



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Simpliziale Mengen

ausgeführt am
Institut für Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von ao. Univ. Prof. Dr. Wolfgang HERFORT

durch

Philipp Strebl
Edi-Finger-Straße 2/4/47
1210 Wien

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 2 | Simpliziale Mengen | 3 |
| 2.1 | Konstruktion | 3 |
| 2.2 | Simplizialkomplexe | 8 |
| 2.3 | Friedmans Notation | 14 |
| 2.3.1 | Colimiten simplizialer Mengen | 17 |
| 3 | Der Kantsche Ex-Funktor | 20 |
| 3.1 | Realisierung | 20 |
| 3.2 | Unterteilung | 23 |
| 3.3 | Kan-Komplexe und Ex-Funktor | 28 |
| 3.3.1 | Homotopie | 28 |
| 3.3.2 | Kan-Bedingung | 29 |
| 3.3.3 | Die 2-Struktur von $\text{Ex } \Delta^1$ | 32 |
| A | Kategorien | 38 |
| A.1 | Komma-Kategorien | 38 |
| A.2 | Colimiten | 38 |
| | Literaturverzeichnis | 42 |

Kapitel 1

Einleitung

Ausgehend von einer Arbeit von FRIEDMAN versuchen wir, die Idee der simplizialen Menge – auch anhand von Beispielen – näherzubringen. Zunächst wird gezeigt, wie abstrakte Simplizialkomplexe, die einfach zugänglich sind, als simpliziale Mengen aufgefasst werden können.

Ein Grund für die Entwicklung der Konstruktion der simplizialen Menge (bei EILENBERG und ZILBER, KAN) war das Bestreben, ein algebraisch-kombinatorisches Modell für die Homotopietheorie der CW-Komplexe zur Verfügung zu haben. Dies ist gelungen (siehe [5], Theorem I.11.4).

Um jedoch eine solche kombinatorische Theorie zu entwickeln ist es nötig, sich auf die heute als Kan-Komplexe bezeichneten simplizialen Mengen zu beschränken. Leider sind alle (interessanten) abstrakten Simplizialkomplexe keine Kan-Komplexe.

Diese Einschränkung und ihre Gründe werden im zweiten Teil der Arbeit dargestellt. Weiters skizzieren wir eine von KAN vorgeschlagene Methode, eine beliebige gegebene simpliziale Menge in einen Kan-Komplex einzubetten. Erst hierdurch wird die Kantsche Homotopietheorie allgemein anwendbar.

Ziel der Arbeit ist es, die geometrische Intuition sowohl für simpliziale Mengen allgemein als auch für ihre „Kanifizierung“ zu wecken, ohne auf Präzision zu verzichten.

Kapitel 2

Simpliziale Mengen

Wir geben in diesem Kapitel eine – hoffentlich detaillierte und verständliche – Einführung in die Theorie der simplizialen Mengen. Wir beginnen dabei nach einem kurzen Überblick bei der axiomatischen Definition.

Der einführende Text [4] von FRIEDMAN gibt viele gute Verbindungen zur Geometrie, es bleiben aber einige Dinge – die vielleicht für eingefleischte Topologen selbstverständlich sind – unerklärt und es ist schwierig, die Ebenen Visualisierung, Realisierung, topologische und kombinatorische Beschreibung auseinanderzuhalten. Unser erstes Kapitel besteht im wesentlichen darin, die Notation, die FRIEDMAN verwendet, exakt zu erklären.

Wir folgen dabei dem Aufbau in [5]. Wir starten ganz auf der algebraischen Seite, ohne jeglichen geometrischen Anspruch, versuchen aber, die in [5] als trivial angenommenen Lücken zu füllen und ein paar Dinge zu ergänzen.

2.1 Konstruktion

Definition 2.1.1. Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $[n]$ die Kategorie, deren Objekte durch die Zahlen $0, 1, \dots, n$ und deren Morphismen durch die gewöhnliche Halbordnung \leq auf diesen Zahlen gegeben sind. Genauer:

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$$
$$\text{hom}_{[n]}(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & a > b \\ \{(a, b)\}, & a \leq b \end{cases}$$

Die Verknüpfung von Morphismen $(a, b) \in \text{hom}_{[n]}(a, b)$ und $(b, c) \in \text{hom}_{[n]}(b, c)$ ist $(a, c) \in \text{hom}_{[n]}(a, c)$.

Definition 2.1.2. Die Objekte der Kategorie Δ sind alle Kategorien $[n]$, die Morphismen alle Funktoren dieser Kategorien. In Zeichen:

$$\Delta = \{[n] : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\text{hom}_{\Delta}([m], [n]) = \{f : f \text{ ist Funktor von } [m] \text{ nach } [n]\}$$

Wir bemerken, dass die Morphismen der Kategorie Δ die ordnungserhaltenden, sprich monotonen, Funktionen sind:

Lemma 2.1.3. *Sei*

$$f : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

eine Funktion. Ist $\text{hom}_{[m]}(a, b) \neq \emptyset$, dann setze $f((a, b)) := (f(a), f(b))$. Damit gilt: f ist genau dann ein Funktor von $[m]$ nach $[n]$, wenn f monoton ist.

Beweis. Sei f nicht monoton und nehmen wir an, f wäre ein Funktor. Es gibt a, b mit $0 \leq a \leq b \leq m$ und $f(a) > f(b)$. Es gilt $(a, b) \in \text{hom}_{[m]}(a, b)$ und wegen der Funktoreigenschaft $(f(a), f(b)) = f((a, b)) \in \text{hom}_{[n]}(f(a), f(b))$, aber wegen $f(a) > f(b)$ ist $\text{hom}_{[n]}(f(a), f(b)) = \emptyset$, ein Widerspruch.

Sei nun f monoton, $(a, b) \in \text{hom}_{[m]}(a, b)$ und $(b, c) \in \text{hom}_{[m]}(b, c)$. Es folgt $a \leq b \leq c$ und wegen der Monotonie $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$. Die Zuordnung $f((a, b)) = (f(a), f(b))$ ist nun zulässig und sogar eine bijektive Funktion und es gilt

$$\begin{aligned} f((b, c) \circ (a, b)) &= f((a, c)) = (f(a), f(c)) \\ &= (f(b), f(c)) \circ (f(a), f(b)) \\ &= f((b, c)) \circ f((a, b)). \end{aligned}$$

Weiters ist $f(\text{id}_{[m]}(a)) = f((a, a)) = (f(a), f(a)) = \text{id}_{[n]}(f(a))$, also ist f ein Funktor. \square

Die obige Aussage gilt sinngemäß für alle als Kategorien geschriebenen Halbordnungen: Ihre Funktoren sind stets die monotonen Funktionen. Wir betrachten nun spezielle Morphismen in Δ , nämlich

$$d^i : [n] \rightarrow [n+1], \quad d^i(k) = \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \geq i \end{cases}, \quad 0 \leq i \leq n+1$$

und

$$s^j : [n+1] \rightarrow [n], \quad s^j(k) = \begin{cases} k, & k \leq j \\ k-1, & k > j \end{cases}, \quad 0 \leq j \leq n$$

wobei $n \in \mathbb{N}$. Genaugenommen müssten wir hier unterscheiden, welches n gerade gemeint ist und etwas wie $d_2^1 : [2] \rightarrow [3]$ oder $s_4^0 : [5] \rightarrow [4]$ notieren. Dies würde die Notation aber sehr unübersichtlich machen.

Lemma 2.1.4. *Es gelten die folgenden sogenannten kosimplizialen Identitäten:*

$$\begin{aligned} d^j \circ d^i &= d^i \circ d^{j-1}, & i < j \\ s^j \circ d^i &= \begin{cases} d^i \circ s^{j-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j, i = j+1 \\ d^{i-1} \circ s^j, & i > j+1 \end{cases} \\ s^j \circ s^i &= s^i \circ s^{j+1}, & i \leq j \end{aligned}$$

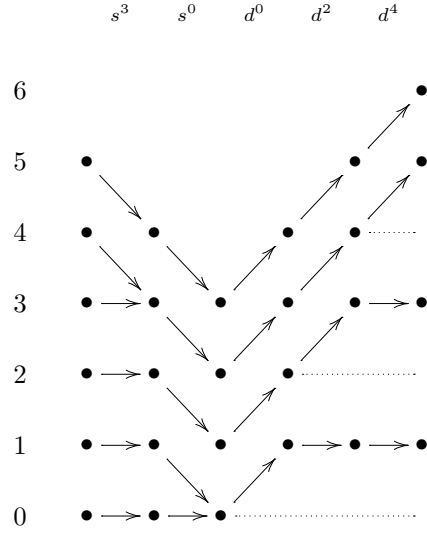


Abbildung 2.1: $f = d^4 \circ d^2 \circ d^0 \circ s^0 \circ s^3 : [5] \rightarrow [6]$

Beweis. Der Beweis ist elementar. Sei $i < j$.

$$d^j \circ d^i(k) = \begin{cases} d^j(k) = k, & k < i \\ d^j(k+1) = \begin{cases} k+1, & i \leq k < j-1 \\ k+2, & k \geq j-1 \end{cases} \end{cases}$$

Auf der anderen Seite ist

$$d^i \circ d^{j-1}(k) = \begin{cases} d^i(k+1) = k+2, & k \geq j-1 \geq i \\ d^i(k) = \begin{cases} k+1, & i \leq k < j-1 \\ k, & k < i \end{cases} \end{cases}$$

Die restlichen Fälle können analog gerechnet werden. □

Lemma 2.1.5. *Sei $f \in \text{hom}_\Delta([m], [n])$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Indizes $i_1 > \dots > i_r$ und $j_1 < \dots < j_s$ mit*

$$f = d^{i_1} \circ \dots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \dots \circ s^{j_s}.$$

Beweis. (Nach [9], S. 4.) Dazu seien $j_1 < \dots < j_s$ jene Elemente in $[m]$ mit $f(j_k) = f(j_k + 1)$. Weiters seien $i_1 > \dots > i_r$ jene Elemente in $[n]$, die nicht als Bild von f auftreten, also $f([m]) = [n] \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$. Die Abbildung $s^{j_1} \circ \dots \circ s^{j_s}$ fasst sozusagen alle Elemente in $[m]$ zusammen, die unter f das gleiche Bild haben, das nachgeschaltete $d^{i_1} \circ \dots \circ d^{i_r}$ spart die Elemente aus, die keine Bilder sind. Möglicherweise ist Abbildung 2.1 hilfreich.

Die Eindeutigkeit der Darstellung ergibt sich wie folgt. Seien

$$f_1 = d^{i_1} \circ \dots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \dots \circ s^{j_s} = f = d^{i'_1} \circ \dots \circ d^{i'_u} \circ s^{j'_1} \circ \dots \circ s^{j'_v} = f_2$$

zwei Darstellungen von f wie oben. Aus dem Beweis der Existenz der Faktorisierung folgt $r = u$ und $s = v$. Ist $i_k \neq i'_k$, dann ist

$$f_1([m]) = [n] \setminus \{i_1, \dots, i_r\} \neq [n] \setminus \{i'_1, \dots, i'_r\} = f_2([m]),$$

ein Widerspruch. Ist $j_k \neq j_{k'}$, sagen wir $j_k < j_{k'}$ mit k minimal, dann ist

$$s^{j_1} \circ \dots \circ s^{j_s}(j_k + 1) = j_k - k + 1 \neq j_k - k + 2 = s^{j'_1} \circ \dots \circ s^{j'_s}(j_k + 1).$$

Da die d^i injektiv sind, ergibt sich wieder ein Widerspruch. Also ist die Darstellung eindeutig. \square

Definition 2.1.6. Eine *simpliziale Menge* ist ein kontravarianter Funktor

$$X : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Versuchen wir, diese Definition *etwas* konkreter zu machen. Der Funktor X ordnet jedem $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Menge $X_n := X([n])$ zu. Eine simpliziale Menge definiert also eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen. Die Morphismen dieser Mengen – also mengentheoretische Abbildungen – verlaufen in die entgegengesetzte Richtung wie ihre Urbilder in Δ , die monotonen Funktionen $[m] \rightarrow [n]$. Speziell für die Morphismen $d_i := X(d^i)$ und $s_j := X(s^j)$ gelten aufgrund der Funktoreigenschaft die folgenden sogenannten *simplizialen Identitäten*.

Lemma 2.1.7. *Sei X eine simpliziale Menge und $d_i = X(d^i)$ sowie $s_j = X(s^j)$, dann gilt*

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ \text{id}_{X_n}, & i = j, i = j + 1 \\ s_j \circ d_{i-1}, & i > j + 1 \end{cases} \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i, & i \leq j \end{aligned}$$

Beweis. Dies ergibt sich aus den kosimplizialen Identitäten in Δ . Nehmen wir zum Beispiel den Fall $i < j$:

$$d_i \circ s_j = X(d^i) \circ X(s^j) = X(s^j \circ d^i) = X(d^i \circ s^{j-1}) = s_{j-1} \circ d_i.$$

Alle anderen Fälle verlaufen analog. \square

Definition 2.1.8. Die simplizialen Mengen bilden mit ihren natürlichen Transformationen eine Kategorie, die wir mit **sSet** bezeichnen.

Eine natürliche Transformation zweier Funktoren $X, Y : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$ ist eine Familie $\{\tau_{[n]} : [n] \in \Delta\}$ mit $\tau_{[n]} : X([n]) \rightarrow Y([n])$ und

$$\tau_{[n]} \circ X(f) = Y(f) \circ \tau_{[m]}$$

für alle $[m], [n] \in \Delta$ und $f \in \text{hom}_\Delta([m], [n])$. Anders gesagt ist $\text{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ die Menge aller Folgen $\tau := (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_n : X_n \rightarrow Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und jedes $f \in \text{hom}_\Delta([m], [n])$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{X(f)} & X_m \\ \tau_n \downarrow & & \downarrow \tau_m \\ Y_n & \xrightarrow{Y(f)} & Y_m \end{array}$$

kommutiert. Die natürlichen Transformationen simplizialer Mengen heißen *simpliziale Abbildungen* oder im gegebenen Zusammenhang einfach nur *Abbildungen* (in Abgrenzung zu mengentheoretischen *Funktionen*).

Definition 2.1.9. Sei $X \in \mathbf{sSet}$. Ein Element $\alpha \in X_n$ heißt *n-Simplex* und n die *Dimension* von α . Gibt es einen $(n+1)$ -Simplex β mit $\alpha = d_i(\beta)$ für irgendein i , so heißt α *Seite* von β . Ist $\alpha = X(f)(\beta)$ für einen Morphismus $f : [n] \rightarrow [m]$ und irgendein $\beta \in X_m$, dann sagen wir, dass α auf β liegt. Gibt es ein $\beta \in X_{n-1}$ und ein j , sodass $\alpha = s_j(\beta)$, so heißt α *degeneriert*. Die Abbildungen s_j heißen Entartungen.

Jeder degenerierte Simplex ist (fortgesetzte) Entartung eines eindeutig bestimmten nicht degenerierten:

Lemma 2.1.10. Sei $X \in \mathbf{sSet}$ und $\alpha \in X_n$ degeneriert. Dann gibt es ein eindeutiges m , ein eindeutiges nicht degeneriertes $\beta \in X_m$ und eindeutig bestimmte $j_1 > \dots > j_{n-m}$, sodass $\alpha = s_{j_1} \dots s_{j_{n-m}}(\beta)$.

Wir nennen β den *nicht degenerierten Anteil* von α .

