ANALYSIS 2 (M. BLÜMLINGER) SS 13

ZUSAMMENFASSUNG. Ausgewählte Beispiele (einige weitere im TUWEL). Das 3.te Beispiel auf Zettel 4 ist durch 04.03 nummeriert.

Inhaltsverzeichnis

02.03

ANGABE: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x < 1$ soll die Konvergenz des Taylorschen Restglieds gegen Null für $f(x) := (1+x)^\alpha$ bei Entwicklung mit Anschlußstelle $x_0 = 0$ gezeigt werden.

LÖSUNG:

Ableitungen der Funktion: : Zuächst findet man

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)(1+x)^{\alpha-k}$$

und entsprechend

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

(vollständige Induktion).

Restglied: : Das Restglied R_n (in Lagrangescher Form) wäre

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!} x^{n+1} = \cdots = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

wobei $0 < \xi < x$ passend gewählt werden muss. Wir vermerken, dass $R_n = AxB$ mit

$$A := \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\alpha - j}{j+1} x\right), \quad B := (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

ist. Dementsprechend werden A und B im weiteren abgeschätzt.

Beh 1: *Bei gegebenem $\alpha \in \mathbb{R}$ und für $0 \leq x < 1$ existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und $x \leq q < 1$ mit*

$$\left|\frac{\alpha - j}{j+1} x\right| \leq q$$

Weiters gibt es eine Konstante C sodass für alle n

$$|A|x = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \leq Cq^n x$$

gilt.

BW.: Es ergibt sich aus $\lim_{j\to\infty} \left|\frac{\alpha-j}{j+1}\right| x = x$ die Existenz von $l \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\frac{\alpha - j}{j+1} x\right| \leq x + \frac{1-x}{2}$$

gilt. Dann setzen wir $q := x + \frac{1-x}{2}$.

Setzt man[1] $C := \prod_{j=0}^{l-1} \left|\frac{\alpha-j}{j+1}\right|$, so hat man die Abschätzung

$$\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} = C \prod_{j=l}^{n} \left|\frac{\alpha - j}{j+1} x\right| x \leq Cx^l q^{n-l} x \leq Cq^n x$$

Konvergenz des Restglieds gegen Null: : Weil

$$|B| = |(1+\xi)^{\alpha-n-1}| \leq 1$$

sofern $n \geq \alpha - 1$ gilt. ergibt sich aus Beh.1 die Konvergenz von $R_n = AxB$ bei $n \to \infty$.

[1] mit der üblichen Konvention, dass $C = 1$ ist sofern $l - 1 < 0$ ist.

03.01

ANGABE: Aus dem Einheitsintervall $I = [0,1]$ wird das offene Mitteldrittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Setzt man $A_0 := I$ und A_1 für das Ergebnis dieses Schrittes, so wird induktiv die Menge A_{n+1} durch Entfernen der offenen Mitteldrittel aller Zusammenhangskomponenten von A_n definiert. Man zeige, daß A_n aus jenen Zahlen $x = \sum_{k\geq 1} a_k 3^{-k}$ besteht, deren Ziffern a_k der Ternärentwicklung in $\{0,2\}$ für $1 \leq k \leq n$ liegen.

Der Durchschnitt $C := \bigcap_n A_n$ ist die Cantormenge. Zeigen Sie, dass die Abbildung von $C \to I$, die durch $x \mapsto y$ mit $y = \sum_{k\geq 1}(\frac{a_k}{2})2^{-k}$ surjektiv ist.

LÖSUNG: Die erste Aussage geht mittels Induktion. Für $A_0 = I$ gibt es keine Einschränkungen für die Ziffern. Angenommen die Aussage gilt für n. Die zu entfernenden Mitteldrittel sind offene Intervalle der Gestalt

$$D_{nk} = \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$$

wobei $0 \leq k \leq 3^n - 1$ gilt. Ist $x \in D_{nk}$ so erfüllt seine Ziffernentwicklung

$$\frac{3k+1}{3^{n+1}} < \sum_{l=1}^{\infty} a_l 3^{-l} < \frac{3k+2}{3^{n+1}}$$

Multiplikation mit 3^{n+1} ergibt (wir teilen die Summe auch auf)

$$3k+1 < \sum_{l=1}^{n+1} a_l 3^{n+1-l} + \sum_{l=n+2}^{\infty} a_l 3^{n+1-l} < 3k+2$$

