Newton-Cotes Formeln

n	Gewichte	$Q(f) - \int_0^1 f(x)\,dx$	Name
1	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$	Trapezregel
2	$\frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$	Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$	3/8-Regel
4	$\frac{7}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{12}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$	Milne-Regel
5	$\frac{19}{288} \quad \frac{75}{288} \quad \frac{50}{288} \quad \frac{50}{288} \quad \frac{75}{288} \quad \frac{19}{288}$	$\frac{275}{12096}h^7 f^{(6)}(\xi)$	—
6	$\frac{41}{840} \quad \frac{216}{840} \quad \frac{27}{840} \quad \frac{272}{840} \quad \frac{27}{840} \quad \frac{216}{840} \quad \frac{41}{840}$	$\frac{9}{1400}h^9 f^{(8)}(\xi)$	Weddle-Regel

$$\text{Knoten:} \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad i - 0, \ldots, n, \qquad h = \frac{1}{n}$$

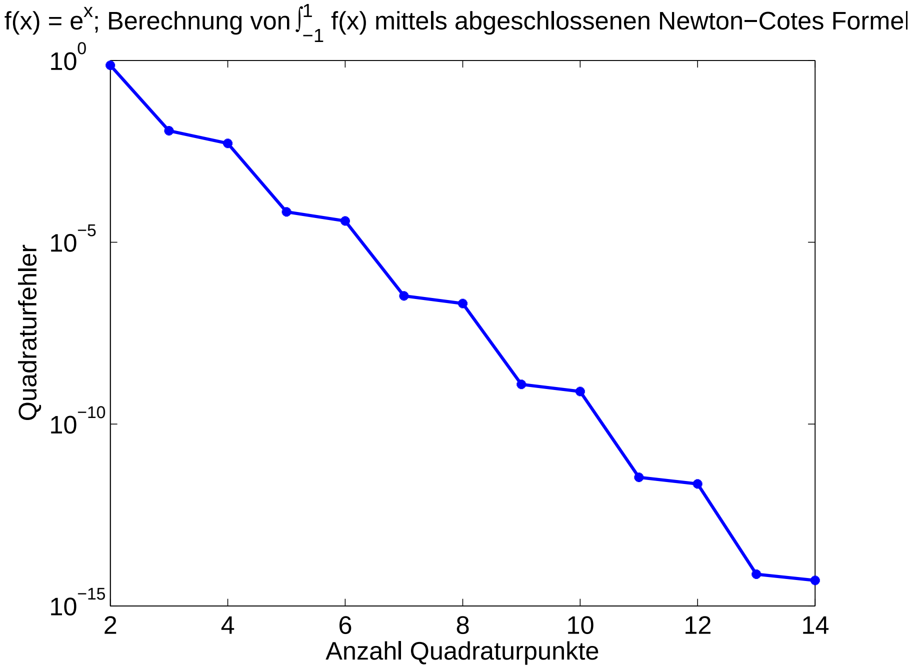
$$\text{Es gilt:} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = Q(f) \qquad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{P}_n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \forall f \in \mathcal{P}_{n+1} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