Beweis. Die Existenz ist klar. Nehmen wir an, die Eindeutigkeit wäre verletzt. Dann können wir ein α mit zwei verschiedenen solchen Darstellungen $\alpha = s_{i_1} \dots s_{i_k}(\beta)$ und $\alpha = s_{j_1} \dots s_{j_l}(\gamma)$ wählen, sodass n minimal ist. Es ist $n > 0$, denn alle 0-Simplizes sind natürlich nicht degeneriert. Nehmen wir an, dass k und l größer 1 sind, dann ist

$$d_{i_1}(\alpha) = s_{i_2} \dots s_{i_k}(\beta) = d_{i_1} s_{j_1} \dots s_{j_l}(\gamma).$$

Wäre $i_1 = j_1$ oder $i_1 = j_1 + 1$, so hätten wir rechts $d_{i_1} s_{j_1} = \text{id}_{[n-1]}$, im Widerspruch zur Minimalität von n . Ist aber $i_1 \neq j_1$ und $i_1 \neq j_1 + 1$, so vertauschen rechts d_{i_1} und s_{j_1} gemäß den simplizialen Identitäten, wieder im Widerspruch zur Minimalitätsannahme. Also ist z.B. $k = 1$. Nun ist aber auch $l = 1$, da wir sonst wie vorher sehen würden, dass β degeneriert ist. Wir haben also $d_{i_1}(\alpha) = \beta = d_{i_1} s_{j_1}(\gamma)$. Wäre $i_1 \neq j_1$ und $i_1 \neq j_1 + 1$, so wäre β wieder degeneriert. Wäre $i_1 = j_1 + 1$, so folgte $d_{j_1}(\alpha) = d_{j_1} s_{j_1+1}(\beta) = s_{j_1} d_{j_1}(\beta) = \gamma$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $i_1 = j_1$ und $\beta = \gamma$. \square

Aus Lemma 2.1.10 folgt, dass eine natürliche Transformation $\tau : X \rightarrow Y$ bereits durch ihre Werte auf den nicht degenerierten Simplizes von X eindeutig festgelegt ist, denn für beliebiges α wie oben ist

$$\tau_n(\alpha) = \tau_n(s_{j_1} \dots s_{j_{n-m}}(\beta)) = s_{j_1} \dots s_{j_{n-m}}(\tau_{n-m}(\beta)).$$

Nützlich und für die geometrische Intuition wichtig ist auch die Beobachtung

Lemma 2.1.11. *Sind alle Seiten eines Simplex' verschieden, so ist er nicht degeneriert.*

Beweis. Ist der Simplex α degeneriert, $\alpha = s_j(\beta)$, dann gilt $d_j(\alpha) = d_j s_j(\beta) = d_{j+1} s_j(\beta) = d_{j+1}(\alpha)$, also sind nicht alle Seiten von α verschieden. \square

Ist X eine simpliziale Menge, so heißt Y (*simpliziale*) *Untermenge* von X , wenn $Y_n \subseteq X_n$, $n \in \mathbb{N}$, und für alle m, n und $f : [m] \rightarrow [n]$ sowie für alle $\alpha \in Y_m$ gilt, dass $Y(f)(\alpha) = X(f)(\alpha) \in Y_n$.

Haben wir eine simpliziale Menge X und Simplizes $\alpha_i \in X_{n_i}$, $i \in I$, dann können wir die von den α_i erzeugte Untermenge Y betrachten. Diese beinhaltet alle Simplizes, die auf den α_i liegen, das heißt

$$Y_m = \{X(f)(\alpha_i) : i \in I \text{ und } f : [m] \rightarrow [n_i]\}.$$

Benötigt wird auch noch die Definition des Produkts zweier simplizialer Mengen.

Definition 2.1.12. Seien X und Y simpliziale Mengen. Dann ist $X \times Y$ durch $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ gegeben. Für $f : [m] \rightarrow [n]$ ist $(X \times Y)(f) : X_m \times Y_m \rightarrow X_n \times Y_n$ die Funktion $(x, y) \mapsto (X(f)(x), Y(f)(y))$.

2.2 Simplizialkomplexe

Erste Beispiele von simplizialen Mengen – bei denen wir auch sehen können, dass es sich tatsächlich um simpliziale Mengen handelt – liefern die geordneten Simplizialkomplexe.

Definition 2.2.1. Ein *geometrischer Simplizialkomplex* K ist eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n , die sich als Vereinigung $K = \bigcup_{i \in I} \text{conv}(S_i)$ konvexer Hüllen endlicher Punktmenge $S_i \subset \mathbb{R}^n$ schreiben lässt. Dabei ist $\text{conv}(S_i) \cap \text{conv}(S_j) = \text{conv}(S)$ für $i, j \in I$, mit einer Menge $S \subseteq S_i, S_j$.

Die konvexe Hülle einer Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit $|S| = k + 1 \leq n$ wird auch als *k-dimensionaler Simplex* bezeichnet. Eine Möglichkeit, einen geometrischen Simplizialkomplex rein kombinatorisch zu beschreiben, ist

Definition 2.2.2. Ein (*abstrakter*) *Simplizialkomplex* K ist ein System von endlichen Teilmengen einer Menge $V_K = \bigcup K$, für die gilt

$$S \subseteq T \in K \Rightarrow S \in K.$$

Ist auf V_K zusätzlich eine Totalordnung gegeben, sprechen wir von einem *geordneten (abstrakten) Simplizialkomplex*.

Wir verkürzen die Sprechweise und meinen mit *Simplizialkomplex*, wenn nicht anders vermerkt, stets *abstrakter Simplizialkomplex*. Die „geeigneten“ Abbildungen von Simplizialkomplexen werden auf V_K , der Knotenmenge, definiert:

Definition 2.2.3. Sind K und L Simplizialkomplexe, so bezeichnen wir eine Abbildung $\varphi : V_K \rightarrow V_L$ als *Abbildung von Simplizialkomplexen*, wenn

$$S \in K \Rightarrow \varphi(S) \in L$$

gilt. Sind K und L geordnet, muss weiters für alle $S \in K$ die Einschränkung $\varphi|_S$ monoton sein.

Natürlich gibt es durch das Ordnen mehr Simplizialkomplexe und weniger zulässige Abbildungen. Wieviele Abbildungen verlieren wir? Ist $\varphi : K \rightarrow L$ eine Abbildung von Simplizialkomplexen und L geordnet, so können wir in einfacher Weise auf V_K eine Totalordnung definieren, sodass φ sogar monoton auf V_K ist. Ordne dazu $\varphi^{-1}(w)$ beliebig für jedes $w \in V_L$ und für $\varphi(v) < \varphi(v')$ setze $v < v'$. Andererseits können wir im allgemeinen keine Ordnung auf V_L definieren, die ein vorgegebenes φ monoton macht, wenn V_K linear geordnet ist. Dies zeigt

Beispiel 2.2.4. Sei $K = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ mit $0 < 1 < 2$ und $L = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$. Ist $\varphi(0) = \varphi(2) = a$ und $\varphi(1) = b$, so ist φ Abbildung von Simplizialkomplexen, doch gibt es keine Halbordnung auf V_L , sodass $\varphi|_S$ monoton für $S \in K$, denn es würde $a = \varphi(0) \leq \varphi(1) = b \leq \varphi(2) = a$ gelten.

Die Klasse der geordneten Simplizialkomplexe bildet mit den obigen Abbildungen eine Kategorie, die wir mit **osC** bezeichnen. Wir zeigen, dass diese genau jenen simplizialen Mengen entsprechen, die sich in einfacher Weise als Folgen von hom-Mengen darstellen lassen.

Wir definieren dazu eine Unterkategorie $\mathbf{H} \subset \mathbf{sSet}$. Für $X \in \mathbf{H}$ ist X_n eine Menge von Morphismen (monotonen Funktionen) in der Kategorie **Pos** der Halbordnungen:

$$X_n \subseteq \text{hom}_{\mathbf{Pos}}([n], V_X),$$

wobei (V_X, \leq) irgendeine Totalordnung ist. Elemente in X_n sind also im Prinzip $(n+1)$ -stellige Vektoren mit monoton aufsteigenden Einträgen aus V_X . Für jeden Morphismus $f : [m] \rightarrow [n]$ setzen wir

$$X(f) : \begin{cases} X_n & \rightarrow & X_m \\ \alpha & \mapsto & \alpha \circ f, \end{cases}$$

wodurch sich die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} [k] & \xrightarrow{f} & [m] & \xrightarrow{g} & [n] \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & X(g)(\alpha) & & \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & V_X & & \end{array}$$

$X(f)(X(g)(\alpha))$ α

und daraus wiederum $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$ ergibt. Wir müssen die X_n so wählen, dass diese Definition der Morphismen sinnvoll ist. Dazu fordern wir induktiv $X_0 = \text{hom}_{\mathbf{Pos}}([0], V_X)$ sowie für $n > 0$ und die oben definierten Morphismen $s_j(X_n) \subseteq X_{n+1}$, $j = 0, \dots, n$ und $d_i(X_{n+1}) \subseteq X_n$, $i = 0, \dots, n+1$. Damit ist X ein kontravarianter Funktor $\Delta \rightarrow \mathbf{Set}$, eine simpliziale Menge. Die Elemente von \mathbf{H} nennt CURTIS *polyedrische* simpliziale Mengen (siehe [2], 11.2).

Beispiel 2.2.5. Das Paradebeispiel für polyedrische simpliziale Mengen sind die *simplizialen n -Simplizes*

$$\Delta^n := \text{hom}_\Delta(-, [n]).$$

Hier ist $V_{\Delta^n} = [n]$, ein k -Simplex von Δ^n ist ein Wertevektor $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ mit $0 \leq \alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_k \leq n$ und $\alpha(i) = \alpha_i$, $i \in [k]$.¹ An manchen Stellen schreiben wir statt des Vektors $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ nur das Wort $\alpha_0 \dots \alpha_k$, also z. B. statt $(0, 2, 3)$ nur 023.

Beispiel 2.2.6. Wir wählen V_X als entsprechende Teilmenge des Alphabets $A < B < C < \dots$ und schreiben Elemente in X_n , also Abbildungen $[n] \rightarrow V_X$, als Wörter mit $n+1$ Buchstaben, die jeweils alphabetisch aufsteigend geordnet sind. Das erinnert nicht zufällig an aus der Mittelschule vertraute Notationen.

Sei $V_X := \{A, B\}$. Durch $X_0 := \{A, B\} = \{(0 \mapsto A), (0 \mapsto B)\}$, $X_1 := \{AB, AA, BB\}$ und die induktive Definition $X_{n+1} := \bigcup_{j=0}^n s_j(X_n)$, $n \geq 1$, erhalten wir eine simpliziale Menge. Warum? Es ist

$$s_0(A) = (0 \mapsto A) \circ (s^0 : [1] \rightarrow [0]) = ([1] \mapsto A) = AA.$$

Also ist $s_0(X_0) \subseteq X_1$. Wir haben auch $d_0(AA) = d_1(AA) = d_1 s_0(A) = \text{id}_{X_0}(A) = A \in X_0$ und

$$d_0(AB) = (0 \mapsto A, 1 \mapsto B) \circ d^0 = ([0] \mapsto B) = B \in X_0,$$

daher $d_i(X_1) \subseteq X_0$. Wegen $d_j s_j = \text{id}_{X_n}$ sind die Forderungen auch für $n > 1$ erfüllt, also ist $X \in \mathbf{H} \subset \mathbf{sSet}$.

Satz 2.2.7. $\mathbf{H} \cong \mathbf{osC}$ in der Kategorie \mathbf{Cat} .

Beweis. Die Isomorphismen sind $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{osC}$, definiert durch

$$X \in \mathbf{H} \mapsto K_X := \{\alpha([n]) : n \in \mathbb{N}, \alpha \in X_n\}$$

$$\tau = (\tau_n) \in \text{hom}_{\mathbf{H}}(X, Y) \mapsto \varphi : \begin{cases} \bigcup K_X & \rightarrow \bigcup K_Y \\ \alpha(i) \in \alpha([n]) & \mapsto \tau_n(\alpha)(i) \end{cases}$$

und $G : \mathbf{osC} \rightarrow \mathbf{H}$, den wir durch

$$K \in \mathbf{osC} \mapsto \left(\{\alpha : [n] \rightarrow V_K \text{ monoton mit } \alpha([n]) \in K\} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\varphi \in \text{hom}_{\mathbf{osC}}(K, L) \mapsto \tau = \left(\tau_n := \begin{cases} X_n & \rightarrow Y_n \\ \alpha & \mapsto \varphi \circ \alpha \end{cases} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

¹Diese Notation wird in der Literatur sehr frei verwendet und findet sich z. B. (exakt angewandt) schon bei KAN in [7], S. 472ff.

definieren, wobei $X = G(K)$ und $Y = G(L)$. Zuerst zeigen wir, dass F und G wohldefinierte Funktoren sind.

Es ist $K_X \subseteq \mathfrak{P}(V_X)$, V_X total geordnet und alle $\alpha([n])$ sind endlich. Um zu sehen, dass $K_X \in \mathbf{osC}$, sei $S \subseteq \alpha([n]) \in K_X$. Wir wählen $i_j \in [n]$, sodass $S = \{\alpha(i_0), \dots, \alpha(i_m)\}$ mit $i_0 < \dots < i_m$. Die Abbildung $f : j \mapsto i_j$ von $[m] \rightarrow [n]$ ist monoton, also $f \in \text{hom}_\Delta([m], [n])$. Daher ist $X(f)(\alpha) = \alpha f \in X_m$ und es folgt $S = (\alpha f)([m]) \in K_X$.

Der Kern des Beweises steckt im folgenden Lemma, das zeigt, dass wir Morphismen in \mathbf{H} durch eine Funktion auf der Knotenmenge realisieren können.

Lemma 2.2.8. *Seien $X, Y \in \mathbf{H}$ und $\tau : X \rightarrow Y$ eine natürliche Abbildung. Sei $\alpha \in X_m$, $\beta \in X_n$ und $\alpha(i) = \beta(j)$, dann ist*

$$\tau_m(\alpha)(i) = \tau_n(\beta)(j).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $d_0 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_m(\alpha)$ die Abbildung $[0] \rightarrow V_X$, $0 \mapsto \alpha(i)$ ist. Sei dazu $\alpha \in X_m$. Es ist

$$d_0 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_m(\alpha) = \alpha d^m \dots d^{i+1} d^{i-1} \dots d^0 : [0] \rightarrow V_X,$$

wir sehen, dass $d^{i-1} \dots d^0$ die Abbildung $0 \mapsto i$ von $[0] \rightarrow [i]$ ist und d^{i+1} die identische Einbettung $[i] \rightarrow [i+1]$, usw. Also haben wir

$$d_0 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_m(\alpha) = 0 \mapsto \alpha(i) = 0 \mapsto \beta(j) = d_0 \dots d_{j-1} d_{j+1} \dots d_n(\beta).$$

Wir notieren hier $d_i^X = X(d^i)$ und $d_i^Y = Y(d^i)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \mapsto \tau_m(\alpha)(i) &= d_0^Y \dots d_{i-1}^Y d_{i+1}^Y \dots d_m^Y(\tau_m(\alpha)) \\ &= \tau_0 d_0^X \dots d_{i-1}^X d_{i+1}^X \dots d_m^X(\alpha) \\ &= \tau_0 d_0^X \dots d_{j-1}^X d_{j+1}^X \dots d_n^X(\beta) \\ &= d_0^Y \dots d_{j-1}^Y d_{j+1}^Y \dots d_n^Y(\tau_n(\beta)) = 0 \mapsto \tau_n(\beta)(j). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\tau_m(\alpha)(i) = \tau_n(\beta)(j)$. \square

Das Lemma zeigt die Wohldefiniertheit von $\varphi = F(\tau)$. Ist $A = \alpha([n]) \in K_X$, so folgt $\varphi(A) = \tau_n(\alpha)([n]) \in K_Y$. Ist $\alpha(i) <_{V_X} \alpha(j)$, so muss $i < j$ gelten, daher auch

$$\varphi(\alpha(i)) = \tau_n(\alpha)(i) \leq \tau_n(\alpha)(j) = \varphi(\alpha(j)).$$

Also ist φ monoton auf $\alpha([n])$ und somit eine Abbildung von Simplicialkomplexen. Insgesamt sehen wir, dass F wohldefiniert ist. Seien $X, Y, Z \in \mathbf{H}$ und $\tau : X \rightarrow Y$ sowie $\lambda : Y \rightarrow Z$ Morphismen in \mathbf{H} . Weiters sei $\alpha \in X_m$, $i \in [m]$. Es ist

$$F(\lambda\tau)(\alpha(i)) = (\lambda_m \tau_m)(\alpha)(i)$$

und ebenso

$$F(\lambda)F(\tau)(\alpha(i)) = F(\lambda)(\tau_m(\alpha)(i)) = \lambda_m(\tau_m(\alpha))(i) = (\lambda_m \tau_m)(\alpha)(i).$$

Also ist F ein Funktor $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{osC}$.

Sei $K \in \mathbf{osC}$ und $X = G(K)$. Wir setzen $V_X := V_K$ und haben dadurch $X_n \subseteq \text{hom}_{\mathbf{Pos}}([n], V_X)$. Ist $v \in V_K = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, dann gibt es ein $\sigma \in K$ mit $\{v\} \subseteq \sigma$, deshalb ist $\{v\} \in K$ und die Abbildung $\alpha : [0] \rightarrow V_X$, $0 \mapsto v$ ist in X_0 . Sei nun $\alpha \in X_n$, die Abbildung $s_j(\alpha) = \alpha s^j : [n+1] \rightarrow V_X$ ist monoton und $\alpha s^j([n+1]) = \alpha([n]) \in K$ und daher $s_j(\alpha) \in K$. Zuletzt sei $\beta \in X_{n+1}$. Dann ist $d_i(\beta) = \beta d^i : [n] \rightarrow V_X$ monoton und $\beta d^i([n]) \subseteq \beta([n+1]) \in K$, es folgt $d_i(\beta) \in X_n$ und insgesamt $X = G(K) \in \mathbf{H}$.