Der vordere Teil der Summe ist ganzzahlig und der 2.te Teil nicht größer als 1 werden kann und er wird nur dann gleich 1 falls alle $a_l = 2$ für $l \geq n+2$ sind. Ist der 2.te Teil < 1, so ist $\sum_{l=1}^{n+1} a_l 3^{n+1-l} = 3k+1$ woraus $a_{n+1} = 1$ geschlossen werden kann. Ist er $= 1$, so muss $\sum_{l=1}^{n+1} a_l 3^{n+1-l} = 3k$ und dann wäre $x = 3k+1$ im Widerspruch zu $x \in D_{nk}$. Somit müssen die Zahlen in A_{n+1} auch $a_{n+1} \in \{0,2\}$ erfüllen.

Die Abbildung ist wohldefiniert, weil jede Zahl in C eine eindeutige Ziffernentwicklung mit Ternärziffern 0 und 2 hat. (Hier benützt man, dass z.B. $\underline{\underline{1}}.\dot{2} = \sum_{k\geq 1} 2 \cdot 3^{-k}$ gilt. Diese Überlegung betrifft genau die Endpunkte der jeweils entfernten Mitteldrittel.)

Gibt man $y = \sum_{k\geq 1} b_k 2^{-k}$ vor, so ist sie das Bild von $x := \sum_{k\geq 1}(2b_k)3^{-k}$.

03.02

ANGABE: Zeigen Sie die Riemannintegrierbarkeit der Indikatorfunktion von C und berechnen Sie das Integral.

LÖSUNG: Weil für Teilmengen A und B einer Menge X die Bedingung $A \subseteq B$ mit

$$(\forall x \in X) \quad I_A(x) \leq I_B(x)$$

gleichwertig ist, ergibt sich für alle n

$$(\forall x \in X) \quad 0 = I_\emptyset(x) \leq I_C(x) \leq I_{A_n}(x)$$

Ist nun $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$, so impliziert dies

$$0 \leq O(\mathcal{Z}, I_C) \leq O(\mathcal{Z}, I_{A_n})$$

Da $O(\mathcal{Z}, I_{A_n}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ist, wie man durch Induktion überlegt, ergibt sich

$$O(\mathcal{Z}, I_C) = 0.$$

Da Indikatorfunktionen nicht negativ sind, hat man $0 \leq U(\mathcal{Z}, I_C) \leq O(\mathcal{Z}, I_C) = 0$, und aus der Beschränktheit von I_C und der Konvergenz $O(\mathcal{Z}, I_C) - U(\mathcal{Z}, I_C) \to 0$ bezüglich des durch die Zerlegungen gegebenen Netzes folgt die R-Integrierbarkeit.

Weiters ist $\int_I I_C(x)\,dx = 0$ als GW der Obersummen.

03.03

ANGABE: Zeigen Sie, dass die Unstetigkeitsstellen der Indikatorfunktion I_C genau die Punkte von C sind.

LÖSUNG: Zunächst ist I_C auf allen zu entfernenden Mitteldritteln stetig, weil konstant Null. Deshalb kann I_C bestenfalls auf C unstetig sein. Ist nun $x \in C$ beliebig, so hat er eine Ternärentwicklung mit Ziffern in $\{0, 2\}$. Deshalb kann eine Folge $\{x_n\}$ in $[0, 1] \setminus C$ angegeben werden, die nach x konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} I_C(x_n) = 0 \neq 1 = I_C(x)$, also I_C an x unstetig.

03.08

ANGABE: Zeigen Sie die Konvergenz von $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$.

LÖSUNG: In der Umformung $\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x$ (die lediglich Eigenschaften des Logarithmus benützt) ist der erste Term an 0 stetig ergänzbar (durch Null), somit ist I genau dann konvergent, wenn es $J := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx$ ist. Ermitteln einer Stammfunktion (partielle Integration) führt auf

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

Nun die DN des uneigentlichen Integrals anwenden:

$$\lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{\pi}{2}(\ln\pi - \ln 2 - 1) - (t\ln t - t)\right) = \cdots = \frac{\pi}{2}(\ln\pi - \ln 2 - 1)$$

Insbesondere ist die Konvergenz gezeigt.

