Interpolation in Tschebyscheffpunkten vs. äquidistante Punkte

$$\boxed{\|u - I_n u\|_{C([-1,1])} \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{v \in \mathbb{P}_n} \|u - v\|_{C([-1,1])}}$$

äquidistante Punkte: $x_i^{\text{äqui}} := -1 + \frac{2}{n} i, \qquad i = 0, \ldots, n,$

Tschebyscheffpunkte: $x_i^{\text{Tsch}} := \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\right), \qquad i = 0, \ldots, n$

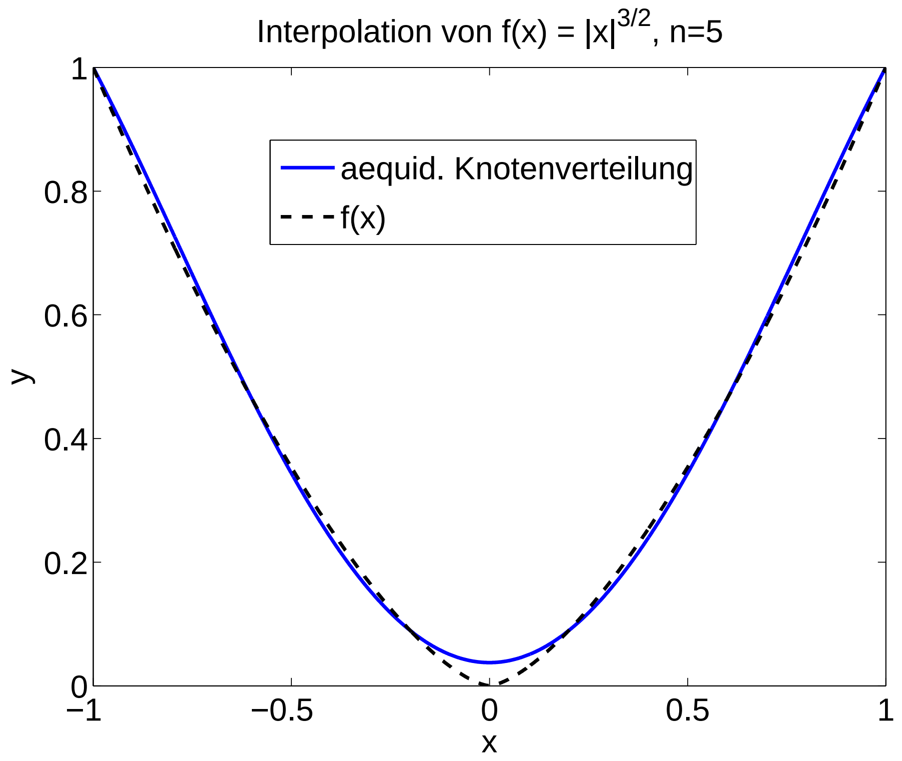
Theorem 1. $\exists\ C_1,\ C_2 > 0$, so daß

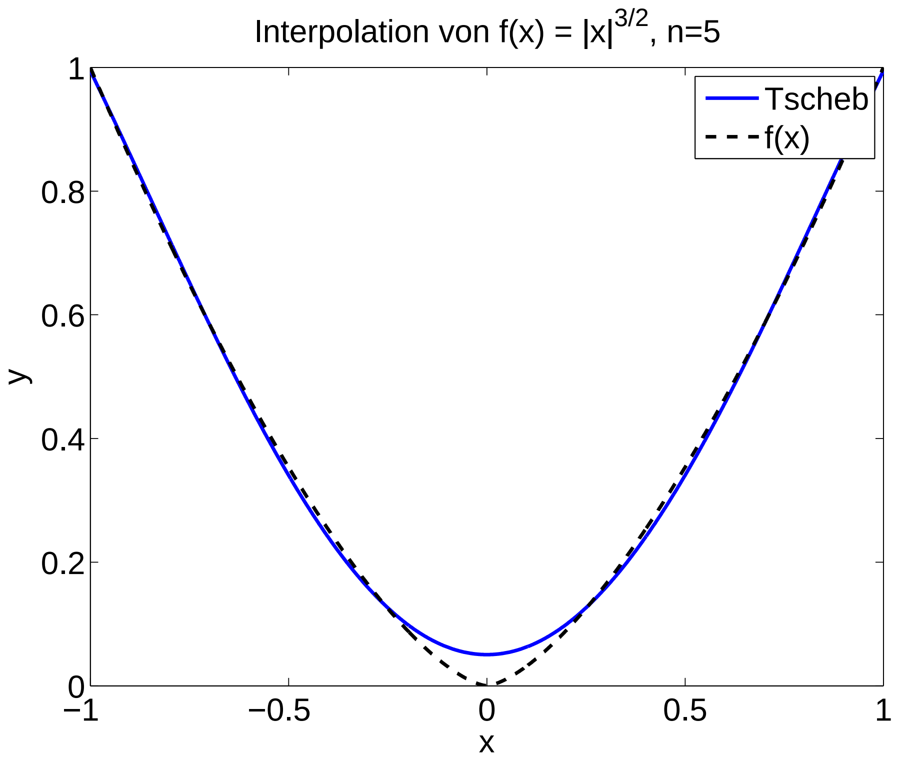
$$\Lambda_n^{\text{äqui}} \geq C_1 e^{n/2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

