Pivotsuche

Wir betrachten das Lösen des LGS $Ax = b$ in 4-stelliger Arithmetik:

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad x_{exakt} = \begin{pmatrix} -4.001246... \\ -2.99875... \end{pmatrix}$$

Dann ist $l_{21} = 1/(3.1 \cdot 10^{-4}) \approx 3.226 \cdot 10^3$ und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3.226 \cdot 10^3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3.1 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 0 & -3.225 \cdot 10^4 \end{pmatrix},$$

$$y = L^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9.671 \cdot 10^3 \end{pmatrix},$$

$$x = U^{-1}y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3.1 \cdot 10^{-4}}(-3 - (-2.999)) \\ -2.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.226 \\ -2.999 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: beim Rückwärtseinsetzen sind durch Auslöschung alle Ziffern von x_1 verloren gegangen.

intuitive Erklärung: kleines Pivot l_{21} führt in der Rechnung auf große Zwischenergebnisse. Das Endergebnis ist wieder von moderater Größe, was durch Subtraktion zweier ähnlich großer Zahlen erreicht wurde.

Spaltenpivotsuche

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad x_{exakt} = \begin{pmatrix} -4.001246... \\ -2.99875... \end{pmatrix}$$

Vertauschen der ersten und zweiten Zeile von A liefert:

$$A_{per} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3.1 \cdot 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_{per} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und damit

$$L_{per} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3.1 \cdot 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_{per} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - l_{21} = 0.9997 \end{pmatrix},$$

$$y = L_{per}^{-1} b_{per} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2.998 \end{pmatrix}, \qquad x = U_{per}^{-1} y = \begin{pmatrix} -4.001 \\ -2.999 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ korrektes Ergebnis bis auf Rundungsgenauigkeit

---

Beachte: $L_{per}U_{per} = PA$ für die Permutationsmatrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel einer LU-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 8.75 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 5 & 6.5 \end{pmatrix}, \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 11.25 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{Lsg: } (1,1,1)^\top$$

Pivotsuche in der 1. Spalte: $\Longrightarrow$ vertausche 1. und 2. Zeile:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 2 & 8.75 \\ 0.5 & 5 & 6.5 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11.25 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Eliminationsschritt: Es ist $l_{21} = 0.5$, $l_{31} = 0.5$ und damit

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7.25 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8.25 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.5 & & 1 \end{pmatrix},$$

Beispiel einer LU-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7.25 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8.25 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.5 & & 1 \end{pmatrix},$$

Pivotsuche in der 2. Spalte: Vergleiche lediglich $a_{22}^{(2)}$ und $a_{32}^{(2)}$.
Weil $|a_{32}^{(2)}| > |a_{22}^{(2)}|$ vertausche die 2. und die 3. Zeile:

$$\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7.25 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8.25 \end{pmatrix},$$

Eliminationsschritt: $l_{32} = \frac{1}{4}$. Wir erhalten Endschema U und L als:

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Permuationsmatrix P, so daß $PA = LU$

Verfolge Zeilenvertauschungen:

1. Schritt: $\pi = (1, 2, 3)$
2. Schritt: $\pi = (2, 1, 3)$
3. Schritt: $\pi = (2, 3, 1)$

Wir erwarten, daß wir eine LU-Zerlegung der folgenden Matrix berechnet haben:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A_{2,:} \\ A_{3,:} \\ A_{1,:} \end{pmatrix}$$

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow P := P_\pi^{-1} = P_\pi^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, daß $PA = \widetilde{A}$ und

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 8.75 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 5 & 6.5 \end{pmatrix} = PA$$