03.09

ANGABE: Man ermittle $J := \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

LÖSUNG: Es ist $\tan : [\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}] \to [\sqrt{2}-1, 1]$ stetig differenzierbar und monoton wachsend. Anwenden der Substitutionsregel für bestimmte Integrale ergibt zunächst

$$J = \left| \begin{matrix} u=\tan x, & \frac{du}{1+u^2}=dx \\ \sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, & \cos x=\frac{1}{1+u^2} \end{matrix} \right|_{\sqrt{2}-1}^{1} = \cdots = \int_{\sqrt{2}-1}^{1} \left(\frac{1}{u^2} + 2 + u^2 \right) du$$

Eine Stammfunktion lautet $F(u) = -\frac{1}{u} + 2u + \frac{u^3}{3}$ und es ist $F(1) = \frac{4}{3}$, sowie $F(\sqrt{2}-1) = \cdots = \frac{8\sqrt{2}-16}{3}$.

ENDERGEBNIS: $J = \frac{4}{3}(5 - 2\sqrt{2})$

Bleibt wohl die Frage, wie man (ohne Wolfram oder Maple) den $\tan \frac{\pi}{8}$ bestimmt?

Da $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Halbwinkelsatz) und $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$ gilt, ergeben Addition bzw. Subtraktion

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \cdots = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cdots = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

also $\tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$, somit $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

04.01

ANGABE: Berechnen Sie eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin x \cos x}$.

LÖSUNG: Es ist $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Dies und $\sin x = \tan x \cos x$ benützend findet man

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx &= \left| \begin{smallmatrix} u = \tan x \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{smallmatrix} \right| \\
&= \int \frac{1}{u}(1+u^2)\frac{du}{1+u^2} \\
&= \int \frac{du}{u} \\
&= \ln|\tan x| + C
\end{aligned}$$

04.02

ANGABE: a) Bestimmen Sie, ob $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^2 x}}$ existiert.
b) Bestimmen Sie, ob $\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x \, dx}{\sqrt{x}}$ existiert.

LÖSUNG: a) An der Stelle $x = 0$ konvergiert das Integral, wie man durch folgende Umformung erkennt:

$$\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}(\pi x^{\frac{1}{2}})$$

Es ist nun $\phi(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ an Null stetig (durch 1) ergänzbar und somit der Integrand durch Null bei $x = 0$. Somit liegt bei Null Konvergenz vor.
Um die Divergenz bei $\frac{\pi}{2}$ zu zeigen genügt es zu vermerken, dass es auf $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ eine divergente Minorante der Form $\frac{C}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$ gibt.

b) Es ist $\int_0^x \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} dx = \sum_{j=1}^{[x]} \% \, dx + \int_{[x]}^x \% \, dx$. Das zweite Integral erlaubt aufgrund der Monotonie des Integranden und $x - [x] \leq 1$ die Abschätzung

$$J(x) := \int_{[x]}^{x} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx \leq \frac{1}{[x]}$$

Setzt man nun für $a_j := \int_{j-1}^{j} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx$ für $j \geq 1$, so ist die Konvergenz des Integrals gleichbedeutend zur Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, da $J(x)$ bei $x \uparrow \infty$ gegen Null konvergiert.
Die Konvergenz der Reihe soll mittels Leibnitz-Kriterium bewiesen werden:

- Das Vorzeichen des Integranden ist $(-1)^j$ auf dem Intervall $(j\pi, (j+1)\pi)$, wie man durch Induktion zeigt. Somit sind die Vorzeichen der a_j alternierend.
- Es ist $|a_{j+1}| \leq |a_j|$ gleichwertig zu
$$(-1)^j \int_j^{j+1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx \leq (-1)^{j+1} \int_{j-1}^{j} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx$$
Im Integral rechts führt man die Variablentransformation $x = t-1$, $dx = dt$ durch und bekommt, nach Umbenennung von t in x, als glw. Behauptung:
$$(-1)^j \int_j^{j+1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx \leq (-1)^j \int_j^{j+1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x-1}}, dx$$
Bringt man den linken Term nach rechts und formt um, ergibt sich schliesslich:
$$0 \leq \int_j^{j+1} (-1)^j \sin \pi x \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$
Der Integrand rechts ist nirgends im Integrationsintervall negativ, also $|a_j| \downarrow$ bewiesen.
- Es muss noch $a_j \to 0$ bei $j \to \infty$ gezeigt werden:
$$|a_j| = \left| \int_{j-1}^{j} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} \, dx \right| \leq \int_{j-1}^{j} \frac{1}{\sqrt{j-1}} \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{j-1}}$$
für $j \geq 2$, woraus die Behauptung folgt.