Sei $Y = G(L)$ und $\varphi \in \text{hom}_{\mathbf{osC}}(K, L)$. Wir zeigen, dass $G(\varphi) = \tau$ mit $\tau_n : X_n \rightarrow Y_n$, $\alpha \mapsto \varphi\alpha$ eine natürliche Abbildung $X \rightarrow Y$ ist. Wir haben $\alpha : [n] \rightarrow V_K$ und $\varphi : V_K \rightarrow V_L$, daher $\tau_n(\alpha) : [n] \rightarrow V_L$. Da $\varphi|_{\alpha([n])}$ monoton ist, ist auch $\tau_n(\alpha) = \varphi\alpha$ monoton. Aus $\alpha([n]) \in K$ folgt $\tau_n(\alpha)([n]) = \varphi(\alpha([n])) \in L$ und somit $\tau_n(\alpha) \in Y_n$. Also ist τ wohldefiniert. Die Natürlichkeit sehen wir leicht. Sei $f \in \text{hom}_{\Delta}([m], [n])$, dann haben wir

$$\tau_m(X(f)(\alpha)) = \tau_m(\alpha f) = \varphi\alpha f = Y(f)(\varphi\alpha) = Y(f)(\tau_n(\alpha)).$$

Sind $\varphi : K \rightarrow L$, $\psi : L \rightarrow M$ Abbildungen von Simplizialkomplexen, so gilt

$$G(\psi\varphi)(\alpha) = \psi\varphi\alpha = \psi(G(\varphi)(\alpha)) = G(\psi)G(\varphi)(\alpha).$$

Somit ist G ein Funktor $\mathbf{osC} \rightarrow \mathbf{H}$.

Nun zeigen wir $GF = \text{id}_{\mathbf{H}}$. Sei $X \in \mathbf{H}$, es ist $GF(X) = G(K_X) = (X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$X'_n = \{\alpha : [n] \rightarrow V_{K_X} \text{ monoton mit } \alpha([n]) \in K_X\}.$$

Nach der Definition von K_X ist $\alpha([n]) \in K_X$ genau dann, wenn $\alpha \in X_n$. Weiter ist wegen $X_0 = \text{hom}_{\mathbf{Pos}}([0], V_X)$

$$V_{K_X} = \bigcup K_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in X_n} \alpha([n]) \subseteq V_X = \bigcup_{\alpha \in X_0} \alpha([0]) \subseteq V_{K_X}$$

Also ist $X_n = X'_n$ und, da die Bilder der Morphismen unter X bzw X' vorgegeben sind, $GF(X) = X$. Sei $\tau = (\tau_n) \in \text{hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$. $F(\tau)$ ist die Abbildung

$$\varphi : V_{K_X} \rightarrow V_{K_Y} : \alpha(i) \in \alpha([n]) \mapsto \tau_n(\alpha)(i),$$

und $G(\varphi)$ ist die Folge (τ'_n) , wobei $\tau'_n : X_n \rightarrow Y_n$, $\beta \mapsto \varphi\beta$. Wir haben $\tau'_n(\beta)(i) = (\varphi\beta)(i) = \varphi(\beta(i)) = \tau_n(\beta)(i)$, $i \in [n]$, also $\tau'_n = \tau_n$, insgesamt $GF(\tau) = \tau$.

Abschließend zeigen wir $FG = \text{id}_{\mathbf{osC}}$. Auf den Objekten sollte dies klar sein. Sei $\varphi \in \text{hom}_{\mathbf{osC}}(K, L)$, dann ist

$$\begin{aligned} FG(\varphi) &= F((\tau_n : X_n \rightarrow Y_n, \alpha \mapsto \varphi\alpha)_n) \\ &= \varphi' : K \rightarrow L, \beta(i) \in \beta([n]) \mapsto \tau_n(\beta)(i) \end{aligned}$$

aber es ist $\varphi'(\beta(i)) = \tau_n(\beta)(i) = (\varphi\beta)(i) = \varphi(\beta(i))$, also $FG(\varphi) = \varphi' = \varphi$. \square

Nerv einer Kategorie

Eine Konstruktion, die in ähnlicher Weise „funktioniert“ wie die polyedrischen simplizialen Mengen, ist der Nerv einer Kategorie.

Definition 2.2.9. Sei \mathbf{C} eine kleine Kategorie. Der *Nerv von \mathbf{C}* ist die simpliziale Menge, die durch $NC_n := \{\alpha : [n] \rightarrow \mathbf{C} \mid \alpha \text{ Funktor}\}$ sowie durch $NC(f)(\alpha) := \alpha f$ für $\alpha \in NC_n$ und $f : [m] \rightarrow [n]$ definiert wird.

Wie bei den polyedrischen simplizialen Mengen sehen wir, dass tatsächlich $NC \in \mathbf{sSet}$. Ein k -Simplex von NC ist eine Kette $\alpha_0 \xrightarrow{\varphi_1} \alpha_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_k} \alpha_k$, wobei $\alpha_i \in \mathbf{C}$ und $\varphi_i \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Ein k -Simplex eines Nervs ist somit ein Kantenzug der Länge k im Graph der entsprechenden Kategorie, wobei auch Schleifen erlaubt sind und gezählt werden. Denken wir uns die „konvexe Hülle“ dieser Kanten, bekommen wir ein plastisches Bild eines solchen Simplex'. Um die Analogie zu den polyedrischen simplizialen Mengen hervorzuheben, schreiben wir auch hier $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$.

Lemma 2.2.10. Sei $X \in \mathbf{H}$ oder $X = NC$ und sei $\alpha \in X_n$. Dann ist $d_i(\alpha) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ und $s_j(\alpha) = (\alpha_0, \dots, \alpha_j, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$. Ferner ist α genau dann nicht degeneriert, wenn $\alpha_{i-1} \neq \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen ergeben sich aus $d_i(\alpha) = \alpha d^i$ und $s_j(\alpha) = \alpha s^j$. Ist $\alpha_{i-1} = \alpha_i$, so haben wir $s_{i-1}d_i(\alpha) = s_{i-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \alpha$ und wegen $d_i(\alpha) \in X_{n-1}$ ist α degeneriert. Ist umgekehrt $\alpha = s_j(\beta)$, dann ist $\alpha_j = \beta_j = \alpha_{j+1}$. \square

Ein wichtiger Umstand ist, dass die volle Unterkategorie $\mathbf{sSimp} = \{\Delta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{sSet}$ der simplizialen Simplizes mit den natürlichen Transformationen als Morphismen isomorph zur Kategorie Δ ist. Dies folgt aus dem Yoneda-Lemma, das wegen seiner überragenden Bedeutung für die „elementare“ Theorie der simplizialen Mengen hier angeführt sei.

Satz 2.2.11. (Yoneda)² Sei \mathbf{C} eine kleine Kategorie, $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor und $C \in \mathbf{C}$, dann ist

$$\psi_{C,F} : \tau \mapsto \tau_C(1_C)$$

eine Bijektion von $\text{Nat}(\text{hom}_{\mathbf{C}}(-, C), F)$ nach $F(C)$. Die Abbildung $\psi_{C,F}$ ist natürlich in C und F .

Präzisieren wir die letzte Eigenschaft von $\psi_{C,F}$. Sei $N_F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ bei festem F der kontravariante Funktor $N_F(C) = \text{Nat}(\text{hom}_{\mathbf{C}}(-, C), F)$, für $f : C \rightarrow C'$ sei

$$N_F(f) : \{\tau_B\}_{B \in \mathbf{C}} \mapsto \{g \mapsto \tau_B(fg)\}_{B \in \mathbf{C}}$$

Dann ist $\psi_F := \{\psi_{C,F}\}_{C \in \mathbf{C}}$ eine natürliche Transformation $N_F \rightarrow F$.

²Zu finden z. B. in [8], S. 61, oder mit Beweis in [6], S. 472.

Sei $H : \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ bei festem C der kovariante Funktor definiert durch $H_C(F) = \text{Nat}(\text{hom}_C(-, C), F)$, für $\tau : F \rightarrow F'$ sei $H_C(\tau) : \sigma \mapsto \tau\sigma$. Weiter sei $E_C : \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ der kovariante Funktor, der durch $E_C(F) = F(C)$ und für $\tau : F \rightarrow F'$ durch $E_C(\tau) = \tau_C$ gegeben ist. Dann ist $\psi_C := \{\psi_{C,F}\}_{F \in \mathbf{Set}^C}$ eine natürliche Transformation $H_C \rightarrow E_C$.

Tatsächlich bietet die Theorie der simplizialen Mengen ein geometrisch anschauliches Modell, um die Bedeutung des Yoneda-Lemmas zu lernen. Jeder Simplex $\alpha \in X_n = X([n])$ einer simplizialen Menge X entspricht eineindeutig einer simplizialen Abbildung $\text{hom}_\Delta(-, [n]) = \Delta^n \rightarrow X$. Eine solche Abbildung bedeutet wiederum, den Standardsimplex Δ^n – eventuell ordnungstreu geklappt und verklebt – in X wiederzufinden.

Sei $\theta : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ eine natürliche Abbildung, dann ist nach Lemma 2.2.8

$$\theta_m(1_{[m]})(i) = \theta_0(0 \mapsto i)(0), \quad i \in [m].$$

Definieren wir also $\bar{\theta}(i) := \theta_0(0 \mapsto i)(0)$ für $i \in [m]$, so ist nach dem Yoneda-Lemma $\theta \mapsto \bar{\theta}$ eine Bijektion von $\text{Nat}(\Delta^m, \Delta^n) = \text{Nat}(\text{hom}_\Delta(-, [m]), \Delta^n)$ nach $\Delta^n_m = \text{hom}_\Delta([m], [n])$.

Lemma 2.2.12. *Die Zuordnung*

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \Delta^n & \mapsto [n] \\ \theta & \mapsto \bar{\theta} \end{cases}$$

ist ein kovarianter natürlicher Isomorphismus $\mathbf{sSimp} \rightarrow \Delta$. Invers dazu wird $[n]$ auf Δ^n und $f : [m] \rightarrow [n]$ auf die natürliche Abbildung $\bar{f} : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ abgebildet, wobei $\bar{f}_k(\alpha) := f \circ \alpha$ für $\alpha : [k] \rightarrow [m]$.

Beweis. Zu zeigen bleibt nach dem Yoneda-Lemma und obigem die Funktorialität, d. h., dass $\overline{\lambda \circ \theta} = \bar{\lambda} \circ \bar{\theta}$ gilt. Sei

$$\Delta^l \xrightarrow{\theta} \Delta^m \xrightarrow{\lambda} \Delta^n$$

und sei $\theta_0(0 \mapsto i) = 0 \mapsto j$ und $\lambda_0(0 \mapsto j) = 0 \mapsto k$. Wir haben

$$\overline{\lambda\theta}(i) = (\lambda_0\theta_0)(0 \mapsto i)(0) = \lambda_0(\theta_0(0 \mapsto i))(0) = \lambda_0(0 \mapsto j)(0) = k$$

und auf der anderen Seite

$$\bar{\lambda}\bar{\theta}(i) = \bar{\lambda}(\theta_0(0 \mapsto i)(0)) = \bar{\lambda}(j) = \lambda_0(0 \mapsto j)(0) = k.$$

Die Funktorialität der inversen Abbildung ist klar. □

2.3 Friedmans Notation

Wir versuchen im folgenden Abschnitt, die Notation aus [4] exakt zu verstehen. FRIEDMAN erklärt nicht näher, warum das, was er notiert, simpliziale Mengen

sind. Möglicherweise ist das trivial, aber ein erstes Ziel dieser Arbeit war, diese Frage genau zu beantworten. Unsere Erklärung basiert auf \mathbf{H} .

Weiters geben wir zwei Beispiele, die ein Gefühl dafür vermitteln sollen, wie mit simplizialen Mengen vorgegebene topologische Räume modelliert werden können. Eine präzisere Begründung für diese Vorgehensweise ist erst die *Realisierung*, die im Abschnitt 3.1 behandelt wird. Zunächst „vertrauen“ wir darauf, dass unsere simplizialen Mengen das gleiche beschreiben wie die Bilder, die wir dazu zeichnen.

Nun bemerken wir, dass für eine beliebige Kategorie \mathbf{C} natürliche Abbildungen $\tau : X \rightarrow Y$ von mengenwertigen Funktoren $X, Y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ eine andere Schreibweise für Äquivalenzrelationen auf den Mengen $X(C)$, $C \in \mathbf{C}$ sind, wobei diese Äquivalenzrelationen mit den Abbildungen $X(f)$ verträglich sind. Die τ entsprechende Relation ist einfach durch

$$x \sim x' :\iff \tau_C(x) = \tau_C(x')$$

für $C \in \mathbf{C}$ und $x, x' \in X(C)$ gegeben.

Eine simpliziale Abbildung $\tau : X \rightarrow Y$ ist daher das Wiederauffinden von X in Y , wobei τ_n Simplizes aus X_n ordnungstreu (dafür sorgt die Verträglichkeit mit den Randabbildungen) zusammenklappen oder miteinander identifizieren kann. Zusammenklappen heißt, dass der nicht degenerierte Anteil von $\tau_n(\alpha)$ eine niedrigere Dimension als der nicht degenerierte Anteil von α hat. Identifiziert sind klarerweise jene $\alpha_i \in X_n$, die unter τ_n das gleiche Bild in Y_n haben.

Wir können die Notation von FRIEDMAN so lesen, dass $[0, 1, 1]$ die Äquivalenzklasse $[(0, 1, 1)]_{\sim}$ einer – wie oben durch eine simpliziale Abbildung induzierten – Relation ist. Diese Relation leistet dabei das „Kleben“, der Simplex $(0, 1, 1)$ stammt aus einem Simplizialkomplex in \mathbf{H} , wobei $V_X \subseteq \mathbb{N}$. Identifizieren wir auf diese Weise Simplizes in einer simplizialen Menge X , so müssen wir anschließend für die gesamte entstandene Mengenfolge Y

$$Y(f)([\alpha]_{\sim}) := [X(f)(\alpha)]_{\sim} \tag{2.1}$$

setzen, wobei $\alpha \in X_n$ und $f \in \text{hom}_{\Delta}([m], [n])$. Daraus ergeben sich noch eine Menge zusätzlicher Identifikationen, wie wir im folgenden Beispiel schon sehen können.

Beispiel 2.3.1. Aus dem nicht ausgefüllten Dreieck X (polyedrisch) wollen wir die simpliziale Menge kleben, die wir wie in Abbildung 2.2 skizzieren würden.

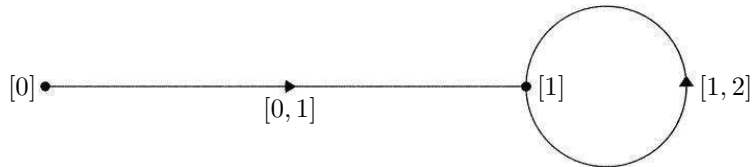


Abbildung 2.2: Schematische Skizze von Y .

$$X_0 = \{(0), (1), (2)\}$$

$$X_1 = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

für $n > 1$ besteht X_n aus lauter degenerierten Simplizes, $X_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1})$. Wie wir in Abschnitt 2.2 gesehen haben, ist $X \in \mathbf{H} \subseteq \mathbf{sSet}$. Es reicht nun nicht, 1 mit 2 zu identifizieren, dies würde die in Abbildung 2.3 skizzierte simpliziale Menge ergeben, sondern wir müssen $(0, 2) \sim (0, 1)$ setzen. Daraus folgt nach

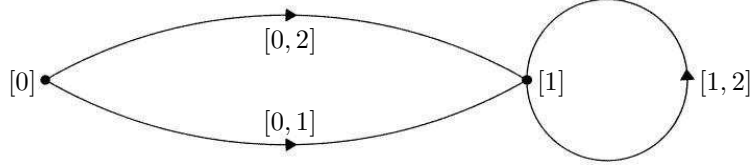


Abbildung 2.3: Identifizierung nur von (1) und (2).

(2.1) auch

$$[2] = [d_0^X((0, 2))] = d_0^Y([0, 2]) = d_0^Y([0, 1]) = [d_0^X((0, 1))] = [1],$$

also $(1) \sim (2)$. Analog sehen wir $(1, 1) \sim (2, 2)$. Es ist also

$$Y_0 = \{[0], [1]\}$$

$$Y_1 = \{[0, 1], [1, 2], [0, 0], [1, 1]\}$$

$$Y_2 = \dots$$

Es mag verwirrend erscheinen, dass 2 weiterhin in $[1, 2]$ vorkommt, es ist aber $d_0([1, 2]) = [d_0((1, 2))] = [2] = [1]$, also kein Grund zur Panik.

