# 3-Term Rekurrenzrelationen

**Theorem** 1. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Folge von Polynomen mit:

1. $p_n \in \mathbb{P}_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$
2. $(p_n, p_m)_\omega = 0$ für $n \neq m$.

Dann existieren Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, so daß

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)p_n(x) + c_n p_{n-1}(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

# Beispiele für 3-Term Rekurrenzrelationen ($[a, b] = [-1, 1]$)

1. Legendrepolynome: $\omega \equiv 1$, $[a, b] = [-1, 1]$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

geschlossene Form: $P_n(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n$

---

2. Tschebyscheffpolynome: $\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a, b] = [-1, 1]$:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geq 1.$$

geschlossene Form: $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$.

---

3. Jacobipolynome: die Orthogonalpolynome für $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ und $[a, b] = [-1, 1]$ heißen Jacobipolynome. Geschlossene Formeln und 3-Term Rekurrenzrelationen sind explizit (in $n$, $\alpha$, $\beta$) bekannt.

# 3-Term Rekurrenzrelationen für unbeschränkte Integrationsgebiete

1. Hermitepolynome: $\omega(x) = e^{-x^2}$, $(a,b) = \mathbb{R}$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

geschlossene Form: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

---

2. Laguerrepolynome: $\omega(x) = e^{-x}$, $(a,b) = (0,\infty)$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = -(x-2n-1)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

geschlossene Form: $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

---