Die Prämissen des Leibnitzkriteriums sind erfüllt, somit konvergiert das Integral.

06.04

ANGABE: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $f(x, y, z) := e^A$, wobei $A := \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = z\}$ unendlich oft differenzierbar ist.

LÖSUNG:

Beh 1: *Es genügt, $x < z$ anzunehmen*

BW.: Da für 2×2-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ stets $J(A) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ und somit die offene Menge mit $z > x$ auf jene mit $x < z$ abgebildet wird. Dieser "Konjugation von Matrizen" J entspricht (in unserem Beispiel) im $\mathbb{R}^3$ die Transformation T, welche x und z vertauscht, d.h. es gibt ein "kommutatives Diagramm":

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "J"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

Beh 2: *Ist $x < z$ so kann die Diskriminante $D := (x - z)^2 + y^2$ nicht verschwinden und es ergeben sich die beiden voneinander verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_+(x, y, z) := (x + z) + \sqrt{(x - z)^2 + y^2}$ und $\lambda_-(x, y, z) := (x + z) - \sqrt{(x - z)^2 + y^2}$ sind C^∞.*

BW.: Die Matrix A ist symmetrisch und ihr charakteristisches Polynom findet man als

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathit{spur}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - (x + z)\lambda + (xz - y^2)$$

woraus sich die Eigenwerte als Lösungen ergeben. Da $D > 0$ ist, sind beide Eigenwerte reell und von einander verschieden. Als Zusammensetzung von C^∞-Funktionen sind die $\lambda_\pm$ selbst C^∞-Funktionen.

Beh 3: *Es ist $(x-\lambda_-, y) \neq (0, 0)$ und (auf der rechten Seite schlampigerweise die Argumente x, y, z weglassend)*

$$\mathbf{v}_+(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{(x - \lambda_-)^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x - \lambda_- \\ y \end{pmatrix}$$

sowohl normierter Eigenvektor zu λ_+ als auch C^∞.

BW.: Der erste Teil der Behauptung folgt, weil $D(x, y, z) \neq 0$ für $x < z$ stets gilt. Der nächste Teil ergibt sich aus $(a, b)^\perp = (-b, a)$ und "Normieren". Die C^∞ Eigenschaft folgt daraus, dass hier C^∞-Funktionen zusammengesetzt werden.

Beh 4: *Es ist (wiederum rechts die Argumente "fortlassend")*

$$\mathbf{v}_-(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{(x - \lambda_-)^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x - \lambda_- \end{pmatrix}$$

normierter Eigenvektor zu λ_- und C^∞.

BW.: Da die Matrix A symmetrisch ist, stehen die Eigenvektoren aufeinander senkrecht. Hat $\mathbf{v}_+$ die Gestalt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, so ist $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ orthogonal dazu, muss also somit der Eigenvektor zu λ_- sein. Die C^∞ Eigenschaft folgt analog wie im vorigen Unterpunkt.

Beh 5: *Die Matrix $S(x,y,z)$ mit Spalten $\mathbf{v}_+$ und $\mathbf{v}_-$ ist orthogonal und leistet für beliebiges $x < z$ die Transformation*

$$A(x,y,z) = S^{-1}(x,y,z) \begin{pmatrix} \lambda_+(x,y,z) & 0 \\ 0 & \lambda_-(x,y,z) \end{pmatrix} S(x,y,z)$$

Es ist $A(x,y,z)$ C^∞ koordinatenweise.

BW.: Laut Konstruktion stehen die Spalten aufeinander senkrecht und haben Länge 1, weil sie normiert worden sind. Somit ist S orthogonale Matrix. Als Zusammensetzung von C^∞-Funktionen und weil $S^{-1} = S^T$ somit C^∞ ist, ergibt sich, dass $A(x,y,z)$ auch C^∞ ist.