Natürlich können wir lediglich jeden Simplex mit sich selbst identifizieren und daher auch für Simplizes in Simplizialkomplexen Dinge wie $[0, 1, 1]$ schreiben. Wir können den Prozess auch iterieren:

Beispiel 2.3.2. Wir verkleben zuerst ein Dreieck zu einem Kegel und diesen dann zu einem „Posthorn“.

$$X_0 = \{[0], [1], [2]\}$$

$$X_1 = \{[0, 1], [0, 2], [1, 2], [0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$$

$$X_2 = \{[0, 1, 2], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 2], [0, 2, 2],$$

$$[1, 1, 2], [1, 2, 2], [0, 0, 0], [1, 1, 1], [2, 2, 2]\}$$

Wir setzen $[0, 2] \sim [1, 2]$ bzw. $\tau_1([0, 2]) = \tau_1([1, 2])$. Daraus folgt wie oben $[0] \sim [1]$ und $[0, 0] \sim [1, 1]$ sowie beispielsweise $[0, 0, 2] \sim [1, 1, 2]$. Wir haben

$$Y_0 = \{[0], [2]\}$$

$$Y_1 = \{[0, 1], [0, 2], [0, 0], [2, 2]\}$$

$$Y_2 = \{[0, 1, 2], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 2], [0, 2, 2],$$

$$[0, 0, 0], [2, 2, 2]\}$$

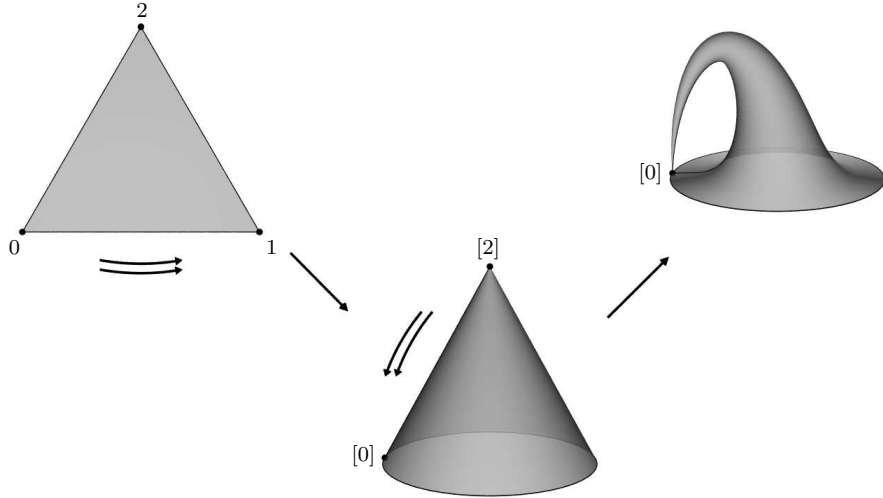


Abbildung 2.4: Verklebe $(0, 2)$ mit $(1, 2)$ und $[0]$ mit $[2]$.

Nun setzen wir noch $[0] \sim [2]$ und erhalten

$$Z_0 = \{[0]\}$$

$$Z_1 = \{[0, 1], [0, 2], [0, 0]\}$$

$$Z_2 = \{[0, 1, 2], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 2], [0, 2, 2], [0, 0, 0]\}.$$

Nun ist zum Beispiel $d_0([0, 1, 2]) = [1, 2] = [0, 2]$ und $d_0([0, 2]) = [0]$. Skizzieren könnten wir diese Verklebungen wie in Abbildung 2.4 angedeutet.

2.3.1 Colimiten simplizialer Mengen

Wir wollen uns überlegen, dass jede simpliziale Menge Y natürliches Bild eines $X \in \mathbf{H}$ ist. Das soll heißen, dass es eine simpliziale Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ gibt, sodass alle φ_n surjektiv sind. Das wiederum bedeutet geometrisch, dass Y durch „ordnungstreues Verkleben“ aus einer polyedrischen Menge – i. e., aus einem Simplizialkomplex – herstellbar ist.

Dazu verwenden wir die explizite Struktur des Colimes' simplizialer Mengen.³

Lemma 2.3.3. *Sei \mathbf{J} eine kleine Kategorie und $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{sSet}$ kovariant. Dann existiert $\varinjlim F$ und ist gegeben durch*

$$(\varinjlim F)_n = \varinjlim_{j \in \mathbf{J}} F(j)_n / \overline{R}_n = \left(\bigsqcup_{j \in \mathbf{J}} F(j)_n \right) / \overline{R}_n.$$

³Siehe Abschnitt A.2.

Dabei ist \bar{R}_n die von der Relation R_n erzeugte Äquivalenzrelation und es gilt $(i, x)R_n(j, F(g)_n(x))$ genau dann, wenn es ein $g : i \rightarrow j$ in \mathbf{J} gibt. Für ein $f : [m] \rightarrow [n]$ und $[j, x] \in (\varinjlim F)_n$ ist $(\varinjlim F)(f)([j, x]) = [j, F(j)(f)(x)]$.

Zur optischen Entlastung setzen wir wo immer möglich $[a, b] := [(a, b)]$.

Beweis. Setze $X_n := \{(j, x) : j \in \mathbf{J}, x \in F(j)_n\}$ und

$$X(f)(j, x) := (j, F(j)(f)(x))$$

für $f : [m] \rightarrow [n]$. Offensichtlich ist X eine simpliziale Menge. Dieses X können wir uns als den „simplizialen Baukasten“ vorstellen, freischwebende simpliziale Mengen $F(j)$, in denen unabhängig Seiten berechnet werden. Aus diesen Bausteinen wird nun entsprechend der Kategorie \mathbf{J} und dem Funktor F der Colimes von F zusammengeklebt. Nach Satz A.2.4 ist $X_n = \varinjlim_{j \in \mathbf{J}} F(j)_n$ in \mathbf{Set} .

Definiere nun Relationen R_n und \bar{R}_n wie im Lemma angegeben. Setze weiter $Y_n := X_n/\bar{R}_n$ und

$$Y(f)([j, x]_{\bar{R}_n}) := [X(f)(j, x)]_{\bar{R}_n} = [j, F(j)(f)(x)].$$

Dies ist wohldefiniert, denn ist $g : i \rightarrow j$ in \mathbf{J} , dann haben wir aufgrund der Definition von R_n und der Natürlichkeit von $F(g)$

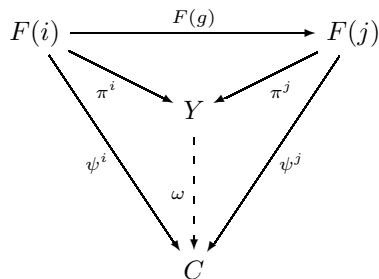
$$[i, F(i)(f)(x)] = [j, F(g)_m(F(i)(f))(x)] = [j, F(j)(f)(F(g)_n(x))].$$

Wir sehen „leicht“ an der Definition von $Y(f)$, dass $Y \in \mathbf{sSet}$ – auch wenn das in diesem Klammerngewühl mühsam ist. Ist Y Cokegel von F ? Sei dazu $\pi^i_n(x) := [i, x]$, $i \in \mathbf{J}$, $x \in F(i)_n$ und $g : i \rightarrow j$ in \mathbf{J} . Dann haben wir

$$\pi^j_n F(g)(x) = [j, F(g)_n(x)] = [i, x] = \pi^i_n(x),$$

also ist $(Y, \{\pi^j\}_{j \in \mathbf{J}})$ Cokegel von F .

Sei, wie üblich, $(C, \{\psi^j\})$ ein weiterer Cokegel von F . Können wir in eindeutiger Weise eine simpliziale Abbildung $\omega : Y \rightarrow C$ definieren, sodass



kommutiert? Wir müssen dazu eindeutig $\omega_n([i, x]) := \psi^i_n(x)$, $i \in \mathbf{J}$, $x \in F(i)_n$ setzen. Dies ist eine wohldefinierte Funktion, denn da $(C, \{\psi^j\})$ Cokegel ist, gilt

für $g : i \rightarrow j$ stets $\psi_n^i(x) = \psi_n^j(F(g)_n(x))$, also ist ω_n mit \overline{R}_n verträglich. Es ist ω auch natürlich, denn sei $y \in Y_n$ und $f : [m] \rightarrow [n]$, dann ist

$$\begin{aligned}\omega_m Y(f)([j, x]) &= \omega_m([j, F(j)(f)(x)]) \\ &= \psi_m^j(F(j)(f)(x)) \\ &= C(f)\psi_n^j(x) = C(f)\omega_n([j, x]).\end{aligned}$$

Also ist $Y = \varinjlim F$, wie behauptet. \square

Wir gehen nun zu einer speziellen Indexkategorie über, zu $\mathbf{J} = \Delta \downarrow X$, der sogenannten *Simplexkategorie*. Diese wird entsprechend S. 38 als

$$\Delta \downarrow X := \{\sigma \in \text{Nat}(\Delta^n, X) : n \in \mathbb{N}\}$$

definiert. Laut Yoneda-Lemma steht $\text{Nat}(\Delta^n, X) = \text{Nat}(\text{hom}_\Delta(-, [n]), X)$ in Bijektion zu $X([n]) = X_n$, d. h. jeder natürlichen Abbildung $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ entspricht der Simplex $\sigma_n(1_{[n]}) \in X_n$ eindeutig. Daher der Name Simplexkategorie für $\Delta \downarrow X$. Die Morphismen $\sigma \rightarrow \tau$ in $\Delta \downarrow X$ sind alle kommutativen Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccc}\Delta^m & \xrightarrow{\theta} & \Delta^n \\ & \searrow \sigma & \swarrow \tau \\ & & X\end{array}$$

Jedes solche θ wird von $\overline{\theta} : [m] \rightarrow [n]$ induziert, wobei $\theta_k(\alpha) = \overline{\theta} \circ \alpha$, siehe dazu Lemma 2.2.12.

Sei nun Y eine beliebige simpliziale Menge, und $F : \Delta \downarrow Y \rightarrow \mathbf{sSet}$ durch $F(\sigma : \Delta^n \rightarrow Y) = \Delta^n$ und $F(\theta) = \theta$ gegeben. Nach Satz A.2.2 ist $Y = \varinjlim F$. Wie im Beweis von Lemma 2.3.3 können wir X durch

$$X_n := \varinjlim_{\sigma \in \Delta \downarrow Y} F(\sigma)_n = \bigsqcup_{\sigma : \Delta^m \rightarrow Y} \Delta^m_n$$

definieren. Wir wählen nun eine beliebige Totalordnung auf der Objektmenge von $\Delta \downarrow Y$. Jeden Simplex $(\sigma, \alpha) \in X_n$ sehen wir durch $(\sigma, \alpha)(i) := (\sigma, \alpha(i))$ als Abbildung $(\sigma, \alpha) : [n] \rightarrow (\Delta \downarrow X) \times \mathbb{N}$. Auf $(\Delta \downarrow X) \times \mathbb{N}$ nehmen wir die lexikographische Ordnung an, dadurch wird jedes (σ, α) monoton. Auf diese Weise ist $X \in \mathbf{H}$. Definieren wir $\varphi : X \rightarrow Y$ durch $\varphi_n((\sigma, \alpha)) := [\sigma, \alpha]_{\overline{R}_n}$ für $\sigma : \Delta^m \rightarrow Y$ und $\alpha : [n] \rightarrow [m]$, dann ist φ natürlich und $Y_n = \varphi_n(X_n)$.

Kapitel 3

Der Kantsche Ex-Funktor

3.1 Realisierung

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Möglichkeit verschaffen, fundiert Bilder zu zeichnen. Dazu ordnen wir jeder simplizialen Menge gerade jenen topologischen Raum zu, den wir mit dieser simplizialen Menge beschreiben wollen. Dieser topologische Raum wird als Realisierung der simplizialen Menge bezeichnet.

GOERSS und JARDINE definieren die Realisierung als Colimes in der Kategorie der topologischen Räume. Die Indexkategorie ist dabei wieder $\Delta \downarrow X$. Der *topologische Standard- n -Simplex* ist definiert als

$$|\Delta^n| := \{(t_0, \dots, t_n) \in I^{n+1} : \sum t_i = 1\} \in \mathbf{Top},$$

wobei $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das Einheitsintervall bezeichnet.

Lemma 3.1.1. *Sei $f : [m] \rightarrow [n]$ und $f_*((t_0, \dots, t_m)) := (u_0, \dots, u_n)$, wobei $u_j = \sum_{f(i)=j} t_i$. Durch $[n]_* := |\Delta^n|$ ist ein kovarianter Funktor $\cdot_* : \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ gegeben.*

Beweis. Sei $f : [k] \rightarrow [m]$ und $g : [m] \rightarrow [n]$. Es ist

$$\begin{aligned} g_* f_*((t_i)_{0 \leq i \leq k}) &= g_* \left(\left(\sum_{f(i)=j} t_i \right)_{0 \leq j \leq m} \right) \\ &= \left(\sum_{g(j)=l} \sum_{f(i)=j} t_i \right)_{0 \leq l \leq n} \\ &= \left(\sum_{gf(i)=l} t_i \right)_{0 \leq l \leq n} = (gf)_*((t_i)_{0 \leq i \leq k}). \end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zur kategorientheoretischen Definition der Realisierung wie in [5]. Der Funktor, über den wir dazu den Colimes bilden, ist

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \Delta \downarrow X \quad \rightarrow \quad \mathbf{Top} \\ \sigma : \Delta^n \rightarrow X \quad \mapsto \quad |\Delta^n| \\ \Delta^m \xrightarrow{\theta} \Delta^n \\ \quad \searrow \sigma \quad \nearrow \tau \\ \quad \quad X \quad \mapsto \quad \bar{\theta}_* \end{array} \right.$$

Aus Lemma 2.2.12 und Lemma 3.1.1 folgt, dass F tatsächlich ein kovarianter Funktor ist.

Definition 3.1.2. Mit den obigen Schreibweisen heißt

$$|X| := \varinjlim F = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}, \sigma: \Delta^n \rightarrow X} |\Delta^n|$$

die *Realisierung von X* .

Diese Definition ist sehr abstrakt. Tatsächlich generiert der Colimes für jeden n -Simplex (bzw. jede natürliche Abbildung $\Delta^n \rightarrow X$) einen zum Standardsimplex $|\Delta^n|$ homöomorphen topologischen Raum, bildet den Summenraum über all diese Räume und identifiziert Seiten mit ihren „Eltern“ und Degeneriertheiten mit ihren nicht degenerierten Ausgangssimplizes. Dies ist Inhalt von

Lemma 3.1.3. *Ist $X \in \mathbf{sSet}$, so gilt*

$$|X| \cong \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

Dabei ist \sim die durch $(d_i(x), t) \sim (x, d^i_*(t))$ und $(s_j(x), t) \sim (x, s^j_*(t))$ erzeugte Äquivalenzrelation.

Beweis. Definiere eine Relation S auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|$ durch

$$(x, t) S (y, u) :\Leftrightarrow x = d_i(y) \text{ und } u = d^i_*(t) \text{ oder } x = s_j(y) \text{ und } u = s^j_*(t)$$

und eine Relation R auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Nat}(\Delta^n, X) \times |\Delta^n|$ durch

$$(\sigma, t) R (\tau, u) :\Leftrightarrow \exists \theta \text{ mit } \sigma = \tau\theta \text{ und } \bar{\theta}_*(t) = u$$

Zunächst sei nun $f : [m] \rightarrow [n]$ ein Morphismus in Δ , $y \in X_n$ und $t \in |\Delta^m|$. Nach Lemma 2.1.5 ist $f = d^{i_1} \dots d^{i_r} s^{j_1} \dots s^{j_s}$. Es gilt $(X(f)(y), t) = (s_{j_s} \dots s_{j_1} d_{i_r} \dots d_{i_1}(y), t) S (y, d^{i_1}_* \dots d^{i_r}_* s^{j_1}_* \dots s^{j_s}_*(t)) = (y, f_*(t))$, die letzte Gleichheit folgt aus Lemma 3.1.1. Die Relation S ist daher auch durch

$$(x, t) S (y, u) \Leftrightarrow \exists f \in \text{hom}_\Delta([m], [n]) \text{ mit } x = X(f)(y) \text{ und } u = f_*(t)$$

gegeben. Wir zeigen im Folgenden, dass $(\sigma, t) R (\tau, u)$ genau dann gilt, wenn $(\sigma_m(1_{[m]}), t) S (\tau_n(1_{[n]}), u)$. Das heißt, dass die Yoneda-Bijektion verträglich mit den Relationen R und S ist. Gelte also $(\sigma, t) R (\tau, u)$, dann haben wir $\sigma_m(1_{[m]}) = \tau_m(\theta_m(1_{[m]})) = \tau_m(\bar{\theta}) = \tau_m(1_{[n]} \circ \bar{\theta}) = \tau_m(\Delta^n(\bar{\theta})(1_{[n]})) = X(\bar{\theta})(\tau_n(1_{[n]}))$. Nach Definition ist $u = \bar{\theta}_*(t)$. Ist umgekehrt $\alpha : [k] \rightarrow [m]$ ein k -Simplex von Δ^m und gilt $(\sigma_m(1_{[m]}), t) S (\tau_n(1_{[n]}), u)$, dann folgt $\sigma_m(1_{[m]}) = X(f)\tau_n(1_{[n]}) = \tau_m\Delta^n(f)(1_{[n]}) = \tau_m(1_{[n]} \circ f) = \tau_m(f)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \tau_k(\bar{f}_k(\alpha)) &= \tau_k(f\alpha) = \tau_k(\Delta^n(\alpha)(f)) \\ &= X(\alpha)\tau_m(f) = X(\alpha)\sigma_m(1_{[m]}) \\ &= \sigma_k\Delta^m(\alpha)(1_{[m]}) = \sigma_k(\alpha). \end{aligned}$$

Also ist $\sigma = \tau\bar{f}$. Schließlich gilt nach Lemma 2.2.12 $\bar{\bar{f}}_*(t) = f_*(t) = u$.

