Vorwärtsstabilität: Beispiele

Funktion: $\varphi = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1$

Stabilitätsindikator: $\sigma = 1 + \kappa_k + \kappa_k\kappa_{k-1} + \cdots + \kappa_k\kappa_{k-1}\cdots\kappa_1$

Auswertung von $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ für kleine x: auf zwei Arten:

Alg I: $$x \overset{\varphi_1}{\mapsto} (1+x, 1-x) \overset{\varphi_2}{\mapsto} (\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}) \overset{\varphi_3}{\mapsto} \underbrace{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}_{\text{Auslöschung}}$$

Alg II: $$x \overset{\varphi_1}{\mapsto} (2x, 1+x, 1-x) \overset{\varphi_2}{\mapsto} (2x, \sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}) \overset{\varphi_3}{\mapsto} \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

Bei Alg I ist κ_3 groß. Bei Alg II sind alle Teilkonditionen κ_i moderat.

MAPLE: mit Digits = 5 liefert für $x = 10^{-6}$ im ersten Fall 0.00000 und im zweiten Fall $0.10000 \cdot 10^{-5}$.

"versteckte" Auslöschung am Bsp von $\varphi(x) = \ln(1+x)$ für kleine x

- Das Problem ist gut konditioniert:

$$\kappa_{rel} = \frac{x}{\varphi(x)}\varphi'(x) \to 1 \qquad \text{für } x \to 0$$

- Numerik: MATLAB liefert für $x = 10^{-16}$ den Wert `log`$(1+x) = 0$.
- Analyse: Algorithmische Realisierung mittels "Standardfunktionen":

$$\varphi : x \stackrel{\varphi_1}{\mapsto} 1+x \stackrel{\varphi_2}{\mapsto} \ln(1+x)$$

  Für den Stabilitätsindikator $\sigma = 1 + \kappa_2 + \kappa_2\kappa_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\approx 1 \qquad \text{bei } x = 0 \\ \kappa_2 &= \frac{y}{|\varphi_2(y)|}|\varphi_2'(y)| = \frac{1}{\ln y} \qquad \text{groß für } y \text{ nahe bei } 1 \end{aligned}$$

- Abhilfe: z.B. Verwendung von Taylorentwicklung:
  $\varphi(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ (geeignet abgebrochen)

Beispiel $\varphi(x) = \ln(1+x)$: Simulation der Gleitkommaarithmetik

Annahmen an die Gleitkommaarithmetik:

- $x \,\mathtt{op}^*\, y = (x \,\mathtt{op}\, y)(1+\delta)$ für ein $\delta = \delta(x,y)$ mit $|\delta| \le \mathtt{eps}$
- $\mathtt{ln}^* y = (1+\delta)\ln y$ für ein $\delta = \delta(y)$ mit $|\delta| \le \mathtt{eps}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathtt{ln}^*(1 +^* x) &= \mathtt{ln}^*\left[(1+x)(1+\delta_1)\right] \\
&= (1+\delta_2)\ln\left[(1+x)(1+\delta_1)\right] \\
&= (1+\delta_2)\ln(1+x) + (1+\delta_2)\ln(1+\delta_1)
\end{aligned}$$

und damit für den relativen Fehler

$$\left|\frac{\mathtt{ln}^*(1 +^* x) - \ln(1+x)}{\ln(1+x)}\right| = \left|\delta_2 + \underbrace{\frac{(1+\delta_2)\ln(1+\delta_1)}{\ln(1+x)}}_{\text{groß für } x \text{ klein (und } \delta_1 \neq 0)}\right|$$

Vorwärtsstabilität: Varianzbestimmung

$$\text{Alg I} \qquad V = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1}$$

$$\text{Alg II} \qquad V = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \tag{2}$$

Vorteil von Formel (2): 1 Datendurchgang anstelle von 2 (man denke an große Datensätze!)

Nachteil von Formel (2): Instabiler als (1)

Beispiel: $n = 3$, $x_1 = 10000$, $x_2 = 10001$, $x_3 = 10002$. D.g.: $V = 1$.
Ein `C`-Programm mit "single precision" (alle Zahlen sind vom Typ float) liefert:

$V_{(1)} = 1$ (korrekt!) und $V_{(2)} = -1.5$ (sogar VZ ist falsch).

Vorwärtsstabilität: Varianzbestimmung (Forts.)

$$\text{Alg I} \qquad V = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\text{Alg II} \qquad V = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$\text{Alg I} \quad (x_i) \overset{\varphi_1^I}{\longmapsto} (x_i, \overline{x}) \overset{\varphi_2^I}{\longmapsto} (x_i - \overline{x}) \overset{\varphi_3^I}{\longmapsto} \sum (x_i - \overline{x})^2$$

$$\text{Alg II} \quad (x_i) \overset{\varphi_1^{II}}{\longmapsto} \left(\sum x_i^2, \sum x_i\right) \overset{\varphi_2^{II}}{\longmapsto} \sum x_i^2 - \tfrac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2$$

Stabilitätsind. $\quad \sigma^I = 1 + \kappa_3^I + \kappa_3^I\kappa_2^I + \kappa_3^I\kappa_2^I\kappa_1^I, \qquad \sigma^{II} = 1 + \kappa_2^{II} + \kappa_2^{II}\kappa_1^{II}$

Kond. der Addition $x + y$: $\quad \kappa_{rel} = \dfrac{|x| + |y|}{|x + y|}$

Vorwärtsstabilität: Varianzbestimmung (Forts.)

$$\begin{array}{llclclcl}
\text{Alg I} & (x_i) & \overset{\varphi_1^I}{\longmapsto} & (x_i, \overline{x}) & \overset{\varphi_2^I}{\longmapsto} & (x_i - \overline{x}) & \overset{\varphi_3^I}{\longmapsto} & \sum (x_i - \overline{x})^2 \\
\text{Alg II} & (x_i) & \overset{\varphi_1^{II}}{\longmapsto} & (\sum x_i^2, \sum x_i) & \overset{\varphi_2^{II}}{\longmapsto} & \sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2 & &
\end{array}$$

Kondition der Addition $x + y$: $\qquad \kappa_{rel} = \dfrac{|x| + |y|}{|x + y|}$

Zahlenbeispiel:

$$x = [10000; 10001; 10002], \qquad \overline{x} = 10001, \qquad \sum_i x_i^2 \approx 3 \cdot 10^8$$

$$\kappa_{rel}(\varphi_2^I) \approx \frac{2 \cdot 10^4}{1} \to \sigma = O(10^4)$$

$$\kappa_{rel}(\varphi_2^{II}) \approx \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^8}{2} \to \sigma = O(10^8)$$

In “single precision” (ca. 8 geltende Ziffern) kann man also nicht erwarten, daß Alg II auch nur eine korrekte Ziffer liefert.