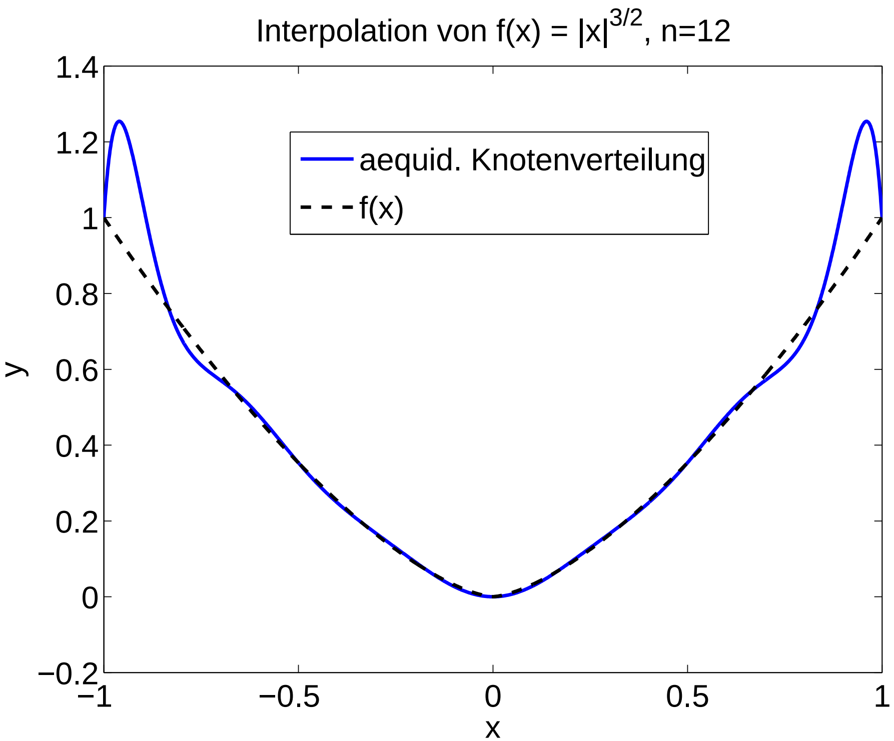
$$\Lambda_n^{\text{Tsch}} \leq C_2 \ln(n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