Bezeichne nun mit \sim die von S und mit \approx die von R erzeugte Äquivalenzrelation. Seien $p : (\sigma, t) \mapsto [(\sigma, t)]_{\approx}$ und $q : (x, t) \mapsto [(x, t)]_{\sim}$ die kanonischen Projektionen und $\varphi_n : (\sigma, t) \mapsto (\sigma_n(1_{[n]}), t)$ die Yoneda-Bijektionen. Wir haben gerade gezeigt, dass durch

$$\varphi : [(\sigma, t)]_{\approx} \mapsto [\varphi_n((\sigma, t))]_{\sim}$$

eine bijektive Abbildung wohldefiniert ist. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\Delta^n, X) \times |\Delta^n| & \xrightarrow{\varphi_n} & X_n \times |\Delta^n| \\ \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota'_n \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Nat}(\Delta^n, X) \times |\Delta^n| & & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Nat}(\Delta^n, X) \times |\Delta^n| \right) / \approx & \xrightarrow{\varphi} & \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim \end{array}$$

kommutiert – auch wenn wir φ_n und φ durch ihre Inversen ersetzen –, daher sind φ und φ^{-1} stetig unter der Finaltopologie bezüglich $\{p \circ \iota_n : n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\{q \circ \iota'_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach Satz A.2.4 und dem nachfolgenden Absatz ist

$$\begin{aligned} |X| &\cong \bigsqcup_{\sigma \in \Delta \downarrow X} F(\sigma) / \approx \\ &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\sigma \in \text{Nat}(\Delta^n, X)} \{\sigma\} \times |\Delta^n| \right) / \approx \\ &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Nat}(\Delta^n, X) \times |\Delta^n| \right) / \approx. \end{aligned}$$

Aufgrund des oben Gesagten ist φ ein Homöomorphismus und wir haben

$$|X| \cong \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

wie behauptet. □

Dies ist die klassische Definition der Realisierung von MILNOR in [10], S. 357. Im folgenden benötigen wir

Lemma 3.1.4. *Sei $X \in \mathbf{sSet}$ und $(\alpha, t) \in X_n \times |\Delta^n|$. Dann gibt es einen Repräsentanten $(\alpha', t') = (\alpha', (t'_0, \dots, t'_m))$ in $[(\alpha, t)]_{\sim}$, sodass α' nicht degeneriert ist und $t'_i > 0$, $i = 0, \dots, m$.*

Beweis. Ist α degeneriert, so gibt es nach Lemma 2.1.10 ein m und ein nicht degeneriertes $\alpha' \in X_m$ mit $\alpha = s_{j_1} \dots s_{j_k}(\alpha')$. Es gilt $(\alpha, t) = (s_{j_1} \dots s_{j_k}(\alpha'), t) \sim (\alpha, s_*^{j_k} \dots s_*^{j_1}(t))$. Ist $t_i = 0$, dann haben wir

$$\begin{aligned} (\alpha, t) &= (\alpha, (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n)) \\ &= (\alpha, d_*^i(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)) \sim (d_i(\alpha), (t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich die Behauptung. □

3.2 Unterteilung

Die Unterteilung (engl. *subdivision*) einer simplizialen Menge entspricht der baryzentrischen Unterteilung ihrer Realisierung – zumindest für polyedrische Mengen.

Zuerst definieren wir die Unterteilung der Standardsimplizes. GOERSS und JARDINE fassen dazu Δ^n wie in Satz 2.2.7 als Simplizialkomplex auf. Dabei entsprechen sich Δ^n und $P\Delta^n := \mathfrak{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$. Die Halbordnung \subseteq auf $P\Delta^n$ spiegelt sich durch $\alpha = d_i(\beta) \Leftrightarrow \text{Im } \alpha \subseteq \text{Im } \beta$ in Δ^n wider. Sie fassen nun diese Halbordnung wie in Definition 2.1.1 als Kategorie auf und bilden den Nerv davon.

KAN gibt eine konsistentere Definition. Sei $\text{nd } \Delta^n$ die Kategorie aller nicht degenerierten Simplizes von Δ^n . Das sind gerade alle streng monotonen – sprich injektiven – Abbildungen $[k] \rightarrow [n]$, $k \leq n$. Ist $\alpha : [k] \rightarrow [n]$ und $\beta : [m] \rightarrow [n]$ aus $\text{nd } \Delta^n$, so sei

$$\text{hom}_{\text{nd } \Delta^n}(\alpha, \beta) = \{f : [k] \rightarrow [m] \text{ mit } \alpha = \beta f\}.$$

Ein solcher Morphismus f ist sicher injektiv, da sonst α nicht injektiv sein könnte. Nach Lemma 2.1.5 ist daher $f = d^{i_1} \dots d^{i_r}$, also $\alpha = d_{i_1} \dots d_{i_r}(\beta)$. Weiter ist $f = \beta^{-1}\alpha$ eindeutig bestimmt. Das heißt, es gibt genau dann einen Pfeil $f : \alpha \rightarrow \beta$, wenn α auf β liegt.

Definition 3.2.1. Der Nerv der Kategorie $\text{nd } \Delta^n$ heißt *Unterteilung von Δ^n* und wird mit $\text{sd } \Delta^n$ bezeichnet.

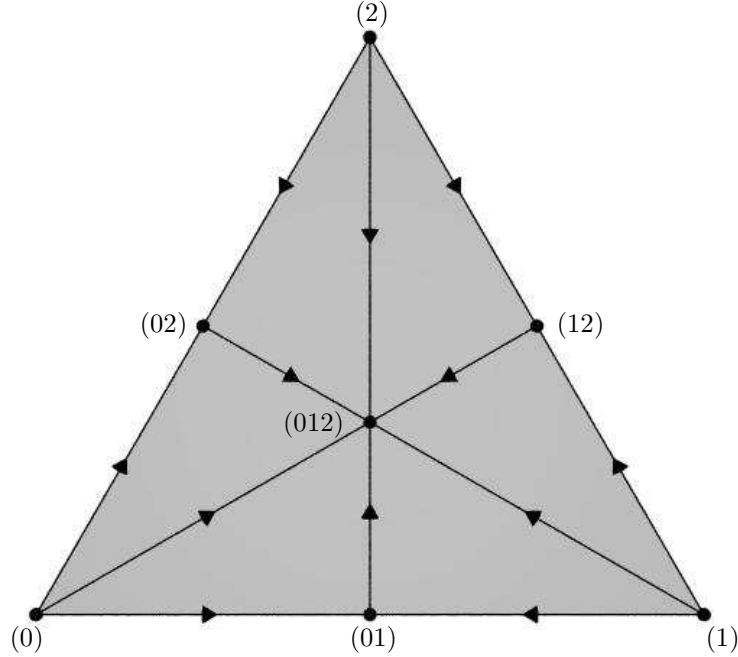


Abbildung 3.1: $|\text{sd } \Delta^2|$ mit beschrifteten Knoten und Kantenorientierungen.

Ein k -Simplex von $\text{sd } \Delta^n$ ist demgemäß ein Funktor $\sigma : [k] \rightarrow \text{nd } \Delta^n$, den wir als $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in (\text{nd } \Delta^n)^{k+1}$ schreiben, wobei jeweils $\alpha_i = \alpha_{i+1} \circ f_i$ gilt, also α_i auf α_{i+1} liegt. Jeder Simplex $\alpha_i \in \Delta^n$ entspricht auf diese Weise genau einem Knoten von $\text{sd } \Delta^n$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i : [k] \rightarrow [n]$ und bezeichne $e_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ den j -ten Einheitsvektor. Wir schreiben hier den Schwerpunkt jenes Simplex', der von den in α_i indizierten Einheitsvektoren aufgespannt wird, kurz

$$S(\alpha_i) := \frac{1}{|\text{Im } \alpha_i|} \sum_{j \in \text{Im } \alpha_i} e_j.$$

Satz 3.2.2. *Die Abbildung*

$$h : \left\{ \begin{array}{ll} |\text{sd } \Delta^n| & \rightarrow |\Delta^n| \\ [((\alpha_0, \dots, \alpha_k), (t_0, \dots, t_k))] & \mapsto \sum_{i=0}^k t_i \cdot S(\alpha_i) \end{array} \right.$$

*ist ein Homöomorphismus, also gilt $|\text{sd } \Delta^n| \cong |\Delta^n|$ in **Top**.*

Wir können also die Realisierung von $\text{sd } \Delta^n$ stetig und injektiv in den \mathbb{R}^{n+1} einbetten. Ein Knoten (α_i) von $\text{sd } \Delta^n$ wird dabei auf das Mittel der in α_i angegebenen Ecken e_j , $j \in \text{Im } \alpha_i$, des topologischen Standardsimplex'

$|\Delta^n|$ abgebildet. Zur Verkürzung der Schreibweise setzen wir noch $[\alpha, t] := [\alpha_0, \dots, \alpha_k; t_0, \dots, t_k] := [((\alpha_0, \dots, \alpha_k), (t_0, \dots, t_k))]$. Damit verkürzt sich die Definition von h auf $h([\alpha, t]) = \sum_{i=0}^k t_i \cdot S(\alpha_i)$.

Beweis. Um zu sehen, dass h wohldefiniert ist, fassen wir h kurz als Funktion von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ auf und zeigen z. B., dass $h((d_i(\alpha), t)) = h((\alpha, d_*^i(t)))$:

$$\begin{aligned} h((d_i(\alpha), t)) &= h((\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k; t)) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} t_j S(\alpha_j) + 0 \cdot S(\alpha_i) + \sum_{j=i+1}^k t_{j-1} S(\alpha_j) \\ &= h((\alpha; t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k)) = h((\alpha, d_*^i(t))) \end{aligned}$$

Nach Eigenschaften der finalen Topologie folgt aus der Wohldefiniertheit auch die Stetigkeit von h , da die Einschränkungen von h auf $\{\alpha\} \times |\Delta^k| \in |\text{sd } \Delta^n|$ affine Abbildungen und somit stetig sind (wobei $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\text{sd } \Delta^n)_k$ ist).

Nun zeigen wir die Surjektivität von h . Sei dazu $y = (t_0, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n t_i e_i \in |\Delta^n| \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Setze $U := \{t_0, \dots, t_n\} \setminus \{0\}$, $k := |U| - 1$ und wähle u_i so, dass $\{u_0, \dots, u_k\} = U = \{t_0, \dots, t_n\} \setminus \{0\}$ und $u_0 > u_1 > \dots > u_k$. Weiters seien $J_j := \{i \in [n] : t_i = u_j\}$ und α_j so, dass $\text{Im } \alpha_j = \bigcup_{i=0}^j J_i$, $j = 0, \dots, k$. Die J_i sind disjunkt, daher ist $|\text{Im } \alpha_j| = \sum_{i=0}^j |J_i|$. Wir suchen nun $c_i \in I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, sodass $h([\alpha_0, \dots, \alpha_k; c_0, \dots, c_k]) = y$, also

$$\begin{aligned} h([\alpha_0, \dots, \alpha_k; c_0, \dots, c_k]) &= \sum_{j=0}^k c_j \frac{1}{|\text{Im } \alpha_j|} \sum_{l \in \text{Im } \alpha_j} e_l \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{c_j}{|\text{Im } \alpha_j|} \sum_{i=0}^j \sum_{l \in J_i} e_l \stackrel{!}{=} y \end{aligned}$$

Wir ordnen gemäß der Ungleichung $0 \leq i \leq j \leq k$ um, erhalten

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \frac{c_j}{|\text{Im } \alpha_j|} \sum_{l \in J_i} e_l \stackrel{!}{=} y = \sum_{i=0}^n t_i e_i = \sum_{i=0}^k \sum_{l \in J_i} t_l e_l = \sum_{i=0}^k u_i \sum_{l \in J_i} e_l$$

und daraus, weil die J_i disjunkt sind, das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & \frac{c_0}{|\text{Im } \alpha_0|} + \frac{c_1}{|\text{Im } \alpha_1|} + \dots + \frac{c_{k-1}}{|\text{Im } \alpha_{k-1}|} + \frac{c_k}{|\text{Im } \alpha_k|} \\ u_1 & = & \frac{c_1}{|\text{Im } \alpha_1|} + \dots + \frac{c_{k-1}}{|\text{Im } \alpha_{k-1}|} + \frac{c_k}{|\text{Im } \alpha_k|} \\ \vdots & & \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ u_{k-1} & = & \frac{c_{k-1}}{|\text{Im } \alpha_{k-1}|} + \frac{c_k}{|\text{Im } \alpha_k|} \\ u_k & = & \frac{c_k}{|\text{Im } \alpha_k|} \end{array}$$

mit den Lösungen $c_k = u_k |\operatorname{Im} \alpha_k|$ und $c_i = (u_i - u_{i+1}) |\operatorname{Im} \alpha_i|$, $i = 0, \dots, k-1$. Nun sehen wir, wieder durch Umordnen gemäß $0 \leq j \leq i \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k c_i &= \sum_{i=0}^{k-1} (u_i - u_{i+1}) |\operatorname{Im} \alpha_i| + c_k = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i (u_i - u_{i+1}) |J_j| + c_k \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} |J_j| \sum_{i=j}^{k-1} (u_i - u_{i+1}) + u_k |\operatorname{Im} \alpha_k| = \sum_{j=0}^{k-1} |J_j| (u_j - u_k) + \sum_{j=0}^k |J_j| u_k \\ &= \sum_{j=0}^k u_j |J_j| = \sum_{i=0}^n t_i = 1. \end{aligned}$$

Daher und wegen $u_k > 0$ und $u_i > u_{i+1}$ sind alle $c_i \in I$ und h ist surjektiv.

Der vorstehende Beweis der Surjektivität (diese ließe sich auch etwas einfacher zeigen) ist eine ergänzte und formalisierte Version dessen in [5], S. 192f. Dort wird für Satz 3.2.2 nichts weiter gezeigt. Tatsächlich erlaubt der Beweis die Definition einer Funktion

$$g : \begin{cases} |\Delta^n| & \rightarrow & |\operatorname{sd} \Delta^n| \\ (t_0, \dots, t_n) & \mapsto & [\alpha_0, \dots, \alpha_k; c_0, \dots, c_k] \end{cases} ,$$

sodass $h \circ g = \operatorname{id}_{|\Delta^n|}$. Aus der Existenz von g folgt aber nicht die Injektivität von h , die in [5] nicht gezeigt wird. Möglicherweise gibt es auch einen trivialen Weg, diese zu sehen.

Um zu sehen, dass h injektiv ist, nehmen wir an, dass $h([\alpha, t]) = h([\beta, u])$, aber $(\alpha, t) = (\alpha_0, \dots, \alpha_p; t_0, \dots, t_p) \not\sim (\beta, u) = (\beta_0, \dots, \beta_q; u_0, \dots, u_q)$. Weiters sei $p+q$ minimal, sodass die vorgenannten Bedingungen gelten. Aus dieser Minimalität und Lemma 3.1.4 folgt, dass α und β nicht degeneriert – also strikt wachsend – und alle t_i und u_i größer 0 sind. Wäre $p=q=0$, würde $S(\alpha_0) = h([\alpha_0; 1]) = h([\beta_0; 1]) = S(\beta_0)$ und daraus, weil nun beide Bilder die gleichen Indizes enthalten müssen, $\alpha_0 = \beta_0$ folgen. Dies kann aber nicht sein, also ist $p+q > 0$. Nehmen wir an, dass $\alpha_p \neq \beta_q$. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $j \in \operatorname{Im} \alpha_p \cap (\operatorname{Im} \beta_q)^c$. Nun ist $j \in (\operatorname{Im} \beta_i)^c$, $i = 0, \dots, q$ und weil e_j auf der rechten Seite der zu Beginn angenommenen Gleichung

$$\sum_{i=0}^p t_i S(\alpha_i) = \sum_{i=0}^q u_i S(\beta_i)$$

nicht vorkommt, folgt $t_p = 0$, Widerspruch. Wir haben $\alpha_p = \beta_q$.