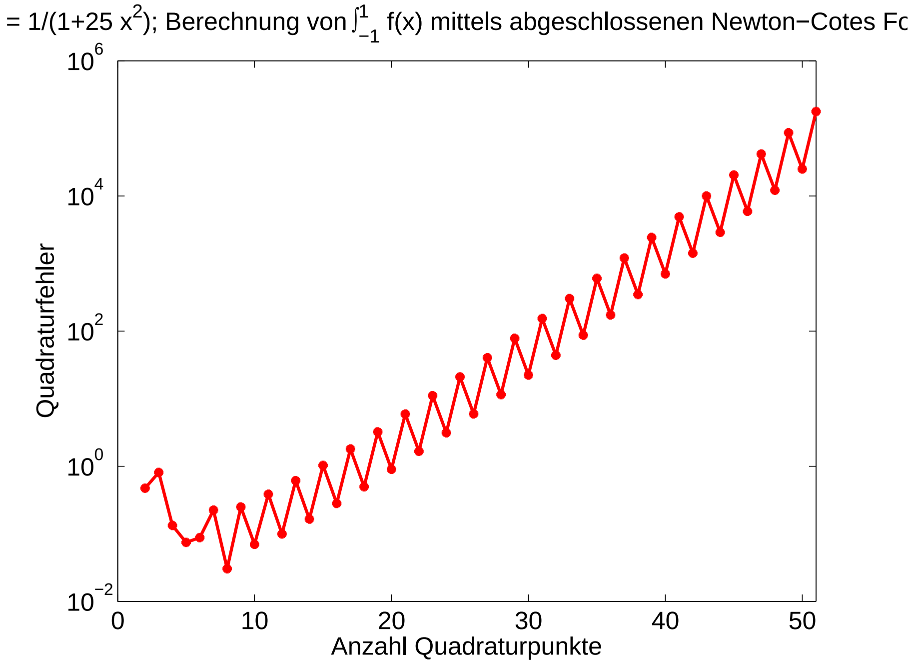
Für $n > 6$ haben die Newton-Cotes Formeln positive und negative Gewichte $\rightarrow$ diese werden in der Praxis nicht eingesetzt.

Beispiel: Newton-Cotes-Formeln für $n \to \infty$:

links: Auswertung von $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$ mittels Newton-Cotes-Formeln

rechts: Auswertung von $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2}\,dx$ mittels Newton-Cotes-Formeln





Erinnerung: bezeichnet $I_n : C([-1,1]) \to \mathcal{P}_n$ den Interpolationsoperator für die äquidistanten Knoten, dann gilt:

$$\|f - I_n f\|_{C([-1,1])} \quad \to \quad 0 \qquad \text{für } f(x) = e^x \text{ (bewiesen!)}$$

$$\|f - I_n f\|_{C([-1,1])} \quad \to \quad \infty \qquad \text{für } f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ (numer. beobachtet)}$$

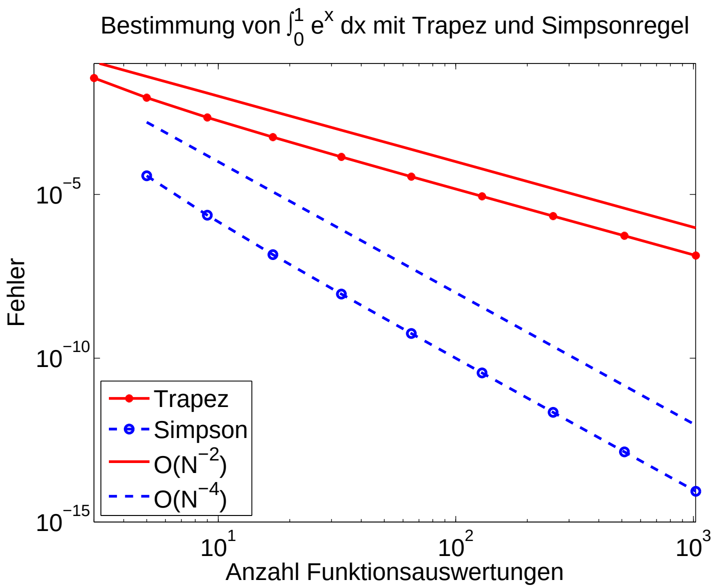
summierte Newton-Cotes Formeln (glatte Integranden)

Aufgabe: Berechne $\int_0^1 e^x\,dx$ mit summierter Trapez- und und Simpsonregel.