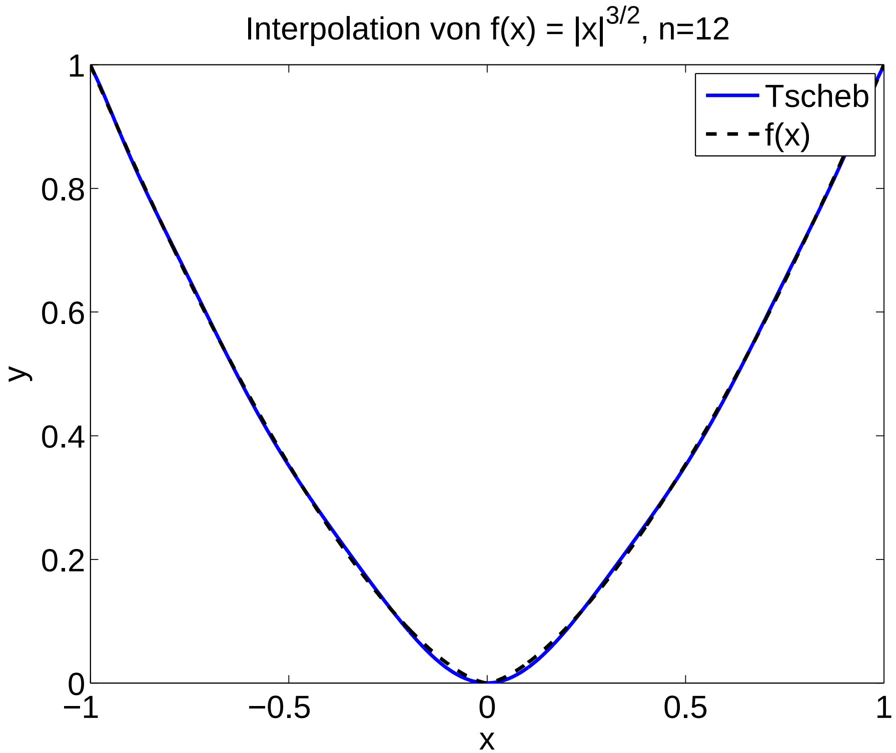
n	$\Lambda_n^{\text{äqui}}$	Λ_n^{Tsch}
5	3.106	2.104
10	29.89	2.489
15	512.05	2.728
20	10986.53	2.901

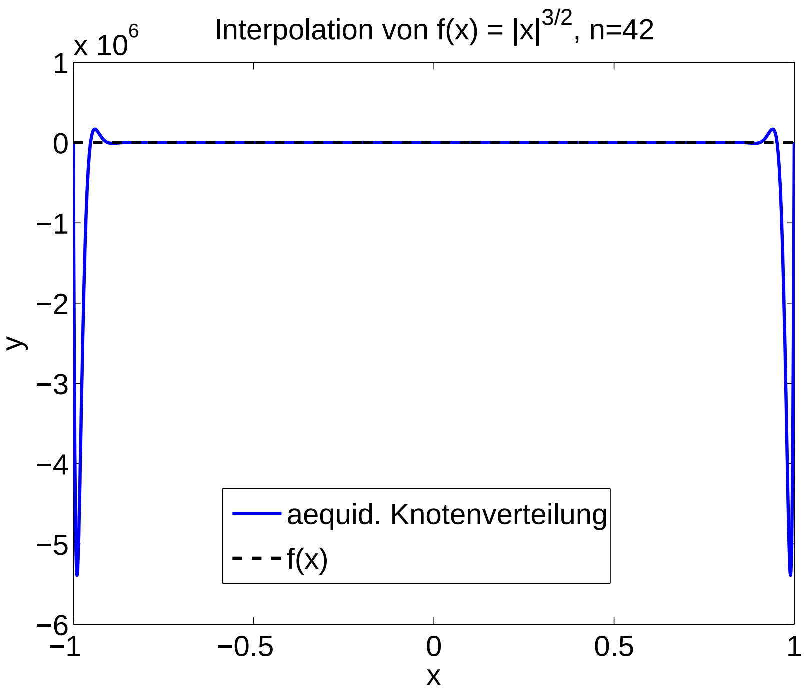
Interpolation von $f(x) = |x|^{3/2}$ auf $[-1, 1]$