Beh 6: *$e^{\lambda_\pm}(x,y,z)$ ist C^∞.*

BW.: Zusammensetzung von C^∞-Funktionen.

Beh 7: *f ist C^∞.*

BW.: Es ist, rechts die Argumente fortlassend,

$$f(x,y,z) = e^A = \exp\left(S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} S\right) = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_-} \end{pmatrix} S$$

Zusammensetzung und Produkt von C^∞-Funktionen.

06.06

ANGABE: Zeigen Sie, dass für jede C_1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die Funktionen $\pi_i(\mathbf{x}) := x_i$ (also die “Koordinatenprojektionen”) die Beziehung

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, d\pi_i(\mathbf{x})$$

gilt.

LÖSUNG: Links und rechts stehen bei festem $\mathbf{x}$ lineare Abbildungen, die genau dann gleich sind, wenn sie für jedes $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ den gleichen Wert ergeben.
Linke Seite $df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) h_i$.
Da

$$d\pi_i(\mathbf{x}(\mathbf{h})) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} h_j = h_i$$

ergibt sich der gleiche Wert auf der rechten Seite.

Anmerkung: Leider ist es üblich, $\pi_i = x_i$ zu setzen und hierduch das Symbol “x_i” in zwei Bedeutungen zu führen.

08.01

ANGABE: Im $\mathbb{R}^n$ seien Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gegeben, die Paare (x_i, y_i) für $i := 1, \dots, n$ sind *Meßdaten*. Die Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind so zu bestimmen, dass $f(a, b, c) := \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ minimal wird.

LÖSUNG: Betrachtung: Das lineare Gleichungssystem $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ mit $i = 1, \dots, n$ ist für $n \geq 4$ *überbestimmt*. Deshalb minimiert man (Methode der kleinsten Quadrate) die obige Summe der Quadrate der Differenzen. Führt man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $\mathbf{x}[2]$ mit Koordinaten die Quadrate der x_i, $\mathbf{x}[1] := \mathbf{x}$ und $\mathbf{x}[0]$ jenen mit Koordinaten alle gleich 1, so schreibt sich das Gleichungssystem als

$$a\mathbf{x}[2] + b\mathbf{x}[1] + c\mathbf{x}[0] - \mathbf{y} = 0$$

Fassen wir nun die drei Spalten zu einer Matrix X zusammen, so schreibt sich das überbestimmte System als

$$X \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

Wir vermerken, dass X den Rang 3 hat: 1) er kann nicht größer sein, weil es nur 3 Spalten gibt. 2) Er ist 3, weil es drei Indizes i, j, k gibt mit paarweise verschiedenen Koordinaten in $\mathbf{x}$. Deshalb ist die 3×3 Teilmatrix von X (i.te, j.te und k.te Zeile)

$$\begin{pmatrix} x_i^2 & x_j^2 & x_k^2 \\ x_i & x_j & x_k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vom Rang 3 und somit hat X Rang 3. Definieren wir $\mathbf{a} := (a, b, c)^T$, so ist

$$f(\mathbf{a}) = \|X\mathbf{a} - \mathbf{y}\|^2 = \dots = \mathbf{a}^T X^T X \mathbf{a} - 2\mathbf{y}^{\mathbf{T}} X \mathbf{a} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}$$

Man macht sich klar, dass $A := X^T X$ positiv definite quadratische 3×3-Matrix ist, weil $\mathbf{a}^T A \mathbf{a} = ||X\mathbf{a}||^2 \geq 0$ und Null nur für $\mathbf{a} = 0$ ist. Die Gleichung (die durch Nullsetzen der Ableitung nach $\mathbf{a}$ entsteht)

$$A\mathbf{a} = X^T \mathbf{y}$$

hat die eindeutige Lösung $\mathbf{a}_0 := A^{-1} X^T \mathbf{y}$. Nun setzen wir

$$\mathbf{a} := \mathbf{a}_0 + \mathbf{h}$$

Einfache Rechnung ergibt (Taylorpolynom 2.ter Ordnung=Taylorreihe!)

$$f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{h}) = \dots = f(\mathbf{a}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T A \mathbf{h}$$

