Berechnung kubischer Splines

$$\text{Momente } M_i := s''(x_i)$$

Darstellung von s'':

$$s''(x) = \sum_{i=0}^{n} M_i N_i(x)$$

$\Longrightarrow$ auf jedem Teilintervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$ gilt mit $h_i = |I_i| = x_{i+1} - x_i$

$$s(x) = C_i + D_i \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - M_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i}$$

Interpolationsbedingung $s(x_j) = f_j$ für $j = 0, \ldots, n$ liefert:

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{f_{i+1} + f_i}{2} - \frac{h_i^2}{12}(M_{i+1} + M_i) \\ D_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) \end{aligned}$$

Herleitung von Gleichungen für die Momente M_i

Benutze Stetigkeit von s' in den inneren Knoten x_i, $i = 1, \ldots, n-1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_i+} s'(x) &= D_i - \frac{h_i}{2} M_i = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{1}{3} h_i M_i - \frac{1}{6} h_i M_{i+1}, \\
\lim_{x \to x_i-} s'(x) &= D_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} M_i = f[x_{i-1}, x_i] + \frac{1}{3} h_{i-1} M_i + \frac{1}{6} h_{i-1} M_{i-1}
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit von s' an den inneren Knoten x_i, $i = 1, \ldots, n-1$ bedeutet damit

$$\begin{aligned}
f[x_{i+1}, x_i] - \frac{1}{3} h_i M_i - \frac{1}{6} h_i M_{i+1} &= \lim_{x \to x_i+} s'(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to x_i-} s'(x) \\
&= f[x_{i-1}, x_i] + \frac{1}{3} h_{i-1} M_i + \frac{1}{6} h_{i-1} M_{i-1}.
\end{aligned}$$

Umformung und Ausnutzen von $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_{i-1} + h_i}$ liefert

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} M_{i-1} = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}].$$

weiter geht's (Herleitung von Gleichungen für die Momente M_i)

Mit den Abkürzungen

$$\mu_i := \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \qquad \lambda_i = 1 - \mu_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \qquad d_i := 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

erhalten wir damit aus der Forderung der Stetigkeit von s' an den inneren Knoten:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

die fehlenden 2 Gleichungen ergeben sich aus den zusätzlichen Randbedingungen.

vollständige Splines

Zusätzliche zwei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f_0' &= f[x_0, x_1] - \frac{1}{3} h_0 M_0 - \frac{1}{6} h_0 M_1, \\
f_n' &= f[x_{n-1}, x_n] + \frac{1}{3} h_{n-1} M_n + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Führt man d_0, d_n ein als $d_0 = 6\frac{f[x_0,x_1]-f_0'}{h_0}$ und $d_n = 6\frac{f_n'-f[x_{n-1},x_n]}{h_{n-1}}$, so ergibt sich als Gleichungssystem für die Momente M_i, $i = 0, \ldots, n$:

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n
\end{pmatrix}
\qquad (1)
$$

natürliche Splines

Zusätzliche Gleichungen: $M_0 = M_n = 0$. Für die noch unbekannten Momente M_i, $i = 1, \dots, n-1$, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

periodische Splines

Man verlangt Periodizität des Splines:

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] - \frac{1}{3}h_0M_0 - \frac{1}{6}h_0M_1 &= f[x_{n-1},x_n] + \frac{1}{3}h_{n-1}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}, \\ M_0 &= M_n \end{aligned}$$

Führt man nun

$$\mu_n := \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0}, \qquad \lambda_n := 1-\mu_n = \frac{h_0}{h_{n-1}+h_0}, \qquad d_0 := 6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_0+h_{n-1}}$$

ein, so erhält man das folgende LGS für die Momente M_i, $i = 0,\ldots,n-1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & & \mu_n \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Lokalität bei kubischen Splines?

- Das Bestimmen eines kubischen interpolierenden Splines erfordert das Lösen eine LGS, welches alle Interpolationswerte koppelt $\longrightarrow$ Lokalität?
- Kardinaler kubischer Spline L auf dem unendlichen Gitter $\mathbb{Z}$ erfüllt: $L(i) = \delta_{i0}$
  L klingt exponentiell ab: $|L(x)| \leq Ce^{-a|x|}$