Die Fehler E_{Trapez}, $E_{Simpson}$ erfüllen (F bezeichnet die Anzahl Funktionsauswertungen):

$$E_{trap}(h) \le Ch^2 \sim CF^{-2}, \qquad E_{Simpson} \le Ch^4 \sim CF^{-4},$$

h	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
$F_{trapez} \sim 1/h$	2	3	5	9	17	33	65	129	257
E_{Trapez}	1.4_{-1}	3.6_{-2}	8.9_{-3}	2.2_{-3}	5.6_{-4}	1.4_{-4}	3.5_{-5}	8.7_{-6}	2.2_{-6}
$F_{Simpson} \sim 1/h$	3	5	9	17	33	65	129	257	513
$E_{Simpson}$	5.8_{-4}	3.7_{-5}	2.3_{-6}	1.5_{-7}	9.1_{-9}	5.7_{-10}	3.6_{-11}	2.2_{-12}	1.4_{-13}



Ergebnis: für glatte Integranden ist es effizienter, Quadraturformeln höherer Ordnung zu verwenden

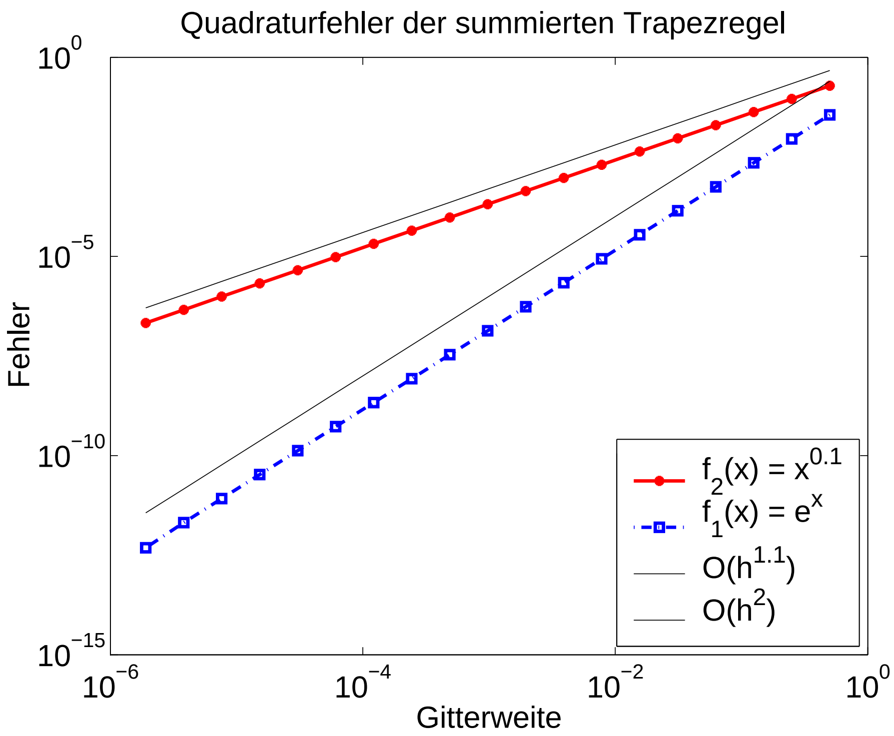
summierte Newton-Cotes Formeln (nichtglatte Integranden)

$$f_1(x) := e^x, \qquad f_2(x) := x^{0.1}$$

$E_i(h) :=$ Quadraturfehler der summierten Trapezregel für die Auswerung on $\int_0^1 f_i(x)\,dx$.

$$f_1(x) = e^x \Longrightarrow f_1 \in C^2([0,1]) \Longrightarrow E_1(h) \leq Ch^2,$$

$$f_2(x) = x^{0.1} \Longrightarrow f_2 \notin C^2([0,1]) \Longrightarrow \text{ können nicht } E_2(h) \leq Ch^2 \text{ erwarten}$$



Übung: Überlegen Sie sich, daß aus Satz 10.9 folgt:

$$E_2(h) \leq Ch^{1.1}$$

Rombergextrapolation für $\int_0^1 f(x)\,dx$ mit f glatt

Vorgehen:
1.) berechne Werte der Trapezregel $T_{i0} := T(h_i)$ für $h_i = 2^{-i}$,
2.) Werte Interpolationspolynom $P_{i,n} \in \mathcal{P}_n$ zu den Daten $(h_{i+j}^2, T(h_{i+j}))$, $j = 0, \ldots, n$, bei $h = 0$ aus: $T_{in} := P_{i,n}(0)$. Dies geschieht mit Aitken-Neville:

