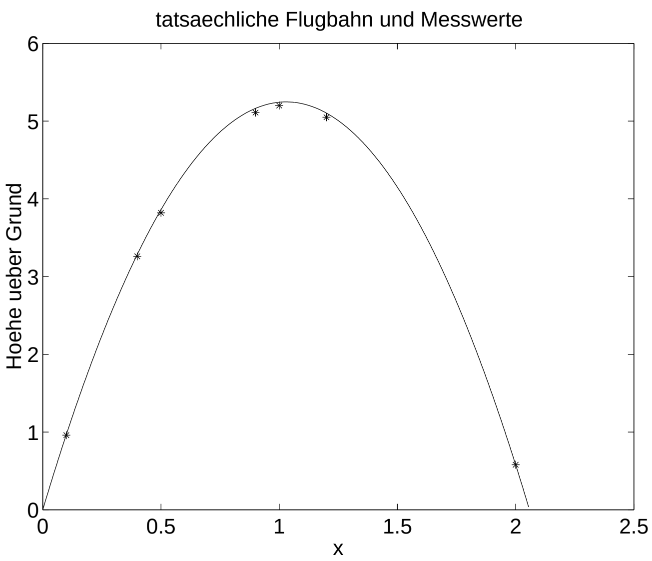
Beispiel für Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate

physikalisches Gesetz: $y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$

gesucht: Anfangsgeschwindigkeit v_y und Erdbeschleunigung g.



Meßwerte:

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i[s]	0.1	0.4	0.5	0.9	1.0	1.2	2.0
y_i[m]	0.96	3.26	3.82	5.11	5.2	5.05	0.58

erhalten ein **überbestimmtes** Gleichungssystem:

$$t_i \, v_y - \frac{1}{2} t_i^2 \, g = y_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

In Matrixschreibweise: $$\begin{pmatrix} 0.1 & -0.005 \\ 0.4 & -0.08 \\ 0.5 & -0.125 \\ 0.9 & -0.405 \\ 1.0 & -0.5 \\ 1.2 & -0.72 \\ 2.0 & -2.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 3.26 \\ 3.82 \\ 5.11 \\ 5.2 \\ 5.05 \\ 0.58 \end{pmatrix}$$

Lösen von überbestimmten Gleichungssystemen

haben erhalten: $A \begin{pmatrix} v_y \\ g \end{pmatrix} = b \qquad A \in \mathbb{R}^{7\times 2}, \qquad b \in \mathbb{R}^2$

Ausgleichslösung: Finde $x = (v_y, g)^\top$ so, daß das **Residuum** $r = b - Ax$ minimal wird, d.h.

$$\|b - Ax\|_2 \leq \|b - Ay\|_2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmung von x mithilfe der Normalengleichungen:

Die Lösung des Ausgleichsproblems ist Lösung von

$$\boxed{A^\top A x = A^\top b}$$

Berechnung der Ausgleichslösung im Beispiel:

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.9 & 1.0 & 1.2 & 2.0 \\ -0.005 & -0.08 & -0.125 & -0.405 & -0.5 & -0.72 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & -0.005 \\ 0.4 & -0.08 \\ 0.5 & -0.125 \\ 0.9 & -0.405 \\ 1.0 & -0.5 \\ 1.2 & -0.72 \\ 2.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7.6700 & -5.8235 \\ -5.8235 & 4.954475 \end{pmatrix}$$

$$A^\top b = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.9 & 1.0 & 1.2 & 2.0 \\ -0.005 & -0.08 & -0.125 & -0.405 & -0.5 & -0.72 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.96 \\ 3.26 \\ 3.82 \\ 5.11 \\ 5.2 \\ 5.05 \\ 0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.3290 \\ -10.20865 \end{pmatrix}$$

Gesuchte Ausgleichslösung $x = (v_y, g)^\top$ erfüllt $A^\top A x = A^\top b \Longrightarrow$

weiter geht's...

$$A^\top A \begin{pmatrix} v_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.6700 & -5.8235 \\ -5.8235 & 4.954475 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.3290 \\ -10.20865 \end{pmatrix} = A^\top b.$$

Die Matrix $A^\top A$ ist in der Tat symmetrisch positiv definit und die damit eindeutige Lösung (v_y, g) ist auf 5 Stellen

$$\begin{pmatrix} v_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.096 \\ 9.8065 \end{pmatrix}.$$

Lösung mittels QR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.005 \\ 0.4 & -0.08 \\ 0.5 & -0.125 \\ 0.9 & -0.405 \\ 1.0 & -0.5 \\ 1.2 & -0.72 \\ 2.0 & -2.0 \end{pmatrix}, \qquad Q^\top A = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7695 & 2.1027 \\ 0 & -0.73 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^\top b = Q^\top \begin{pmatrix} 0.96 \\ 3.26 \\ 3.82 \\ 5.11 \\ 5.2 \\ 5.05 \\ 0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.3404 \\ -7.1590 \\ -0.0037 \\ -0.0063 \\ 0.0058 \\ -0.0055 \\ 0.0046 \end{pmatrix}$$

weiter geht's

$$Q^\top A = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7695 & 2.1027 \\ 0 & -0.73 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^\top b = \begin{pmatrix} -7.3404 \\ -7.1590 \\ -0.0037 \\ -0.0063 \\ 0.0058 \\ -0.0055 \\ 0.0046 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS: $\widetilde{R}x = r$:

$$\begin{pmatrix} -2.7695 & 2.1027 \\ 0 & -0.73 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7.3404 \\ -7.1590 \end{pmatrix}.$$

Aufgelöst nach $x = (v_y, g)^\top$ ergibt sich:

$$x = \begin{pmatrix} 10.083 \\ 9.807 \end{pmatrix}.$$