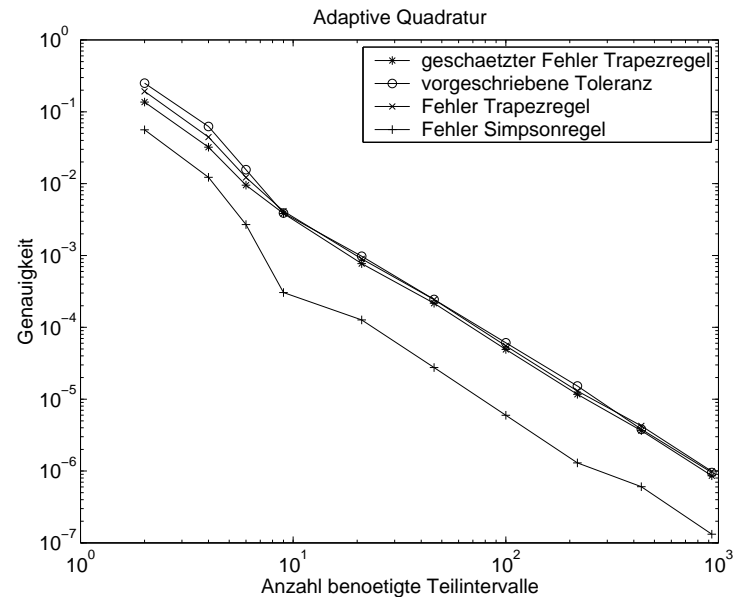
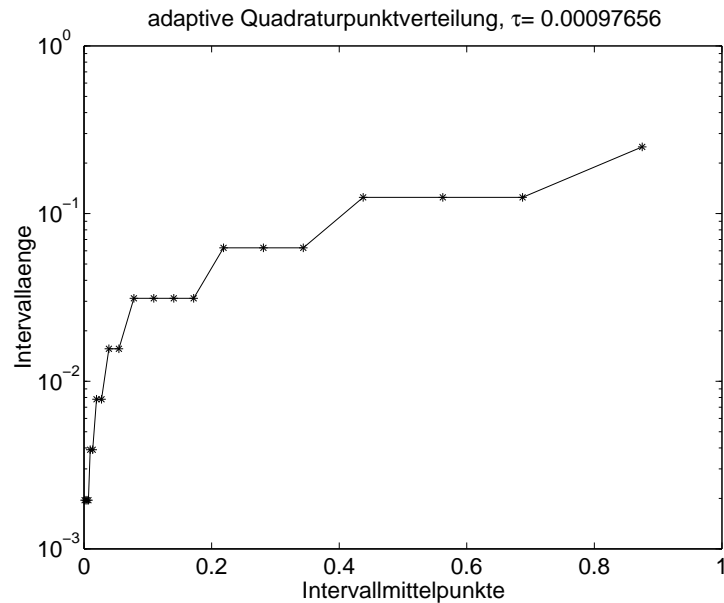
- 1: **adapt**(f,a,b, $\tau$ )
- 2: % bestimmt  $\int_a^b f(x) dx$  mit vorgeschriebener Genauigkeit  $\tau$
- 3: %  $h_{min}$  = minimale Intervalllänge ;  $\rho \in (0, 1)$  Sicherheitsfaktor
- 4: **if**  $(b - a) \leq h_{min}$  **return**(S([a, b])) %erzwungener Abbruch!
- 5: **if**  $|S([a, b]) - T([a, b])| \leq \rho\tau$  { gewünschte Genauigkeit erreicht :)
- 6:     **return** (S([a,b])) }
- 7: **else** {
- 8:   %gewünschte Genauigkeit nicht erreicht  $\rightarrow$  unterteile  $[a, b]$  in  $[a, m]$  und  $[m, b]$
- 9:  $m := (a + b)/2$
- 10:  $I := \mathbf{adapt}(f, a, m, \tau/2) + \mathbf{adapt}(f, m, b, \tau/2)$
- 11: **return**(I) }