Diese Gleichung bestätigt, dass f genau an der Stelle $\mathbf{a}_0$ ein globales Minimum hat. Der Wert von f an dieser Stelle, als das gesuchte globale Minimum, ist (nach ein wenig Rechnung)

$$\min = f(\mathbf{a}_0) = ||(XA^{-1}X^T - E)\mathbf{y}||^2$$

Nachbetrachtung (geometrischer Natur): Im $\mathbb{R}^n$ ist durch $\mathbf{x}[0], \mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]$ die Basis eines 3-dimensionale Teilraumes gegeben (d.h. durch die Spalten von X). Gesucht ist der minimale Abstand von $\mathbf{y}$ zu diesem Teilraum.
(Antwort: Der "Fusspunkt" ist geradewegs unser $\mathbf{a}_0$ in diesem Teilraum)

08.03

Angabe: Man berechne das Minimum von $f(r,s,t,u) := r+s+t+u$ unter den Nebenbedingungen $r^2+s^2=1$ und $rstu=1$.

Lösung:

Beh 1: *Es ist* $g(r,s,t,u) := \begin{pmatrix} 1-r^2-s^2 \\ 1-rstu \end{pmatrix}$ *und* dg *entlang der Menge* $g=0$ *stets vom Rang* 2

BW.: Es ist

$$dg = \begin{pmatrix} -2r & -2s & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{s} & \frac{1}{t} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

(wobei auch von $rstu=1$ Gebrauch gemacht worden ist). Ohne Mühe erkennt man reguläre 2×2 Teilmatrizen, also hat dg den Rang 2.

Beh 2: *Falls* (r,s,t,u) *lokales Minimum ist, so gilt* $r=s=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *und* $t=u=\sqrt{2}$ *und es ist* $m := f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{9}{4}\sqrt{2}$

BW.: Wegen Beh.1 dürfen wir Lagrangemultiplikatoren verwenden: Man findet mittels des Ansatzes $\phi(r,s,t,u) := f(r,s,t,u) + \lambda(1-r^2-s^2) + \mu(1-rstu)$ die bestimmenden Gleichungen und beachtet die Positivität aller vorkommenden Variablen r,s,t,u.

Beh 3: *Falls* $t>m$ *oder* $u>m$*, dann ist* $f(r,s,t,u)>m$*, wobei* m *in Beh.2 definiert ist.*

BW.: Sichtlich.

Beh 4: *Es gibt* $k>0$*, sodass für* $t<\frac{1}{k}$ *oder* $u<\frac{1}{k}$*, so ist* $g(r,s,t,u)>m$*, wobei* m *wie in Beh.2 definiert ist.*

BW.: Wir führen nur die erste Situation vor: $f(r,s,t,u) = r+s+t+u \geq u = \frac{1}{rst} \geq \frac{k}{rs}$. Nun überlegt man sich, dass das Maximum des Ausdrucks rechts unter der NB $r^2+s^2=1$ tatsächlich größer als m ist, wenn nur k gross genug ist.

Beh 5: *Der Bereich* B*, beschrieben durch* $g(r,s,t,u)=0$*,* $r,s,t,u>0$ *und* $\frac{1}{k} \leq t \leq \frac{3}{2}\sqrt{2}$*,* $\frac{1}{k} \leq u \leq \frac{3}{2}\sqrt{2}$ *ist kompakt.*

BW.: Der Bereich ist sichtlich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Beh 6: f *nimmt unter den Nebenbedingungen sein globales Minimum in* B *an.*

BW.: Behauptungen 3 und 4 implizieren, dass außerhalb von B die Funktion größer als m ist. Somit, wenn es ein Minimum gibt, muss es in B liegen. Das Minimum existiert in B, weil B kompakt ist.

Beh 7: *Das lokale Minimum wird an der Stelle aus Beh.2 angenommen.*

BW-Skizze (sollte jetzt schon alles machbar sein): Wir müssen uns um die Randextrema kümmern. Z.B. kann $u=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ sein, und nun bestimmt man die auftretenden Kandidaten von lokalen und Randextrema nach ähnlichem Muster wie oben.

Nachsatz: Hier könnte es sich lohnen, $r := \cos\phi$, $s := \sin\phi$, ($\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$) und $u := \frac{1}{t\cos\phi\sin\phi}$ zu setzen und die hierdurch entstehende Funktion in zwei Variablen auf Extrema zu untersuchen.