Nehmen wir an, α oder β wären ein 0-Simplex, also beispielsweise $q=0$. Dann ist $p > 0$, $\alpha_p = \beta_0$ und daher $\operatorname{Im} \alpha_0 \subset \beta_0$. Sei $j \in \operatorname{Im} \beta_0 \setminus \operatorname{Im} \alpha_0$. Der Koeffizient von e_j ist

$$\frac{u_0}{|\operatorname{Im} \beta_0|} = \frac{t_0}{|\operatorname{Im} \alpha_0|} + x + \frac{t_p}{|\operatorname{Im} \alpha_p|} > \frac{t_0}{|\operatorname{Im} \alpha_0|}$$

mit $x \geq 0$. Ist $j' \in \text{Im } \alpha_0$, so erhalten wir jedoch für den Koeffizienten von $e_{j'}$ wegen $\text{Im } \alpha_0 \subseteq \text{Im } \beta_0$ die Gleichung

$$\frac{u_0}{|\text{Im } \beta_0|} = \frac{t_0}{|\text{Im } \alpha_0|},$$

ein Widerspruch. Also sind sowohl p als auch q positiv.

Wir schließen nun quasi induktiv, dass $\alpha_{p-1} = \beta_{q-1}$ und $t_p = u_q$. Angenommen $\alpha_{p-1} \neq \beta_{q-1}$. Dann ist $\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1} \neq \text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1}$. Wir unterscheiden zwei Fälle und führen beide auf einen Widerspruch. Ist $(\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}) \cap (\text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1}) \neq \emptyset$, gibt es also ein $j \in (\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}) \cap (\text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1})$, so hat e_j den Koeffizienten

$$\frac{t_p}{|\text{Im } \alpha_p|} = \frac{u_q}{|\text{Im } \beta_q|} = \frac{u_q}{|\text{Im } \alpha_p|}$$

und wir haben $t_p = u_q$. Es gibt ohne Beschränkung der Allgemeinheit sicher ein $j' \in \text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}$ mit $j' \notin \text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1}$. Der Koeffizient von $e_{j'}$ ist wegen $j' \in \text{Im } \beta_{q-1}$

$$\frac{u_q}{|\text{Im } \beta_q|} = \frac{t_p}{|\text{Im } \alpha_p|} = x + \frac{u_{q-1}}{|\text{Im } \beta_{q-1}|} + \frac{u_q}{|\text{Im } \beta_q|}$$

mit $x \geq 0$, daher ist $u_{q-1} = 0$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist $(\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}) \cap (\text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1}) = \emptyset$, das heißt $\text{Im } \alpha_p \cap \text{Im } \alpha_{p-1}^c \cap \text{Im } \alpha_p \cap \text{Im } \beta_{q-1}^c = \text{Im } \alpha_p \cap (\text{Im } \alpha_{p-1} \cup \text{Im } \beta_{q-1})^c = \emptyset$. Wir sehen $\text{Im } \alpha_p = \text{Im } \alpha_{p-1} \cup \text{Im } \beta_{q-1}$. Da α und β nicht degeneriert sind, gibt es Indizes $a \in \text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}$ und $b \in \text{Im } \beta_q \setminus \text{Im } \beta_{q-1}$. Aus $(\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \alpha_{p-1}) \cap (\text{Im } \alpha_p \setminus \text{Im } \beta_{q-1}) = \emptyset$ folgt $a \in \text{Im } \beta_{q-1}$ und $b \in \text{Im } \alpha_{p-1}$, natürlich ist $a \neq b$. Setze zur Vereinfachung $S_\alpha := \sum_{i=0}^{p-2} t_i S(\alpha_i)$ und $S_\beta := \sum_{i=0}^{q-2} u_i S(\beta_i)$. Wir haben einerseits

$$S_\alpha + t_{p-1} S(\alpha_{p-1}) + (t_p - u_q) S(\alpha_p) = S_\beta + u_{q-1} S(\alpha_{q-1}),$$

woraus wir den Koeffizienten von e_b ablesen und abschätzen:

$$0 = x + \frac{t_{p-1}}{|\text{Im } \alpha_{p-1}|} + \frac{t_p - u_q}{|\text{Im } \alpha_p|} \geq \frac{t_{p-1}}{|\text{Im } \alpha_{p-1}|} + \frac{t_p - u_q}{|\text{Im } \alpha_p|} > \frac{t_p - u_q}{|\text{Im } \alpha_p|},$$

Wir erhalten $t_p < u_q$. Andererseits haben wir

$$S_\alpha + t_{p-1} S(\alpha_{p-1}) = S_\beta + u_{q-1} S(\beta_{q-1}) + (u_q - t_p) S(\beta_q)$$

und für den Koeffizienten von e_a

$$0 = y + \frac{u_{q-1}}{|\text{Im } \beta_{q-1}|} + \frac{u_q - t_p}{|\text{Im } \beta_q|} \geq \frac{u_{q-1}}{|\text{Im } \beta_{q-1}|} + \frac{u_q - t_p}{|\text{Im } \beta_q|} > \frac{u_q - t_p}{|\text{Im } \beta_q|}.$$

Wir sehen $t_p > u_q$, Widerspruch. Die Injektivität folgt nun durch „induktive“ Iteration der obigen Argumentation. \square

3.3 Kan-Komplexe und Ex-Funktor

3.3.1 Homotopie

Definition 3.3.1. Sei $X \in \mathbf{sSet}$ und $x, y \in X_n$. Wir sagen, dass x *homotop* zu y ist und schreiben $x \sim y$, wenn x und y gleiche Seiten haben, also $d_i(x) = d_i(y)$, $0 \leq i \leq n$, und es ein $z \in X_{n+1}$ gibt mit $d_n(z) = x$, $d_{n+1}(z) = y$ und $d_i(z) = s_{n-1}d_i(x)$, $0 \leq i < n$. In diesem Fall heißt z *Homotopie* von x nach y .

Lemma 3.3.2. Die Relation \sim auf X_n ist reflexiv für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $z = s_n(x)$. Es gilt $d_n s_n(x) = d_{n+1} s_n(x) = x$ und $d_i(z) = d_i s_n(x) = s_{n-1} d_i(x)$ für $0 \leq i < n$ gemäß den simplizialen Identitäten. \square

Beispiel 3.3.3. Wir überlegen uns, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation auf den Simplizes des – als simpliziale Menge beschriebenen – Kreises X ist. Dazu zeigen wir, dass es nur triviale Homotopien $x \sim x$ gibt, woraus mit Lemma 3.3.2 unsere Behauptung folgt.

Es ist X wie in Abschnitt 2.3 beschrieben aus Δ^1 verklebt, also $X_0 = \{[0]\}$, $X_1 = \{[00], [01]\}$ und X_n besteht aus den verschiedenen Klassen $[\alpha]$, wobei $\alpha : [n] \rightarrow [1]$ und $\alpha_0 = 0$.

Betrachten wir zuerst X_1 . Es gibt sicher keine Homotopie von $[00]$ nach $[01]$, denn aus $d_1(z) = [00]$ folgt $z = [000]$, aber $d_2([000]) \neq [01]$. Die einzig mögliche Homotopie von $[01]$ nach $[00]$ wäre $[001]$. Es ist aber $d_0([001]) = [01]$ und $s_0 d_0([01]) = s_0([1]) = s_0([0]) = [00]$, also ist auch $[01]$ nicht homotop zu $[00]$ und X_1 zerfällt in triviale Klassen.

Sei $n > 1$ und x homotop zu y in X_n . Wir unterscheiden zwei Fälle. Sind sowohl x als auch y von der Form $[00 \dots]$, dann ist $x = s_0 d_0(x) = s_0 d_0(y) = y$.

Im zweiten Fall nehmen wir an, dass beispielsweise $x = [01 \dots 1]$ ist. Dann ist $d_2(y) = d_2(x) = [01 \dots 1]$, daraus folgt aber $y = [01 \dots 1] = x$.

Im Allgemeinen ist Homotopie keine Äquivalenzrelation auf den Simplizes einer simplizialen Menge, wie das folgende simple Beispiel zeigt.

Beispiel 3.3.4. Wir betrachten Δ^1 . Es ist 01 eine Homotopie von 1 nach 0 , denn $d_0(01) = 1$ und $d_1(01) = 0$, alle andere Bedingungen sind wegen $n = 0$ leer. Wäre z eine Homotopie von 0 nach 1 , so müsste $d_0(z) = 0$ und deshalb $z = 00$ gelten, aber $d_1(00) = 0 \neq 1$, daher gibt es keine solche Homotopie. Es ist also \sim keine Äquivalenzrelation auf Δ^1_0 .

Sind X und Y topologische Räume, so heißen zwei stetige Abbildungen f und g von $X \rightarrow Y$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, sodass $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$ für jedes $x \in X$. Ganz analog läuft

Definition 3.3.5. Seien $X, Y \in \mathbf{sSet}$. Zwei Abbildungen $\tau, \sigma : X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, wenn es eine Abbildung $\theta : X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ gibt, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X_n$ stets $\theta_n(x, s_0^n(0)) = \tau_n(x)$ und $\theta_n(x, s_0^n(1)) = \sigma_n(x)$ gilt.

Wir können diese Definition auch dadurch ausdrücken, dass τ und σ homotop sind, wenn in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X \cong X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\text{id} \times \overline{d^1}} & X \times \Delta^1 & \xleftarrow{\text{id} \times \overline{d^0}} & X \times \Delta^0 \cong X \\
 & \searrow \tau & \downarrow \theta & \swarrow \sigma & \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

der strichlierte Pfeil θ existiert. In diesem Fall schreiben wir $\tau \simeq_{\theta} \sigma$ oder nur $\tau \simeq \sigma$ und nennen θ eine Homotopie von τ nach σ .

Im weiteren geht es um das Problem, dass auch dieser Homotopiebegriff – im Gegensatz zu jenem für topologische Räume – im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation auf den Abbildungen induziert. Dies liegt daran, dass die Richtung der Homotopie für simpliziale Mengen starr vorgegeben ist und deshalb keine Symmetrie entsteht.

Beispiel 3.3.6. Dies sehen wir am einfachsten an den beiden Abbildungen $\tau = \overline{d^1}$ und $\sigma = \overline{d^0}$ von $\Delta^0 \rightarrow \Delta^1$. Die Abbildung τ_0 bildet 0 auf 0 ab, σ_0 dagegen auf 1. Die Homotopie θ ist einfach die Projektion $\Delta^0 \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^1$ auf die zweite Komponente. Nehmen wir nun an, es gäbe eine Homotopie $\sigma \simeq_{\theta'} \tau$. Dann wäre (vgl. Definition 2.1.12) $d_1 \theta'_1((00, 01)) = \theta'_0((0, 0)) = \sigma_0((0, 0)) = 1$ und $d_0 \theta'_1((00, 01)) = \theta'_0((0, 1)) = \tau_0((0, 0)) = 0$. Es gibt aber keinen 1-Simplex von Δ^1 mit dieser Eigenschaft. Es gilt also $\tau \simeq \sigma$, aber $\sigma \not\simeq \tau$.

3.3.2 Kan-Bedingung

Um Homotopie zu einer Äquivalenzrelation zu machen, wird der Kreis der betrachteten simplizialen Mengen auf die sogenannten Kan-Komplexe eingeschränkt. Mittels dem am Ende des Kapitels angedeuteten Ex^∞ -Funktorkönnen die für Kan-Komplexe gebildeten Homotopiebegriffe wiederum auf ganz \mathbf{sSet} ausgeweitet werden.

Definition 3.3.7. Es sei Λ_k^n die von $d_i(1_{[n]})$, $i \neq k$, erzeugte Untermenge von Δ^n . Die simpliziale Menge Λ_k^n heißt *k-tes Horn* von Δ^n .

Statt *Horn* wird auch der Begriff *Trichter* verwendet.

Definition 3.3.8. Eine simpliziale Menge X erfüllt die *Ausfüllungs-* oder *Kan-Bedingung*, wenn jede simpliziale Abbildung $\tau : \Lambda_k^n \rightarrow X$ zu einer Abbildung $\tau' : \Delta^n \rightarrow X$ fortgesetzt werden kann. In diesem Fall heißt X auch *Kan-Komplex*.

Dies ist äquivalent dazu, dass in jedem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \xrightarrow{\quad \subset \quad} & \Delta^n \\
 & \searrow \tau & \vdots \tau' \\
 & & X
 \end{array}$$

der strichlierte Pfeil τ' existiert. Dies bedeutet geometrisch, dass der „Deckel“ des Trichters bzw. die „Bodenplatte“ des Horns sowie der Inhalt des Horns Simplexes von X sind.

Lemma 3.3.9. *Eine simpliziale Menge X ist genau dann ein Kan-Komplex, wenn für jede Auswahl $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ von $(n-1)$ -Simplexes von X mit $d_i(\alpha_j) = d_{j-1}(\alpha_i)$, $i < j$, $i \neq k \neq j$, ein Simplex $\alpha \in X_n$ existiert, sodass $d_i(\alpha) = \alpha_i$, $i \neq k$.*

Beweis. Sei X Kan-Komplex und seien α_i wie oben vorgegeben. Definiere eine natürliche Abbildung $\tau : \Lambda_k^n \rightarrow X$ durch $\tau_{n-1}(d_i(1_{[n]})) := \alpha_i$. Für alle übrigen Simplexes $\Lambda_k^n(f)(d_i(1_{[n]}))$ von Λ_k^n setze

$$\tau_m\left(\Lambda_k^n(f)(d_i(1_{[n]}))\right) = \tau_m(\text{id}_{[n]} \circ d^i \circ f) := X(f)\tau_{n-1}(\text{id}_{[n]} \circ d^i) = X(f)(\alpha_i).$$

Dies ist mit den Gleichungen für die α_i verträglich, denn ist $i < j$ und $i \neq k \neq j$, so gilt $d_i(\alpha_j) = d_i\tau_{n-1}d_j(1_{[n]}) = \tau_{n-2}d_id_j(1_{[n]}) = \tau_{n-2}d_{j-1}d_i(1_{[n]}) = d_{j-1}(\alpha_i)$ aufgrund der simplizialen Identitäten. Wir sehen, dass τ eine natürliche Abbildung $\Lambda_k^n \rightarrow X$ ist, also gibt es eine Fortsetzung $\tau' : \Delta \rightarrow X$. Setze $\alpha := \tau'_n(1_{[n]})$. Es ist $d_i(\alpha) = d_i\tau'_n(1_{[n]}) = \tau'_{n-1}d_i(1_{[n]}) = \alpha_i$.

Erfülle X nun umgekehrt die Bedingung aus dem Lemma und sei $\tau : \Lambda_k^n \rightarrow X$ eine natürliche Abbildung. Setze $\alpha_i := \tau_{n-1}(d_i(1_{[n]})) \in X_{n-1}$, $i \neq k$. Ist $n = 1$, so erfüllen diese α_i trivialerweise die obige Bedingung (sie haben keine Seiten). Sei also $n > 1$, $i < j$ und $i \neq k \neq j$; aufgrund der simplizialen Identitäten gilt

$$\begin{aligned}
 d_i(\alpha_j) &= d_i\tau_{n-1}d_j(1_{[n]}) = \tau_{n-2}d_id_j(1_{[n]}) = \tau_{n-2}d_{j-1}d_i(1_{[n]}) \\
 &= d_{j-1}\tau_{n-1}(d_i(1_{[n]})) = d_{j-1}(\alpha_i).
 \end{aligned}$$

Also gibt es ein $\alpha \in X_n$ mit $d_i(\alpha) = \alpha_i$, $i \neq k$, setze $\tau'_n(1_{[n]}) := \alpha$ und $\tau'_{n-1}d_k(1_{[n]}) := d_k(\alpha) = d_k\tau_n(1_{[n]})$ und überall sonst $\tau' := \tau$. Es ist

$$d_i\tau_n(1_{[n]}) = d_i(\alpha) = \alpha_i = \tau_{n-1}d_i(1_{[n]}), \quad i \in [n],$$

das heißt, dass τ'_n eine natürliche Fortsetzung von τ ist. \square

Lemma 3.3.10. *Ist X ein Kan-Komplex, so ist \sim eine Äquivalenzrelation auf $X_n, n \in \mathbb{N}$.¹*

¹Aus [9], S. 5f.

Beweis. Lemma 3.3.2 ist die Reflexivität der Relation. Sei z eine Homotopie von x nach y und z' von x nach y' . Wir müssen $y \sim y'$ zeigen. Die $n + 2$ Simplizes

$$x_0 = d_0 s_n s_n(y), \dots, x_{n-1} := d_{n-1} s_n s_n(y), x_n := z, x_{n+1} := z' \in X_{n+1}$$

erfüllen die „Hornbedingung“ aus Lemma 3.3.9 mit $k = n + 2$:

Sei jeweils $i < j$ und $i, j < n + 2$. Für $j < n$ ist $d_i(x_j) = d_i d_j s_n s_n(y) = d_{j-1} d_i s_n s_n(y) = d_{j-1}(x_i)$. Im Fall $j = n$ ist

$$\begin{aligned} d_i(x_n) &= d_i(z) = s_{n-1} d_i(y) = d_i s_n(y) = d_i \operatorname{id}_{X_{n+1}} s_n(y) \\ &= d_i d_n s_n s_n(y) = d_{n-1} d_i s_n s_n(y) = d_{n-1}(x_i). \end{aligned}$$

Analog sehen wir die Gleichung im Fall $j = n + 1$, $i < n$. Ist $j = n + 1$ und $i = n$, dann haben wir $d_n x_{n+1} = d_n z' = x = d_n z = d_{(n+1)-1}(x_n)$.