# adaptive Quadratur für $\int_0^1 e^x dx$



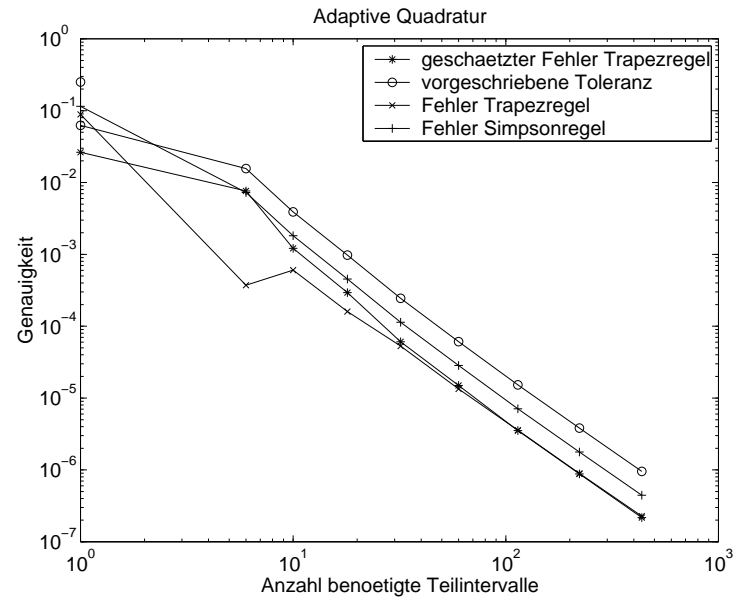
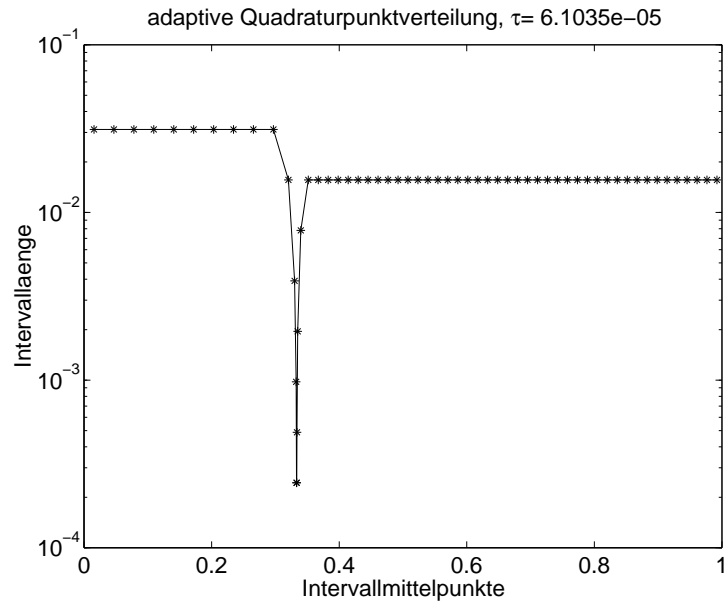
| vorgegebene Toleranz $\tau$ | # Intervalle | geschätzter Fehler | Fehler Trapezregel | Fehler Simpsonregel |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| $4^{-1}$                    | 1            | 1.4028e-01         | 1.4086e-01         | 5.7932e-04          |
| $4^{-2}$                    | 2            | 3.5612e-02         | 3.5649e-02         | 3.7013e-05          |
| $4^{-3}$                    | 4            | 8.9377e-03         | 8.9401e-03         | 2.3262e-06          |
| $4^{-4}$                    | 8            | 2.2366e-03         | 2.2368e-03         | 1.4559e-07          |
| $4^{-5}$                    | 16           | 5.5929e-04         | 5.5930e-04         | 9.1027e-09          |
| $4^{-6}$                    | 32           | 1.3983e-04         | 1.3983e-04         | 5.6897e-10          |
| $4^{-7}$                    | 64           | 3.4958e-05         | 3.4958e-05         | 3.5560e-11          |
| $4^{-8}$                    | 128          | 8.7396e-06         | 8.7396e-06         | 2.2227e-12          |
| $4^{-9}$                    | 256          | 2.1849e-06         | 2.1849e-06         | 1.3900e-13          |
| $4^{-10}$                   | 512          | 5.4623e-07         | 5.4623e-07         | 8.6597e-15          |

# adaptive Quadratur für $\int_0^1 x^{0.1} dx$



| vorgegebene Toleranz $\tau$ | # Intervalle | geschätzter Fehler | Fehler Trapezregel | Fehler Simpsonregel |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| $4^{-1}$                    | 2            | 1.3639e-01         | 1.9257e-01         | 5.6188e-02          |
| $4^{-2}$                    | 4            | 3.2188e-02         | 4.4444e-02         | 1.2256e-02          |
| $4^{-3}$                    | 6            | 9.5107e-03         | 1.2205e-02         | 2.6942e-03          |
| $4^{-4}$                    | 9            | 3.8428e-03         | 4.1473e-03         | 3.0448e-04          |
| $4^{-5}$                    | 21           | 7.6991e-04         | 8.9684e-04         | 1.2693e-04          |
| $4^{-6}$                    | 46           | 2.1629e-04         | 2.4381e-04         | 2.7521e-05          |
| $4^{-7}$                    | 100          | 4.9215e-05         | 5.5191e-05         | 5.9760e-06          |
| $4^{-8}$                    | 217          | 1.1682e-05         | 1.2981e-05         | 1.2999e-06          |
| $4^{-9}$                    | 434          | 3.6523e-06         | 4.2586e-06         | 6.0630e-07          |
| $4^{-10}$                   | 930          | 8.5841e-07         | 9.9036e-07         | 1.3195e-07          |

# Integrand stückweise glatt, mit Sprung bei $x = 1/3$



| vorgegebene Toleranz $\tau$ | # Intervalle | geschätzter Fehler | Fehler Trapezregel | Fehler Simpsonregel |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| $4^{-1}$                    | 1            | 2.6387e-02         | 8.8665e-02         | 1.1505e-01          |
| $4^{-2}$                    | 1            | 2.6387e-02         | 8.8665e-02         | 1.1505e-01          |
| $4^{-3}$                    | 6            | 7.6415e-03         | 3.7153e-04         | 7.2700e-03          |
| $4^{-4}$                    | 10           | 1.2147e-03         | 6.0281e-04         | 1.8175e-03          |
| $4^{-5}$                    | 18           | 2.9397e-04         | 1.6035e-04         | 4.5432e-04          |
| $4^{-6}$                    | 32           | 6.0648e-05         | 5.2929e-05         | 1.1358e-04          |
| $4^{-7}$                    | 60           | 1.4965e-05         | 1.3429e-05         | 2.8394e-05          |
| $4^{-8}$                    | 114          | 3.5327e-06         | 3.5658e-06         | 7.0985e-06          |
| $4^{-9}$                    | 222          | 8.7993e-07         | 8.9469e-07         | 1.7746e-06          |
| $4^{-10}$                   | 436          | 2.1669e-07         | 2.2696e-07         | 4.4365e-07          |