Bemerkungen zum Ableitungsbegriff

- Verallgemeinerung eines Begriffes impliziert meist, daß nur gewisse Eigenschaften beibehalten werden können
  - Begriff der schwachen Ableitung:
    * Beibehaltung der Formel der partiellen Integration
    * gewisse “intuitive” Konzepte: $\nabla u = 0 \Longrightarrow u = const.$

- Verallgemeinerung in 1-d oder multi-d?

- Ableitungsbegriff auf Ω:
  - will man ihn “genuin” auf Ω definieren? ($\rightarrow$ potentiell technische Probleme in Randnähe)
  - oder definiert man in auf $\mathbb{R}^d$ und schränkt dann auf Ω ein? ($\rightarrow$ Problem der intrinsischen Definition auf Ω)

- Gott sei Dank: die meisten Ideen für Verallgemeinerungen des Ableitungsbegriffs, die “überlebt” haben, führen auf die gleichen oder sehr ähnliche Räume

Ideen für Definition von u':

- u' existiert klassische f.ü.: keine gute Definition: $u' = 0$ impliziert nicht $u = const.$

- auf $\mathbb{R}$: Differenzenquotienten im L^p:

$$u'(x) = \lim \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \qquad \text{im } L^p(\mathbb{R})$$

- auf beschränktem Ω mittels Differenzenquotienten:
  - Idee: betrachte Funktionen auf $\mathbb{R}$, definiere dort u' mittels Differenzenquotienten (im L^p-Sinn) und schränke auf Ω ein
  - Idee: betrachte Funktionen auf Ω und entsprechend Differenzenquotienten (im L^p-Sinn) auf Mengen $\Omega_h = \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > h\}$

- Begriff der schwachen Ableitung und fordern, daß die Ableitung in L^p

- Abschluß von $C^\infty(\Omega)$ unter einer Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^k}$

Ideen für Definition von ∇u in multi-d

- Begriff der schwachen Ableitung und fordern, daß die Ableitung in L^p
- Abschluß von $C^\infty(\Omega)$ unter einer Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^k}$
- Banachraumwertige Differentiation

  Bsp: $\Omega = I \times I \subset \mathbb{R}^2$.

  Fubini: $u \in L^2(I \times I; \mathbb{R}) \Longleftrightarrow u \in L^2(I; L^2(I))$.

  Idee: betrachte die Funktionen $u \in L^2(I; L^2(I))$, so daß auch ihre B-Raum-Ableitung $u' \in L^2(I; L^2(I))$.

  Fakt:

$$u \in H^1(I \times I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \in L^2(I; H^1(I)) \cap H^1(I; L^2(I))$$

Konzept der "smoothness class"

- Ausgangspunkt: auch Konzept der Ableitung mißt für kleine $|h|$ die Größe von

$$|u(x+h) - u(x)|$$

- Lipschitz und Hölderklassen: Kontrolle von

$$\|u\|_{C^{0,s}} := \sup_{t>0} \sup_{|h|\leq t} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})}}{|h|^s}$$

- für $p \in [1, \infty)$ kann man auch messen:

$$\|u\|_{B_p^{0,s}} := \sup_{t>0} \sup_{|h|\leq t} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{L^p})}{|h|^s}$$

eine Variante: statt $\sup$ in t eine Integrierbarkeitsforderung:

$$\int_{t=0}^{1} t^{-1-q} \sup_{|h|\leq t} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{L^p}}{|h|^s} \, dt \qquad q \geq 0$$