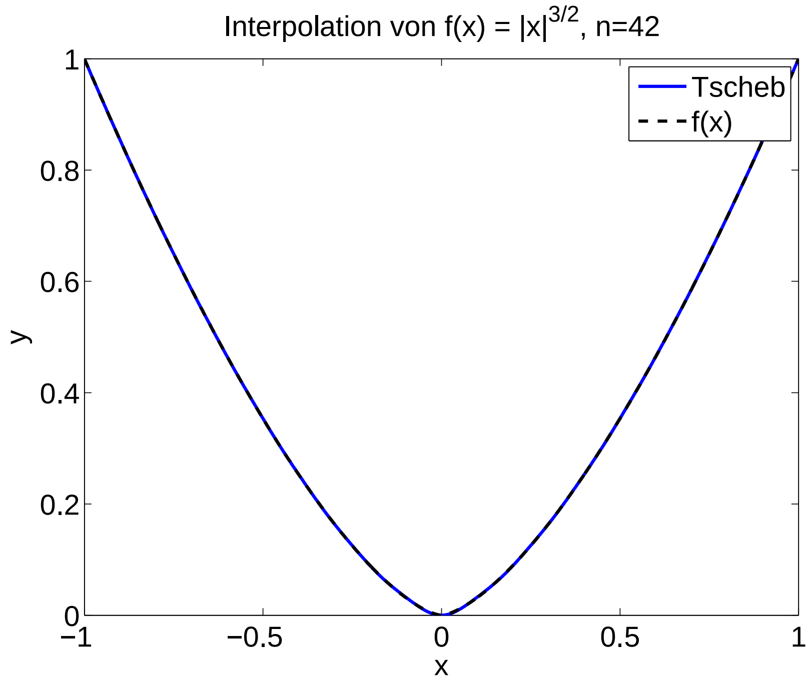




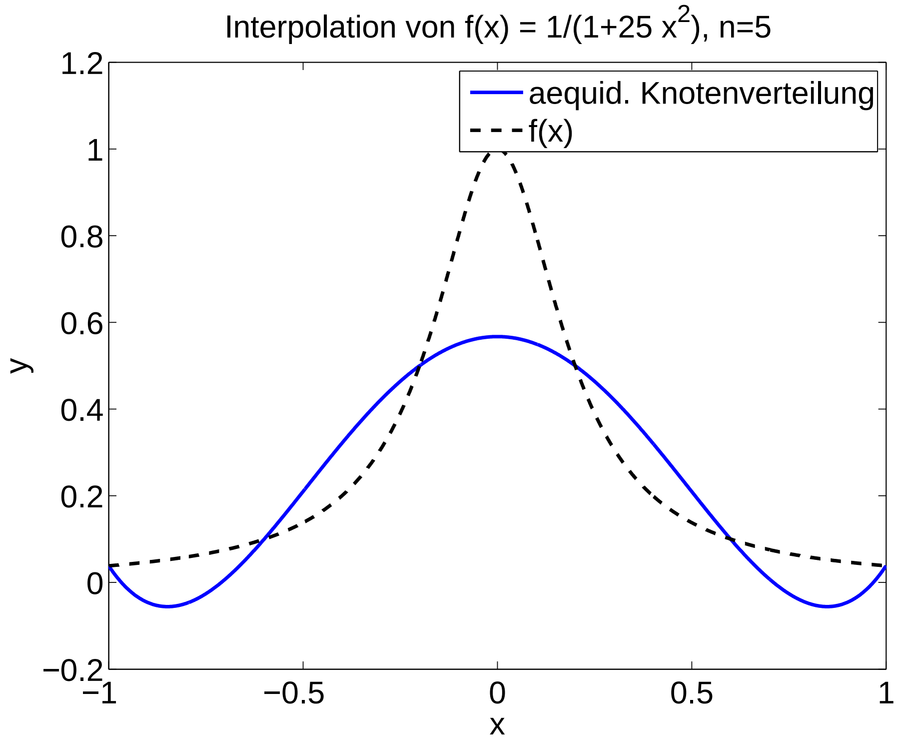

Interpolation von f(x) = |x|^3/2, n=12
aequid. Knotenverteilung
f(x)
y
x
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−1
−0.5
0
0.5
1

