

Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

Bakkalaureatsarbeit

Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

Betreuer
Dr. Wolfgang Herfort, Dr. Stefan Krause

von
Florian Rötzer
0925939
8. November 2012

Abstract

Line integrals in complex analysis do not always require an antiderivative to be found first. One may instead use residue theorem to get an analytic result - provided that the integral path allows this.

First, a special formula for dealing with rational integrands will be given and analyzed. Afterwards, further definite integrals will be dealt with. Those are several integral transforms of rational functions and the normal distribution, as well as the Fresnel integral. The integrals in this collection will be distinguished by the methods used to solve them.

Finally, the problem of diffraction at a half-plane will be solved as a two dimensional field problem, using residue theorem. This is also to show an example of how translationally symmetric field problems can be solved using complex analysis.

Kurzzusammenfassung

Pfadintegrale werden in der komplexen Analysis nicht zwingend auf die Findung einer Stammfunktion zurückgeführt. Stattdessen wird, wenn der Pfad es erlaubt, der Residuensatz verwendet, um schnell zu einem analytischen Ergebnis zu gelangen.

Es wird zunächst eine spezielle Formel zur Behandlung rationaler Integranden hergeleitet und analysiert. Danach werden weitere Beispiele von bestimmten Integralen behandelt. Diese umfassen diverse Integraltransformationen von rationalen Funktionen und der Normalverteilungsdichte-Funktion und das Fresnel-Integral. Es wurden dabei methodische Ansätze unterschieden und die Integrale danach eingeteilt.

Zuletzt wird die Beugung elektromagnetischer Wellen an der Halbebene als zweidimensionales Feldproblem mit dem Residuensatz gelöst. Es wird dadurch exemplarisch gezeigt, wie eindimensional translationsinvariante Feldsituationen in die komplexe Analysis übertragen werden können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung, Motivation	1
2	Benutzte Notation	2
3	Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel	3
3.1	Integration über \mathbb{R}	3
3.2	Allgemeiner Integrationsweg	4
4	Typische Anwendungsbeispiele	9
4.1	Pfadschließung im Unendlichen	9
4.1.1	Fourier-Transformation von $R(z)$	9
4.1.2	Transformationen einer Normalverteilung	10
4.1.3	Die sinc-Funktion	11
4.1.4	Integration von $R(z) \log(z)$	12
4.2	Lösung durch ein Ersatzproblem	14
4.2.1	Nicht-ganzzahligratonale Funktion (Mellin-Transformation)	14
4.2.2	Normalverteilung	16
4.2.3	Fresnel-Integral	18
5	Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene	20
5.1	Das Modell	20
5.2	Konstruktion der Lösung	21
5.3	Berechnung der Lösung	23
5.4	Das Ergebnis	28
6	Schlussbetrachtungen	31
	Abbildungsverzeichnis	32
	Literaturverzeichnis	33

1 Einleitung, Motivation

Die analytische Berechnung von bestimmten Integralen gestaltet sich in der reellen Analysis oftmals sehr aufwändig. Obwohl es für das Ergebnis nicht zwingend erforderlich ist, muss erst eine allgemeine Stammfunktion gesucht werden, diese an die Integrationsgrenzen angepasst werden und schließlich ein Lösungsausdruck berechnet werden.

Die Funktionentheorie bietet eine Auswahl mächtiger Methoden, um diese Problemstellungen schneller bzw. manche davon überhaupt abzuwickeln. So können etwa unangenehme Substitutionen umgangen werden, Partialbruchzerlegungen gemieden werden und Integrationswege anschaulich und günstig transformiert, erweitert oder verkürzt werden.

Die Idee ist dabei, ein Integral auf einem reellen Intervall in die komplexe Ebene einzubetten und die analytische Fortsetzung des Integranden in der komplexen Ebene zu betrachten. Erfüllt der Integrand einige Voraussetzungen, kann das gesuchte reelle Integral leicht durch ein Pfadintegral im Komplexen entweder ersetzt oder konkludiert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird speziell auf die Berechnung reellwertiger Integrale mit dem Residuensatz eingegangen. Dabei wird die Herausforderung u.a. darin bestehen, das reelle Integrationsintervall zu einem geschlossenen Pfad zu erweitern, um anschließend den Residuensatz benutzen zu können. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass der Integrand gewechselt wird, wodurch dann aus der Lösung eines Ersatzproblems das gesuchte Integral abgelesen werden kann. Zum besseren Verständnis wird auch auf die Riemannschen Flächen zu bestimmten Integranden eingegangen.

Es werden zunächst einige Beispiele von (mehrheitlich uneigentlichen) Integralen gezeigt, deren Berechnung mit dem Residuensatz deutlich komfortabler bzw. überhaupt erst ermöglicht wird. Anschließend wird auf eine Anwendung im Bereich von Beugungsphänomenen eingegangen.

2 Benutzte Notation

Für die bessere Lesbarkeit der Arbeit werden hier die verwendeten Symbole aufgeschlüsselt. Die Kenntnis des Residuensatzes, sowie anderer Sätze und Definitionen (Pfadverformung, Riemannsche Fläche, meromorphe Funktion etc.) werden vorausgesetzt und sind in der Literatur nachzuschlagen.