$$
\begin{aligned}
T_{i0} &= P_i(0) = T(h_i) \\
T_{ij} &= P_{i,j}(0) = P_{i+1,j-1}(0) - \frac{h_{i+j}^2}{h_{i+j}^2 - h_i^2}\left[P_{i+1,j-1}(0) - P_{i,j-1}(0)\right] \\
&= T_{(i+1)\,(j-1)} - \frac{h_{i+j}^2}{h_{i+j}^2 - h_i^2}\left[T_{(i+1)\,(j-1)} - T_{i\,(j-1)}\right], \qquad j \geq 1
\end{aligned}
$$

Rombergextrapolation für $\int_0^1 f(x)\,dx$ mit f glatt, Forts.

$$
\begin{aligned}
T_{i0} &= P_i(0) = T(h_i) \\
T_{ij} &= P_{i,j}(0) = P_{i+1,j-1}(0) - \frac{h_{i+j}^2}{h_{i+j}^2 - h_i^2}\,[P_{i+1,j-1}(0) - P_{i,j-1}(0)] \\
&= T_{(i+1)\,(j-1)} - \frac{h_{i+j}^2}{h_{i+j}^2 - h_i^2}\left[T_{(i+1)\,(j-1)} - T_{i\,(j-1)}\right], \qquad j \geq 1
\end{aligned}
$$

h	h^2	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
h_0	h_0^2	$T(h_0) = T_{00}$	T_{01}	T_{02}	T_{03}
h_1	h_1^2	$T(h_1) = T_{10}$	T_{11}	T_{12}	T_{13}
h_2	h_2^2	$T(h_2) = T_{20}$	T_{21}	T_{22}	T_{23}
h_3	h_3^2	$T(h_3) = T_{30}$	T_{31}	T_{32}	T_{33}
h_4	h_4^2	$T(h_4) = T_{40}$	T_{41}	T_{42}	$\vdots$
h_5	h_5^2	$T(h_5) = T_{50}$	T_{51}	$\vdots$	
h_6	h_6^2	$T(h_6) = T_{60}$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

Rombergextrapolation für $\int_0^1 e^x\,dx$

h	h^2	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	1	1.859140914229523	1.718861151876593	1.718282687924754	1.718281828794499
2^{-1}	2^{-2}	1.753931092464825	1.718318841921747	1.718281842218437	1.718281828460412
2^{-2}	2^{-4}	1.727221904557517	1.718284154699897	1.718281828675358	1.718281828459105
2^{-3}	2^{-6}	1.720518592164302	1.718281974051892	1.718281828462428	1.718281828459017
2^{-4}	2^{-8}	1.718841128579994	1.718281837561771	1.718281828459097	1.718281828459077
2^{-5}	2^{-10}	1.718421660316327	1.718281829028016	1.718281828459049	1.718281828459047
2^{-6}	2^{-12}	1.718316786850094	1.718281828494605	1.718281828478246	
2^{-7}	2^{-14}	1.718290568083478	1.718281828461267		
2^{-8}	2^{-16}	1.718284013366820			
1	1	1.41_{-01}	5.79_{-04}	8.59_{-07}	3.35_{-10}
2^{-1}	2^{-2}	3.56_{-02}	3.70_{-05}	1.40_{-08}	1.37_{-12}
2^{-2}	2^{-4}	8.94_{-03}	2.33_{-06}	2.16_{-10}	5.95_{-14}
2^{-3}	2^{-6}	2.24_{-03}	1.46_{-07}	3.38_{-12}	-2.80_{-14}
2^{-4}	2^{-8}	5.59_{-04}	9.10_{-09}	5.20_{-14}	3.20_{-14}
2^{-5}	2^{-10}	1.40_{-04}	5.69_{-10}	3.77_{-15}	1.78_{-15}
2^{-6}	2^{-12}	3.50_{-05}	3.56_{-11}	1.92_{-11}	
2^{-7}	2^{-14}	8.74_{-06}	2.22_{-12}		
2^{-8}	2^{-16}	2.18_{-06}			
erwartet		$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$