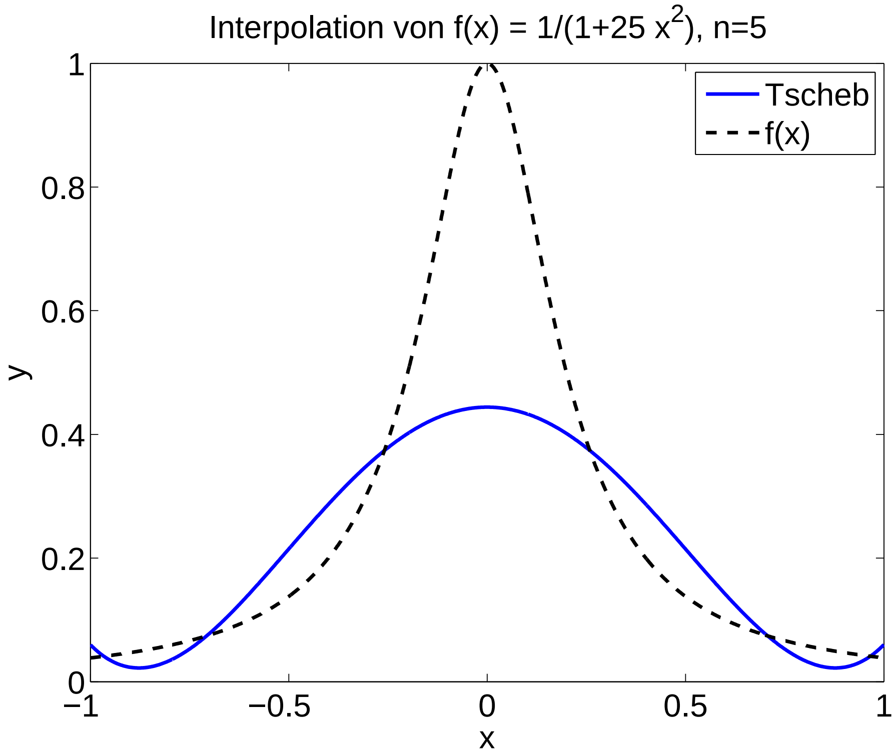

Interpolation von f(x) = |x|^3/2, n=12
Tscheb
f(x)
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.5
0
0.5
1

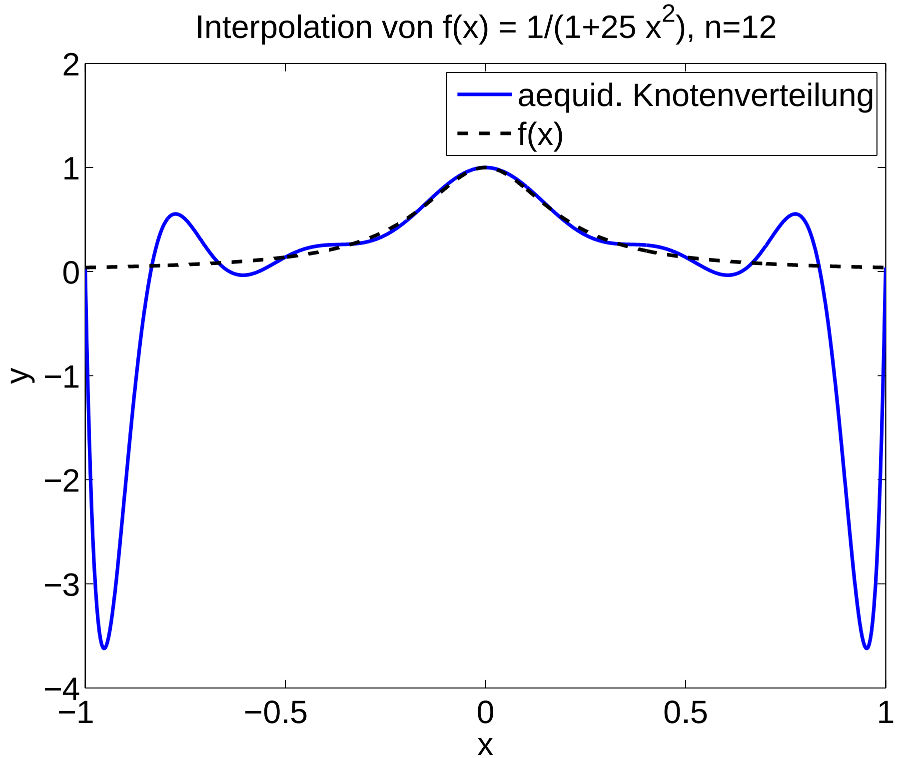

Interpolation von f(x) = |x|^3/2, n=42
x 10^6
aequid. Knotenverteilung
f(x)
y
x
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−1
−0.5
0
0.5
1

