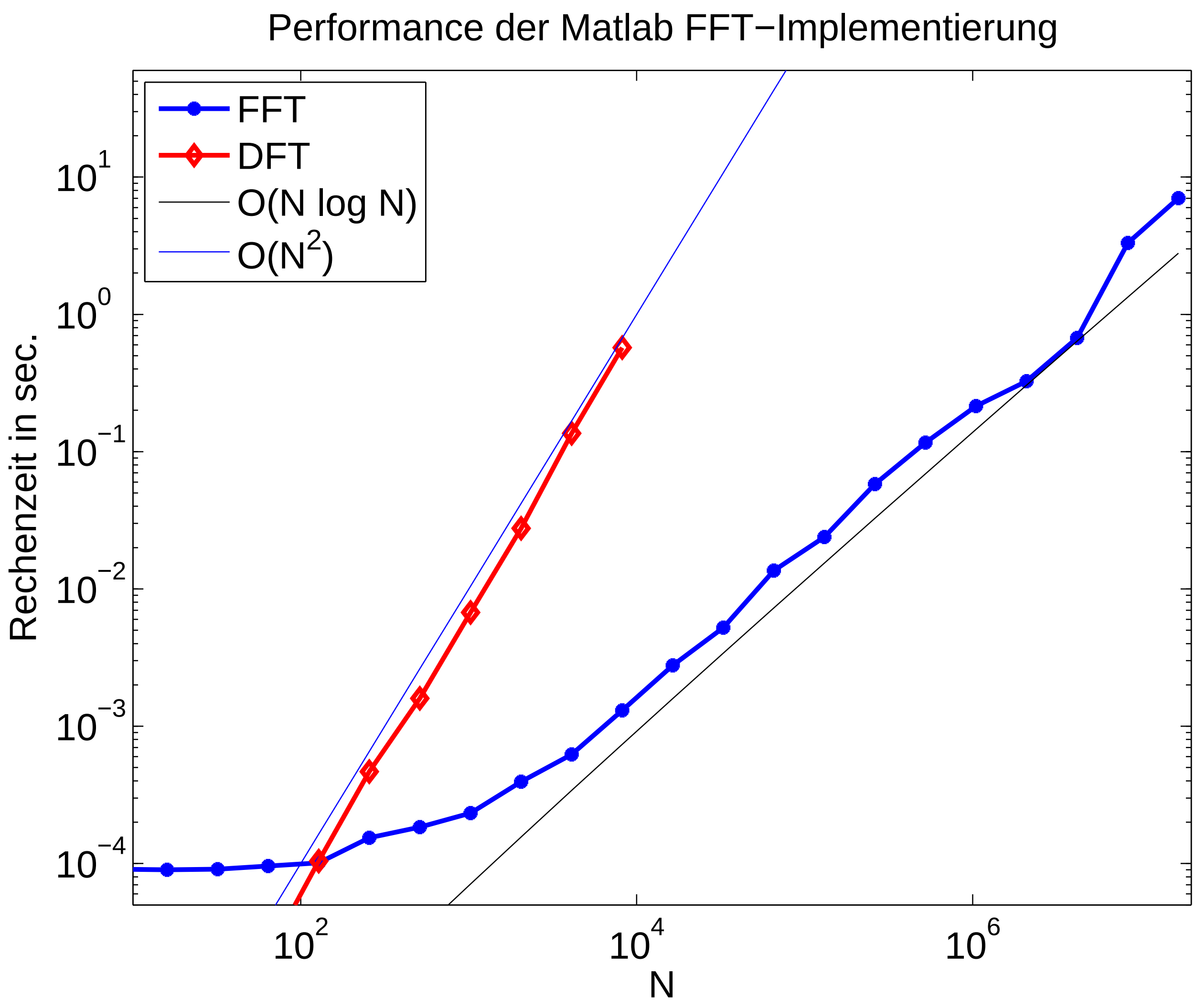
FFT



Performance der Matlab FFT−Implementierung
FFT
DFT
O(N log N)
O(N2)
Rechenzeit in sec.
N
10^1
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
10^−4
10^2
10^4
10^6

DFT für periodische Folgen $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$

- periodische Folgen: $\mathfrak{f} \in \mathbb{C}^n_{per}$, falls $\mathfrak{f}_{k+n} = \mathfrak{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

- DFT: $\widehat{\mathfrak{f}} := \mathcal{F}_n(\mathfrak{f}) := (\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} \mathfrak{f}_j)_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad \omega_n := e^{-2\pi \mathbf{i}/\mathbf{n}}$.

- Faltung (Konvolution): Für $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g} \in \mathbb{C}^n_{per}$ ist $\mathfrak{f} * \mathfrak{g} \in \mathbb{C}^n_{per}$ definiert durch

$$(\mathfrak{f} * \mathfrak{g})_k := \sum_{j=0} \mathfrak{f}_{k-j}\mathfrak{g}_j, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Punktweise Multiplikation: Für $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g} \in \mathbb{C}^n_{per}$ ist $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} \in \mathbb{C}^n_{per}$ definiert durch

$$(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g})_k := \mathfrak{f}_k \cdot \mathfrak{g}_k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Innenprodukt auf $\mathbb{C}^n_{per}$:

$$\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rangle_{\mathbb{C}^n_{per}} := \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{f}_j \overline{\mathfrak{g}_j}$$

Eigenschaften der DFT für periodische Folgen

- $\mathcal{F}_n : \mathbb{C}^n_{per} \longrightarrow \mathbb{C}^n_{per}$ ist linear.

- $\mathcal{F}_n^{-1} : \mathbb{C}^n_{per} \longrightarrow \mathbb{C}^n_{per}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_n^{-1}(\mathfrak{f}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{-jk} \mathfrak{f}_j \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

- Parseval: $\langle \widehat{\mathfrak{f}}, \widehat{\mathfrak{g}} \rangle_{\mathbb{C}^n_{per}} = n \langle \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rangle_{\mathbb{C}^n_{per}}$

- $\boxed{\text{Faltungssatz: } \widehat{\mathfrak{f} * \mathfrak{g}} := \mathcal{F}_n(\mathfrak{f} * \mathfrak{g}) = \widehat{\mathfrak{f}} \cdot \widehat{\mathfrak{g}}, \text{ d.h. } (\widehat{\mathfrak{f} * \mathfrak{g}})_k = \mathfrak{f}_k \mathfrak{g}_k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.}$

- Modulation $\leftrightarrow$ Translation:

$$\mathcal{F}_n((\mathfrak{f}_{k+m})_{k \in \mathbb{Z}}) = (\widehat{\mathfrak{f}}_k \omega_n^{-mk})_{k \in \mathbb{Z}} \qquad \text{Translation} \longrightarrow \text{Modulation}$$

$$\mathcal{F}_n\left((\mathfrak{f}_k \omega_n^{km})_{k \in \mathbb{Z}} \right) = (\widehat{\mathfrak{f}}_{k+m})_{k \in \mathbb{Z}} \qquad \text{Modulation} \longrightarrow \text{Translation}$$