Es gibt daher einen Simplex $w \in X_{n+2}$, sodass $d_i(w) = x_i$, $0 \leq i \leq n + 1$. Der Simplex $d_{n+2}(w) \in X_{n+1}$ ist eine Homotopie von y nach y' :

Es ist $d_n d_{n+2}(w) = d_{n+1} d_n(w) = d_{n+1}(z) = y$ und analog bekommen wir $d_{n+1}(d_{n+2}(w)) = y'$. Für $i < n$ haben wir

$$\begin{aligned} d_i d_{n+2}(w) &= d_{n+1} d_i s_n s_n(y) = d_{n+2} d_i s_n s_n(y) \\ &= d_i s_n d_{n+1} s_n(y) = d_i s_n(y) = s_{n-1} d_i(y) \end{aligned}$$

und es gilt $y \sim y'$. □

Beispiel 3.3.3 zeigt, dass die Kan-Bedingung nicht notwendig dafür ist, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation auf den Simplizes einer simplizialen Menge ist.

Auch für Abbildungen gilt: Wenn Y ein Kan-Komplex ist, so ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf den Abbildungen $X \rightarrow Y$. Dies zu zeigen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Das Resultat findet sich z. B. in [9], S. 22 und [5], S. 26.

Die Kan-Bedingung ist bei näherer Betrachtung sehr eng und eigenartig. Leider sind dadurch wichtige simpliziale Mengen keine Kan-Komplexe. Ein Beispiel:

Lemma 3.3.11. *Sei $X \in \mathbf{H}$ und existiere ein nicht degeneriertes $\alpha \in X_n$ mit $n > 0$, dann ist X kein Kan-Komplex.*

Beweis. Aus der Annahme folgt, dass es ein $\beta = (a, b) \in X_1$ mit $a < b$ gibt. Betrachten wir jene simpliziale Abbildung $\tau : \Lambda_0^2 \rightarrow \Delta^1 \rightarrow X$, die die Kante 02 auf 0 zusammenzieht und dann Δ^1 als β in X einbettet. Formal ist τ durch $\tau_1(01) = (a, b)$ und $\tau_1(02) = (a, a)$ fixiert. Wäre $\tau' : \Delta^2 \rightarrow X$ eine Fortsetzung von τ , müsste nach Lemma 2.2.8 $\tau'_1(12)(0) = \tau_1(01)(1) = (a, b)(1) = b$ und $\tau'_1(12)(1) = \tau_1(02)(1) = (a, a)(1) = a$ gelten. Nach Definition von \mathbf{H} folgt daraus $b \leq a$, ein Widerspruch. Dies zeigt formal an, dass wir versuchen, zwei entgegengesetzt orientierte Kanten zu identifizieren, was der Natürlichkeit von τ' widerspricht. □

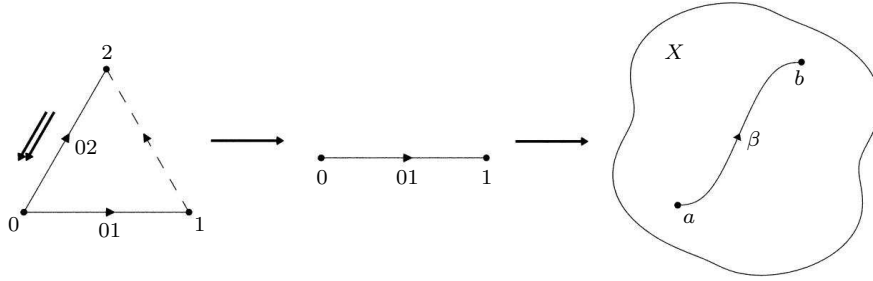


Abbildung 3.2: Die simpliciale Abbildung $\tau : \Lambda_0^2 \rightarrow X$.

Die „Reparatur“ des Problems durch die Eingrenzung auf Kan-Komplexe führt uns also zu simplicialen Mengen, die von leicht zugänglichen, anschaulichen Beispielen und einfachen topologischen Konstruktionen weit entfernt sind. Es ist eine Schwäche von FRIEDMANS Text, zu suggerieren, dass die Homotopietheorie von simplicialen Mengen elementar zugänglich sei.

Um trotzdem eine sinnvolle Homotopietheorie für alle simplicialen Mengen – auch für Simplicialkomplexe – zu bekommen, kann ein Funktor $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ definiert werden, der jedem $X \in \mathbf{sSet}$ einen Kan-Komplex zuordnet, der den gleichen Homotopietyp wie X hat (wobei dieser Begriff natürlich erst zu definieren ist). Dies geschieht üblicherweise mittels dem singulären Funktor, der X auf jene simpliciale Menge SX abbildet, die durch $(SX)_n = \text{hom}_{\mathbf{TOP}}(|\Delta^n|, |X|)$ und $S(f)(\alpha) = \alpha \circ f_*$ gegeben ist. KAN gibt in [7] einen anderen solchen Funktor an, der ohne den Umweg über topologische Begriffe konstruiert wird, dafür aber einigen kombinatorischen Aufwand verlangt.

Unser Ziel ist hier, den geometrischen Gehalt der kategorientheoretischen Definitionen annäherungsweise zu verstehen und sichtbar zu machen.

Definition 3.3.12. Sei $X \in \mathbf{sSet}$ beliebig. Die *Erweiterung* $\text{Ex } X$ von X ist die simpliciale Menge, die durch

$$(\text{Ex } X)_n = \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\text{sd } \Delta^n, X)$$

gegeben ist. Für $f : [m] \rightarrow [n]$ und $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ist $\text{Ex}(f)(\sigma) = \sigma \circ \text{sd} \bar{f}$.

3.3.3 Die 2-Struktur von $\text{Ex } \Delta^1$

Was tut der Funktor Ex geometrisch? Eine ganze Menge! Wir betrachten dazu das einfachste nichttriviale Beispiel, $\text{Ex } \Delta^1$. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir für Simplices $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ das Wort $\alpha_0 \dots \alpha_k$, also z. B. statt $(0, 1)$ nur 01 .

Eine wichtige Beobachtung: Da die Unterteilung der Standardsimplices die Struktur eines Nervs einer Kategorie trägt, reicht es, die Bilder der Knoten festzulegen. Alles andere ergibt sich durch die Natürlichkeit. Also: Eine natürliche Abbildung $\text{sd } \Delta^k \rightarrow \Delta^1$ ist durch ihre Werte auf den Knoten vollständig bestimmt.

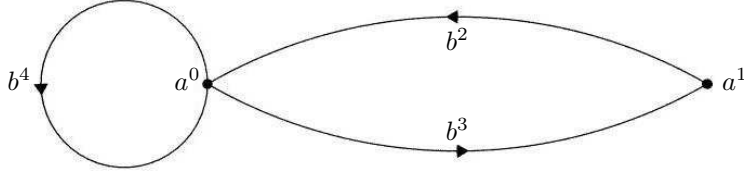


Abbildung 3.3: Die 1-Struktur von $\text{Ex } \Delta^1$.

Die Knoten von $\text{Ex } \Delta^1$ sind gegeben durch alle natürlichen Abbildungen $\Delta^0 \cong \text{sd } \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$. Wir nennen sie a^0 mit $a^0_0((0)) := 0$ und a^1 für $a^1_0((0)) := 1$. Es gibt keine weiteren 0-Simplizes in Δ^1_0 als Ziel, also sind dies alle Knoten.

Wesentlich komplexer, aber noch überschaubar, ist die Situation schon bei den 1-Simplizes, also bei $(\text{Ex } \Delta^1)_1 = \text{Nat}(\text{sd } \Delta^1, \Delta^1)$. Wir können alles auf einen Endpunkt „zusammenschrumpfen“ oder die Kante $(0, 01)$ auf einen Punkt zusammenziehen und die verbliebene Kante drehen. Wir können auch die Kante $(1, 01)$ auf einen Punkt zusammenziehen oder die beiden Kanten mit Angelpunkt (01) zusammenklappen, also zu 01 identifizieren. Siehe dazu Tabelle 3.1. Es ist

| x | $b^0_0(x)$ | $b^1_0(x)$ | $b^2_0(x)$ | $b^3_0(x)$ | $b^4_0(x)$ |
|------|------------|------------|------------|------------|------------|
| (0) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| (1) | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| (01) | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabelle 3.1: Die 0-Werte der 1-Simplizes von $\text{Ex } \Delta^1$.

$s_0(a^0)_1((0, 01)) = a^0_1 \circ (\text{sd } \overline{s^0})_1((0, 01)) = a^0_1((0, 0)) = 00$, also ist $s_0(a^0) = b^0$. Analog haben wir $s_0(a^1)_1((0, 01)) = s_0(a^1)_1((1, 01)) = a^1_1((0, 0)) = 11$, und $s_0(a^1) = b^1$. Damit sind die verbleibenden b^i nicht degeneriert. Welche Knoten verbinden sie nun miteinander? Dazu verfolgen wir (0) auf dem Lauf durch die Funktionen $d_i(b^j)_0 = b^j_0 \circ (\text{sd } \overline{d^i})_0$. Es ist $(\text{sd } \overline{d^1})_0((0)) = (0)$ und $(\text{sd } \overline{d^0})_0((0)) = (1)$.

Nun ist beispielsweise $d_1(b^3) = a^0$, denn $b^3_0 \circ (\text{sd } \overline{d^1})_0((0)) = b^3_0((0)) = 0$. Es führt also b^2 von a^1 nach a^0 , b^3 läuft von a^0 nach a^1 und b^4 ist eine (nicht degenerierte!) Schlaufe an a^0 . Die Graphenstruktur von $\text{Ex } \Delta^1$ lässt sich also durch Abbildung 3.3 veranschaulichen.

Wirklich „kombinatorisch“ wird die zweidimensionale Struktur. Wir können die 2-Simplizes von $\text{Ex } \Delta^1$ relativ einfach vollständig enumerieren, wenn wir die Natürlichkeit der jeweiligen Abbildung ausnützen. Dazu zwei Beobachtungen.

Die erste: Der Knoten $(012) \in \text{sd } \Delta^2_0$ wird immer auf 1 abgebildet, außer bei jener Abbildung, die alles auf 0 wirft. Das sehen wir einfach dadurch, dass alle anderen nicht degenerierten $\alpha \in \Delta^2_0$ oder $\alpha \in \Delta^2_1$ auf (012) liegen. Das heißt, $(\alpha, 012)$ ist ein zulässiger Simplex in $\text{sd } \Delta^2_1$. Nehmen wir nun an, dass $\tau_0((012)) = 0$ ist. Wir haben $\tau_0((\alpha)) = \tau_0 \circ d_1((\alpha, 012)) = d_1 \circ \tau_1((\alpha, 012))$.

Wegen

$$d_0(\tau_1((\alpha, 012))) = \tau_0 d_0(\alpha, 012) = \tau_0((012)) = 0$$

muss $\tau_1((\alpha, 012)) = 00$ gelten (das ist der einzige 1-Simplex von Δ^1 , der obige Gleichung erfüllt) und daher ist $\tau_0((\alpha)) = d_1(00) = 0$. Also bildet τ alle Knoten auf 0 ab.

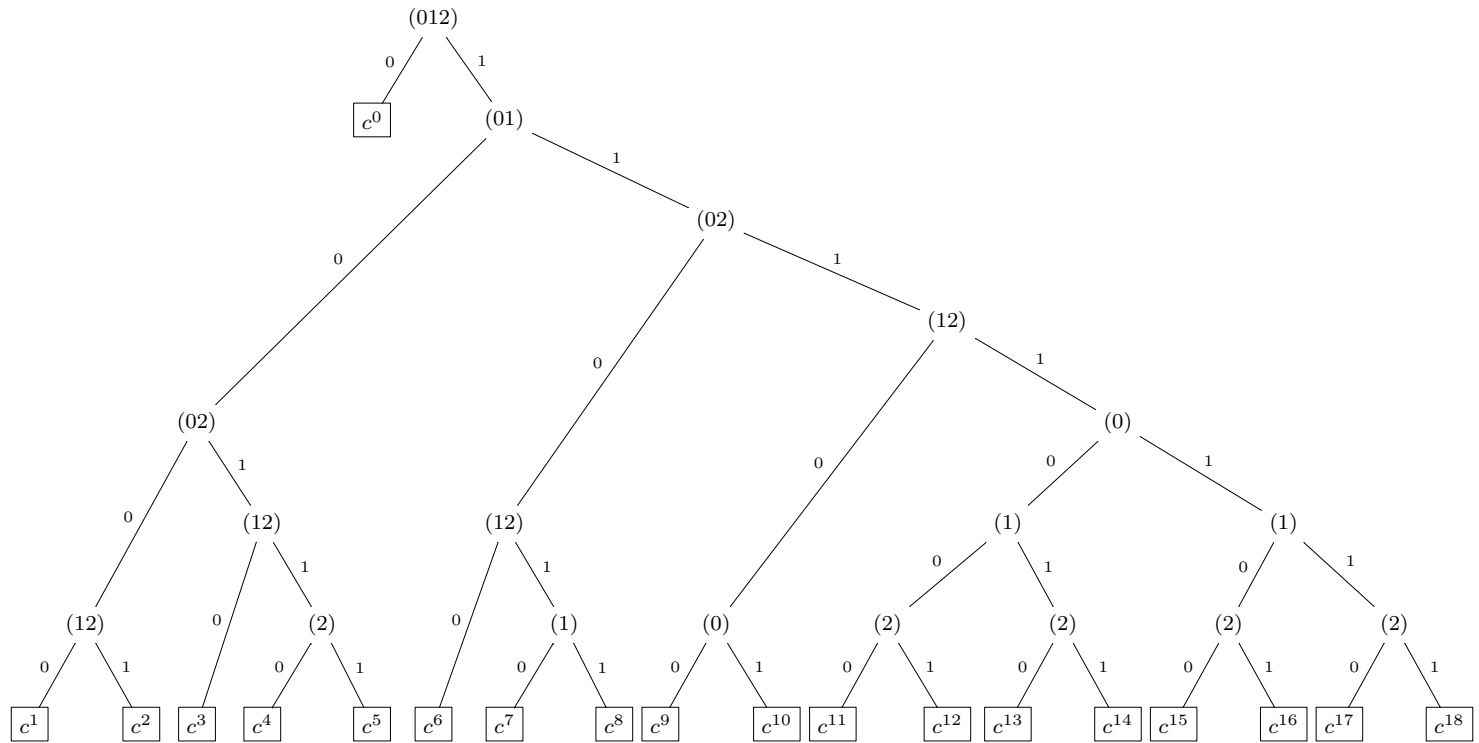
Die zweite Beobachtung ist ganz ähnlich. Wird nämlich ein Knoten wie (01), also (β) mit $\beta \in \Delta^2_1$, auf 0 abgebildet, so auch die „darunterliegenden“ Knoten 0 und 1 resp. $(d_1(\beta))$ und $(d_0(\beta))$. Das sehen wir wie oben: Es ist $\tau_0((0)) = \tau_0 \circ d_1((0, 01)) = d_1 \circ \tau_1((0, 01))$ und wenn $\tau_0((01)) = 0$, muss $\tau_1((0, 01)) = 00$ gelten, also haben wir $\tau_0((0)) = 0$ und analog $\tau_0((1)) = 0$.

Wir können diese Beobachtungen wie folgt verallgemeinern: Jede zulässige Abbildung $\text{sd } \Delta^k \rightarrow \Delta^n$ ist durch eine Beschriftung der Knoten von $\text{sd } \Delta^k$ mit Zahlen aus $[n]$ gegeben, die entlang aller Kantenzüge monoton wachsend ist. Die Beschriftung gibt dabei jeweils das Bild des Knoten an. Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass wir die Seiten unmittelbar ablesen können. Die Beschriftung der Knoten der Untersimplizes gibt nämlich wieder zulässige simpliziale Abbildungen an, die genau den Seiten entsprechen. Die Reihenfolge der Seiten (d_0, d_1, \dots) wiederum gibt die Orientierung der Simplizes vor.