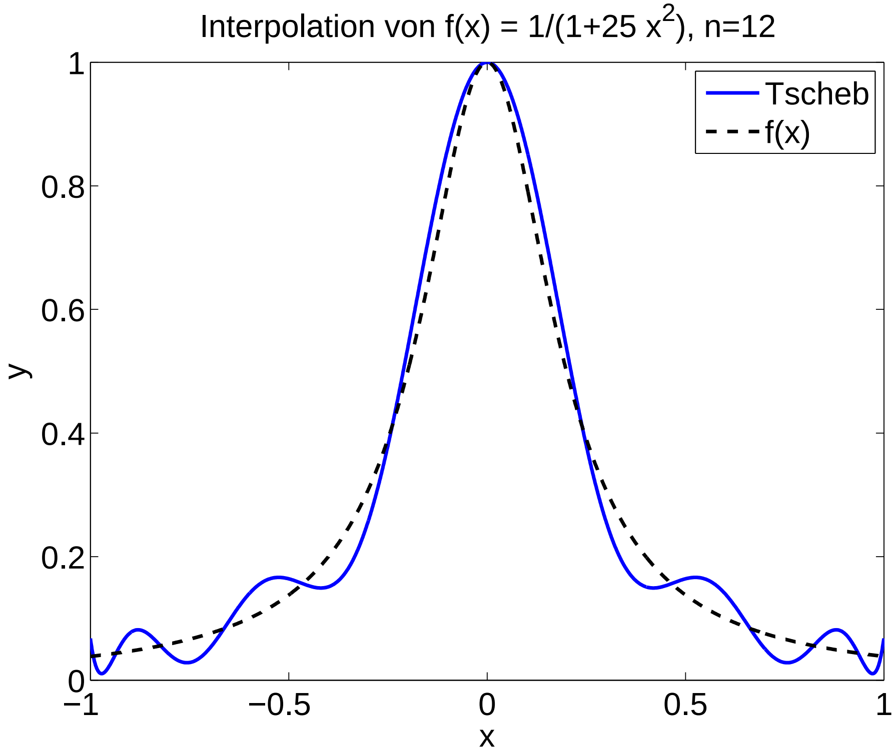

Interpolation von f(x) = |x|^3/2, n=42
Tscheb
f(x)
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.5
0
0.5
1

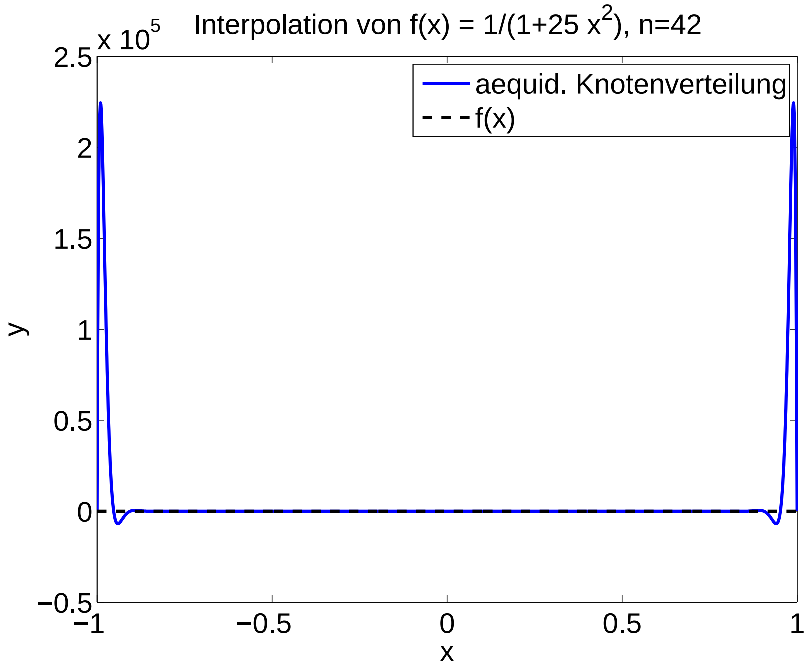
Runge's Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ auf $[-1,1]$

