Numerik1 Übung - Serie2

Samuel Ferraz-Leite

2.1 (schriftlich)

a.) **Behauptung 1.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Dann ist A regulär.*

*B*eweis: Wir zeigen zunächst A ist injektiv: Sei $Ax = 0$. Dann ist trivialerweise $x^T Ax = 0$ und damit, wegen A positiv definit, $x = 0$. Aus $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear und injektiv folgt mit dem Dimensionssatz sofort A bijektiv, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. □

Behauptung 2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Dann gilt $A_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.*

*B*eweis: Es gilt laut Definition $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sei e_i der i-te kanonische Einheitsvektor. Dann gilt $e_i^T Ae_i = A_{ii}$ und somit $A_{ii} > 0$. □

b.) **Behauptung 1.** *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD gilt stets die Abschätzung $|A_{ij}| \leq \frac{1}{2}(A_{ii} + A_{jj})$.*

*B*eweis: Für $i = j$ ist laut a.) Behauptung 2 nichts zu zeigen. Sei also $i \neq j$. Bezeichne e_i den i-ten kanonischen Einheitsvektor. Wir definieren $e := e_i + e_j$. Aus der positiven Definitheit von A folgt

$$0 < e^T Ae = A_{ii} + A_{jj} + A_{ji} + A_{ij}.$$

Aus der Symmetrie von A folgt somit die Ungleichung

$$-2A_{ij} < A_{ii} + A_{jj}. \tag{1}$$

Analog erhält man aus $\widetilde{e}^T A\widetilde{e} > 0$ mit $\widetilde{e} = e_i - e_j$ die Ungleichung

$$2A_{ij} < A_{ii} + A_{jj}. \tag{2}$$

Schließlich folgt aus (1) und (2) die Behauptung. □

Behauptung 2. *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD gilt* $\max_{i,j} |A_{ij}| = \max_i |A_{ii}|$.

*B*eweis: Aus der oben bewiesenen Ungleichung folgt

$$|A_{ij}| \leq \frac{1}{2}(A_{ii} + A_{jj}) \leq \max\{A_{ii}, A_{jj}\} \leq \max_k A_{kk}.$$

Insbesondere gilt somit $\max_{i,j} |A_{ij}| \leq \max_i |A_{ii}|$. □

c.) **Behauptung 1.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Dann ist jede Hauptuntermatrix $A_k = (A_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ positiv definit.*

*B*eweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Wir definieren $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Für $x \neq 0$ ist insbesondere $\widetilde{x} \neq 0$. Somit gilt mit der positiven Definitheit von A

$$x^T A_k x = \widetilde{x}^T A\widetilde{x} > 0$$

für $x \neq 0$, wobei $A_k = (A_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die k-te Hauptuntermatrix von A bezeichnet. Die Ungleichung $x^T A_k x > 0$ für alle $x \neq 0$ bedeutet definitionsgemäß die positive Definitheit von A_k. □

*B*emerkung: Aus der eben bewiesenen Behauptung sowie a.) folgt die Aussage der Angabe. Die Hauptuntermatrizen sind regulär. Es existiert somit laut VO für eine positiv definite Matrix eine eindeutige normalisierte LU-Zerlegung.