Um nun $(\text{Ex } \Delta^1)_2$ zu enumerieren, können wir beispielsweise einen Entscheidungsbaum zeichnen, in dem jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt eine natürliche Abbildung fixiert. Wir wählen (01) als Wurzel mit zwei Ästen - links wird (01) auf 0 abgebildet, rechts auf 1. Jeder Knoten im Baum ist ein 0-Simplex von $\text{sd } \Delta^2$, wobei wir jedem Knoten die schon bekannten Abbildungsdaten zuordnen können. Ein Blatt ist jeder Knoten, an dem die Bilder aller sieben 0-Simplizes (0), (1), (2), (01), (02), (12), (012) durch den Pfad zu diesem Knoten bestimmt sind. Danach berechnen wir die entsprechenden Seiten. Dazu müssen wir die Werte von $d_i(c^j)_1 = c^j_1 \circ (\text{sd } \bar{d}^i)_1$ an den Stellen (0), (1) und (01) bestimmen, siehe Tabelle 3.3. Das bedeutet einfacher, die Beschriftungen der Knoten an den entsprechenden Seiten des unterteilten Dreiecks abzulesen. Um zu sehen, welche c^i degeneriert sind, haben wir auch alle Degeneriertheiten der b^i aufgelistet, siehe Tabelle 3.2.

Der Funktor Ex wurde von KAN in [7] eingeführt, um ohne Umweg über topologische Räume jeder simplizialen Menge einen Kan-Komplex des gleichen Homotopietyps zuzuordnen. Dazu definiert er eine kanonische Einbettung $e : X \rightarrow \text{Ex } X$ und betrachtet den Colimes $\text{Ex}^\infty X := \varinjlim \text{Ex}^n X$ über der Indexkategorie \mathbb{N} . In [7] zeigt er, dass $\text{Ex}^\infty X$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Das obige Beispiel zeigt uns, dass Kan-Komplexe in ihrer kombinatorischen Struktur tatsächlich sehr „komplex“ sind.

Abbildung 3.4: Enumerationsbaum für $(\text{Ex } \Delta^1)_2$.

| x | $(\text{sd } \overline{s^0})_2$ | $(\text{sd } \overline{s^1})_2$ | $s_0(b^2)_2$ | $s_1(b^2)_2$ | $s_0(b^3)_2$ | $s_1(b^3)_2$ | $s_0(b^4)_2$ | $s_1(b^4)_2$ |
|-------|---------------------------------|---------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (0) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| (1) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| (2) | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| (01) | 0 | 01 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| (02) | 01 | 01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (12) | -01 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| (012) | 01 | 01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabelle 3.2: Die Degeneriertheiten von $b^2, b^3, b^4 \in (\text{Ex } \Delta^1)_1$.

| | c^0 | c^1 | c^2 | c^3 | c^4 | c^5 | c^6 | c^7 | c^8 | c^9 |
|-------|--------------------------|-------|-------|-------|------------|------------|-------|-------|-------|------------|
| d_0 | b^0 | b^0 | b^4 | b^0 | b^4 | b^3 | b^0 | b^4 | b^2 | b^0 |
| d_1 | b^0 | b^0 | b^0 | b^4 | b^4 | b^3 | b^0 | b^0 | b^0 | b^4 |
| d_2 | b^0 | b^0 | b^0 | b^0 | b^0 | b^0 | b^4 | b^4 | b^3 | b^4 |
| ist | $s_0(b^0)$ $s_1(b^0)$ | | | | $s_0(b^4)$ | $s_0(b^3)$ | | | | $s_1(b^3)$ |

| | c^{10} | c^{11} | c^{12} | c^{13} | c^{14} | c^{15} | c^{16} | c^{17} | c^{18} |
|-------|------------|----------|----------|----------|------------|----------|------------|--------------------------|----------|
| d_0 | b^0 | b^4 | b^3 | b^2 | b^1 | b^4 | b^3 | b^2 | b^1 |
| d_0 | b^2 | b^4 | b^3 | b^4 | b^3 | b^2 | b^1 | b^2 | b^1 |
| d_0 | b^2 | b^4 | b^4 | b^3 | b^3 | b^2 | b^2 | b^1 | b^1 |
| ist | $s_1(b^2)$ | | | | $s_1(b^3)$ | | $s_0(b^2)$ | $s_0(b^1)$ $s_1(b^1)$ | |

Tabelle 3.3: Die Seiten der $c^i \in (\text{Ex } \Delta^1)_2$.

Anhang A

Kategorien

A.1 Komma-Kategorien

Wir betrachten folgende Situation: Seien \mathbf{C} , \mathbf{D} und \mathbf{E} Kategorien und F und G Funktoren

$$\mathbf{E} \xrightarrow{G} \mathbf{C} \xleftarrow{F} \mathbf{D}.$$

Die Komma-Kategorie $G \downarrow F$ definiert MAC LANE in [8], S. 46, wie folgt. Die Objekte sind alle Tripel (E, D, f) mit $D \in \mathbf{D}$, $E \in \mathbf{E}$ und $f : G(E) \rightarrow F(D)$. Die Pfeile $(E, D, f) \rightarrow (E', D', f')$ sind alle Paare (k, h) mit $k : E \rightarrow E'$, $h : D \rightarrow D'$, sodass

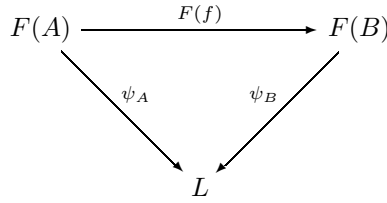
$$\begin{array}{ccc} G(E) & \xrightarrow{G(k)} & G(E') \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ F(D) & \xrightarrow{F(h)} & F(D') \end{array}$$

Wir können die Kategorie $\Delta \downarrow X$ von GOERSS und JARDINE in dieser Notation wiederfinden. Dazu wählen wir $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{sSet}$, $\mathbf{E} = \Delta$, $F = \text{id}_{\mathbf{sSet}}$ und $G = \bar{\quad}$ wobei $\overline{[n]} = \Delta^n$ und $\bar{f}(\alpha) = \alpha f$. Nach Lemma 2.2.12 ist $\overline{\Delta} \cong \Delta$, ferner gilt natürlich $\text{id}_{\mathbf{sSet}}(X) = X$. Wenn wir statt den Funktoren G und F ihre Bilder schreiben, können wir also $\Delta \downarrow X = \bar{\quad} \downarrow \text{id}_{\mathbf{sSet}}$ betrachten und sehen, dass die Notation in [5] (siehe unseren Abschnitt 3.1) mit MAC LANE konsistent ist.

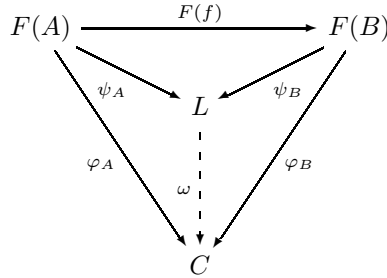
A.2 Colimiten

Definition A.2.1. Seien \mathbf{J} und \mathbf{C} Kategorien und $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ ein kovarianter Funktor. Ist $L \in \mathbf{C}$ und $\psi = \{\psi_A : A \in \mathbf{J}\}$ eine Familie von Morphismen $\psi_A : F(A) \rightarrow L$ in \mathbf{C} , so heißt (L, ψ) ein *Cokegel* von F , wenn für alle $A, B \in \mathbf{C}$

und $f : A \rightarrow B$



kommutativ ist. Das heißt nichts anderes, als dass ψ eine natürliche Transformation von F auf den konstanten Funktor $C \mapsto L$, $C \in \mathbf{C}$, ist. L heißt *Colimes* von F , wenn es für jeden weiteren Cokegel (C, φ) von F einen eindeutig bestimmten Morphismus $\omega : L \rightarrow C$ gibt, sodass



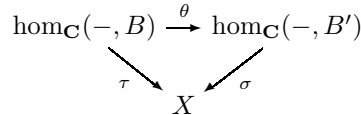
kommutiert. In diesem Fall schreiben wir

$$\varinjlim F = \varinjlim_{A \in \mathbf{J}} F(A) = L.$$

Sei nun $X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor von einer kleinen Kategorie \mathbf{C} in die Kategorie \mathbf{Set} der Mengen. Wir wollen uns überlegen, dass X Colimes von dargestellten Funktoren ist. Definiere dazu die Kategorie $\mathbf{C} \downarrow X$ wie folgt. Die Objekte sind alle natürlichen Transformationen aller Funktoren $\text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, also

$$\mathbf{C} \downarrow X = \{\tau : \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B) \rightarrow X \mid B \in \mathbf{C}\}.$$

Die Morphismen $B \rightarrow B'$ in $\mathbf{C} \downarrow X$ sind alle Diagramme



mit $\tau, \sigma \in \mathbf{C} \downarrow X$. Definiere einen kovarianten Funktor $F : \mathbf{C} \downarrow X \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ durch

$$F(\tau : \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B) \rightarrow X) := \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B),$$

das Bild eines Diagramms wie oben ist einfach die natürliche Transformation θ .

Satz A.2.2. *Mit obigen Schreibweisen gilt $X = \varinjlim F$.¹*

Beweis. Nach Definition ist $(X, \{\tau\}_{\tau \in \mathbf{C} \downarrow X})$ ein Cokegel von F . Wir müssen zeigen, dass für jeden weiteren Cokegel $(Y, \{\psi_\tau\}_{\tau \in \mathbf{C} \downarrow X})$ eine eindeutig bestimmte natürliche Transformation $\omega : X \rightarrow Y$ existiert, die alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F(\tau) = \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B) & \xrightarrow{\theta} & \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B') = F(\sigma) \\
 \searrow \tau & & \swarrow \sigma \\
 & X & \\
 \searrow \psi_\tau & \text{---} \omega \text{---} & \swarrow \psi_\sigma \\
 & Y &
 \end{array}$$

mit $\tau, \sigma \in \mathbf{C} \downarrow X$ erfüllt. Das Yoneda-Lemma besagt, dass durch $\tau \mapsto \tau_B(1_B)$ eine Bijektion von $\text{Nat}(\text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B), X)$ auf $X(B)$ festgelegt wird. Sei $B \in \mathbf{C}$ beliebig und $x \in X(B)$. Dann gibt es genau eine natürliche Transformation $\tau : \text{hom}_{\mathbf{C}}(-, B) \rightarrow X$ mit $\tau_B(1_B) = x$. Daher ist durch $\omega_B(x) := \psi_{\tau_B}(1_B)$ eine wohldefinierte Funktion $\omega_B : X(B) \rightarrow Y(B)$ gegeben. Sei $A \in \mathbf{C}$, $g \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$. Nach [6], X.1.5, gilt

$$\begin{aligned}
 \omega_A \tau_A(g) &= Y(g)(\omega_B \tau_B(1_B)) \\
 &= Y(g)(\omega_B(x)) \\
 &= Y(g)(\psi_{\tau_B}(1_B)) = \psi_{\tau_A}(g),
 \end{aligned}$$

also kommutiert obiges Diagramm. Zur Eindeutigkeit von ω : Sei $\omega' : X \rightarrow Y$ eine weitere entsprechende natürliche Abbildung, dann ist $\omega'_B(x) = \omega'_B(\tau_B(1_B)) = (\omega'_B \tau_B)(1_B) = \psi_{\tau_B}(1_B) = \omega_B(x)$. \square

Definition A.2.3. Sei $\{A_i : i \in I\}$ eine Familie von Mengen. Die *disjunkte Vereinigung* der A_i ist definiert als

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i) = \{(i, a) : a \in A_i, i \in I\}.$$

Sei \mathbf{J} eine kleine (Index-)Kategorie und $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kovarianter Funktor. Wir definieren auf $\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i)$ eine Relation R durch

$$(j, a)R(j', a') :\Leftrightarrow \exists f : j \rightarrow j' \text{ mit } a' = F(f)(a)$$

und bezeichnen mit \sim die kleinste Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i)$, die R enthält.

¹Der Satz ist [1], 8.10.

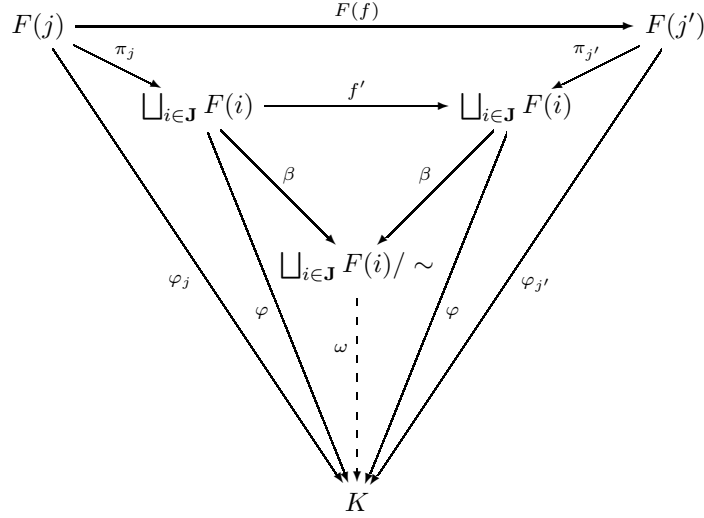
Satz A.2.4. *Mit obigen Bezeichnungen gilt*

$$\varinjlim F = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) \right) / \sim .$$

Beweis. Sei $\pi_k : F(k) \rightarrow \bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i)$ die Einbettung $\pi_k(a) = (a, k)$ und

$$\beta : \begin{cases} \bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) & \rightarrow & \bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) / \sim \\ (k, a) & \mapsto & [(k, a)]_{\sim} \end{cases}$$

Betrachte das Diagramm



Das Paar $(\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) / \sim, \{\beta\pi_k\}_{k \in \mathbf{J}})$ ist ein Cokegel von F , denn ist $f : j \rightarrow j'$ in \mathbf{J} und $a \in F(j)$, dann gilt $(j, a) \sim (j', F(f)(a))$ und $\beta\pi_j(a) = [(j, a)]_{\sim} = [(j', F(f)(a))]_{\sim} = \beta\pi_{j'}(F(f)(a))$. Sei $(K, \{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{J}})$ ein weiterer Cokegel. Die φ_i induzieren durch $\varphi\pi_j := \varphi_j$ eine Abbildung $\varphi : \bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) \rightarrow K$. Jedes $f : j \rightarrow j'$ in \mathbf{J} induziert $f' : (j, a) \mapsto (j', F(f)(a))$ von $\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i) \rightarrow \bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i)$. Es gilt $\beta f'((j, a)) = \beta((j', F(f)(a))) = [(j', F(f)(a))]_{\sim} = [(j, a)]_{\sim} = \beta((j, a))$, also $\beta f' = \beta$. Weiters ist $\varphi((j, a)) = \varphi\pi_j(a) = \varphi_j(a) = \varphi_{j'}(F(f)(a)) = \varphi((j', F(f)(a)))$, das heißt, φ ist konstant auf den Äquivalenzklassen bezüglich \sim , daher existiert ω und ist eindeutig bestimmt, sodass das gesamte Diagramm kommutiert. \square

Ist F ein Funktor $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Top}$ und \mathcal{T}_j die Topologie von $F(j)$, so bilden alle Mengen $O \times \{j\}$ mit $j \in \mathbf{J}$ und $O \in \mathcal{T}_j$ eine Basis der Topologie auf $\bigsqcup_{i \in \mathbf{J}} F(i)$. Nach Eigenschaften der Quotiententopologie ist in obigem Diagramm β stetig und ω genau dann stetig, wenn φ stetig ist. Sind aber alle φ_j stetig, dann auch φ , wodurch Satz A.2.4 auch für $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Top}$, also für Colimiten in der Kategorie der topologischen Räume, gültig ist.

Literaturverzeichnis

- [1] S. AWODEY: *Category Theory*. Oxford Logic Guides 49. Oxford: Clarendon Press 2006
- [2] E. CURTIS: *Simplicial homotopy theory*. Lecture notes. Aarhus Universitet 1967
- [3] S. EILENBERG und J. A. ZILBER: *Semi-simplicial complexes and singular homology*. Ann. of Math. **51** (1950), S. 499–513
- [4] G. FRIEDMAN: *An elementary introduction to simplicial sets*. Texas Christian University 2008
- [5] P. G. GOERSS und J. F. JARDINE: *Simplicial Homotopy Theory*. Progress in Mathematics 174. Basel: Birkhäuser 1999
- [6] T. W. HUNGERFORD: *Algebra*. New York: Springer 1974, 12th print. 2003
- [7] D. M. KAN: *On c.s.s. complexes*. Amer. J. Math. **79** (1957), S. 449–476
- [8] S. MAC LANE: *Categories for the working mathematician*. New York: Springer 1998
- [9] J. P. MAY: *Simplicial objects in algebraic topology*. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand 1967
- [10] J. MILNOR: *The geometric realization of a semi-simplicial complex*. Ann. of Math. **65** (1957), S. 357–362
- [11] B. RICHTER: *Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie*. Vorlesungsskriptum. Universität Hamburg 2011
- [12] H. WORACEK, M. KALTENBÄCK und M. BLÜMLINGER: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskriptum. TU Wien 2006