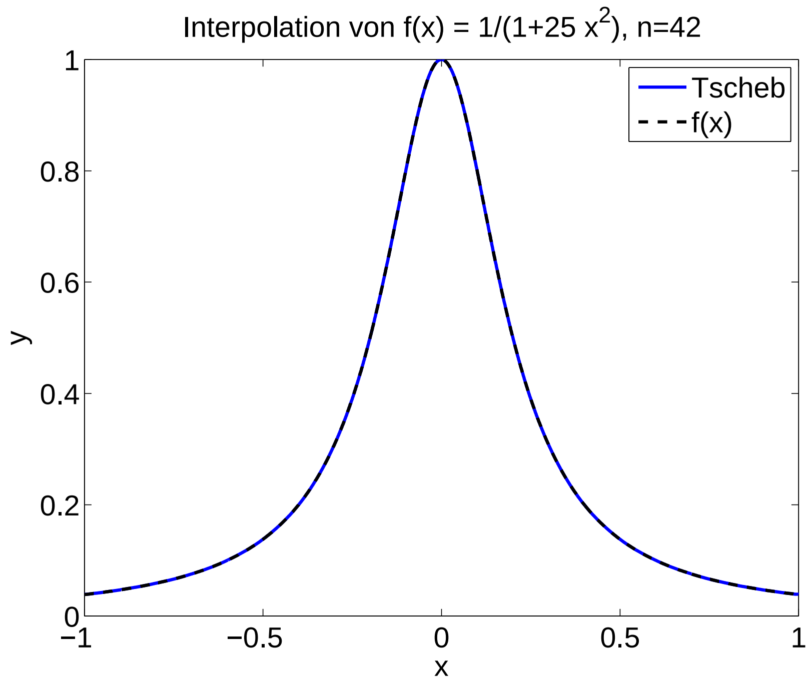





Interpolation von f(x) = 1/(1+25 x^2), n=12
aequid. Knotenverteilung
f(x)
y
x


Interpolation von f(x) = 1/(1+25 x^2), n=12
Tscheb
f(x)
y
x


Interpolation von f(x) = 1/(1+25 x^2), n=42
x 10^5
aequid. Knotenverteilung
f(x)
y
x


Interpolation von f(x) = 1/(1+25 x^2), n=42
Tscheb
f(x)
y
x

Fehler Tschebyscheffinterpolation vs. äquidistante Knotenverteilung

Runge-Beispiel:

n	10	20	30	40
$\|f - I_n^{\mathrm{Tsch}} u\|_{C([-1,1])}$	1.1_{-1}	1.5_{-2}	2.1_{-3}	2.9_{-4}
$\|f - I_n^{\text{äqui}} u\|_{C([-1,1])}$	1.9_{0}	5.9_{1}	2.3_{3}	1.0_{5}

Konvergenz von Tschebyscheffinterpolation

Aus der Abschätzung

$$\|u - I_n^{\mathrm{Tsch}} u\|_{C([-1,1])} \leq C \ln(n+1) \inf_{v \in \mathbb{P}_n} \|f - v\|_{C([-1,1])} \leq C \ln(n+1) \omega(f, 1/n)$$

folgt, daß Tschebyscheffinterpolation "fast immer" konvergiert. Insbesondere liegt Konvergenz vor, wenn

- $f \in C^1([-1,1])$ ist
- f lipschitzstetig auf $[-1,1]$ ist
- f hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha \in (0,1)$ ist.

Versagen von Interpolationsprozessen

Theorem 2. Es existiert $C > 0$, so daß für beliebig Wahl von Knoten $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$ gilt:

$$\Lambda_n \geq C \ln n.$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Viel besser als mit Tschebyscheffknoten geht es nicht!}}$

Theorem 3. [Erdös & Vertesi] Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $-1 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots x_n^{(n)} \leq 1$ Interpolationspunkte mit zugehörigem Interpolationsoperator I_n. Dann existiert ein $f \in C([-1,1])$, so daß $I_n f$ fast überall divergiert.
Insbesondere gilt $\|f - I_h f\|_{C([-1,1])} \to \infty$.