Zeichen	Bedeutung
$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Menge der ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen
$K_r(z)$	Offene Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt z
$\partial K_r(z)$	Kreis mit Radius r und Mittelpunkt z (Rand von $K_r(z)$)
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
\mathcal{C}, \mathcal{D}	Wegzusammenhängende glatte Kurven
$\partial\mathcal{C}$	Endpunkte (Rand) von \mathcal{C}
$\alpha(t)$	Gewählter (geschlossener) Integrationsweg; $\alpha_k(t)$ sind Teilwege
$\alpha_k \oplus \alpha_l$	Zusammenfassung zweier Wege
C	Nicht näher bestimmte, endliche Konstante (analog: C_k)
ε	Kleine reelle - oder je nach Kontext auch komplexe - Zahl
$\mathbb{C}[z]$	Ring der Polynome in z mit Koeffizienten aus \mathbb{C}
$R(z) = p(z)/q(z)$	Rationale Funktion mit $p, q \in \mathbb{C}[z]$ bzw. $p, q \in \mathbb{R}[z]$
$\mathcal{F}[y(x)](j\nu)$	Fourier-Transformierte von $y(x)$ in der Variablen ν
$\mathcal{L}_2[y(x)](s)$	Beidseitige Laplace-Transformierte von $y(x)$ in s
E, \vec{E}	Elektrische Feldstärke
B, \vec{B}	Magnetische Flussdichte
S, \vec{S}	Poynting-Vektor

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

Es sollen zunächst rationale Integranden der Form $R(z) = p(z)/q(z)$ mit $p, q \in \mathbb{R}[z]$ als Polynome behandelt werden. Es ist $R(z)$ meromorph auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$ und erfüllt damit die Voraussetzungen für die Verwendung des Residuensatzes geradezu ideal.

3.1 Integration über \mathbb{R}

Man betrachte zunächst den einfachen Fall eines Integrals der Form:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z) dz$$

Für die Existenz des Integrals muss gelten, dass $\text{Grad}(p) + 1 < \text{Grad}(q)$ ist und $R(z)$ auf der reellen Achse keine Singularitäten besitzt. In diesem Fall kann der Integrationsweg über einen Halbkreisbogen mit Radius $r \rightarrow \infty$ geschlossen werden, wodurch alle isolierten Singularitäten einer Halbebene eingeschlossen werden. Der Integrationsweg α bestehe also aus den Teilen:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t & , & \quad t \in [-r; +r] \\ \alpha_2(t) &= re^{it} & , & \quad t \in [0; \pi] \end{aligned}$$

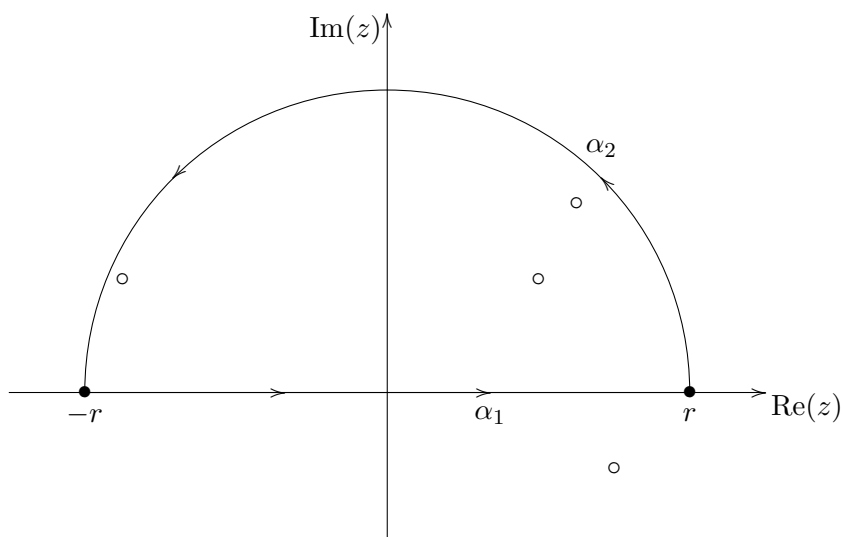


Abbildung 1: Integrationsweg für $\int_{\mathbb{R}} R(x) dx$

Eine einfache Abschätzung zeigt nun, dass das Integral entlang des Kreisbogens bei $r \rightarrow \infty$ wegfällt, wodurch das gesuchte Integral gleich der Summe der Residuen einer Halbebene sein muss.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\pi} R(re^{it}) re^{it} i dt \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{C}{|r|^2} |r| dt \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{C\pi}{|r|} = 0$$

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

Das Ergebnis kann sofort angeschrieben werden und ist für die untere Halbebene analog zu konstruieren, da die isolierten Singularitäten und Residuen an der imaginären Achse gespiegelt sind.

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}(R(z), z_k)$$

3.2 Allgemeiner Integrationsweg

Speziell rationale Integranden können mit dem Residuensatz aber auch auf beliebig gearteten Intervallen und Integrationswegen exakt behandelt werden. Im Folgenden sollen Integrale der Form

$$\int_{\mathcal{C}} R(z) dz, \quad \mathcal{C} \subset \mathbb{C}, \quad \partial\mathcal{C} = \{a, b\}$$

behandelt werden. Es seien hier die Polynome $p, q \in \mathbb{C}[z]$, um die Aussagen möglichst allgemein zu formulieren. Die Kurve \mathcal{C} ist ein nicht-geschlossener, wegzusammenhängender glatter Integrationsweg in der komplexen Ebene, auf dem keine Pole von $R(z)$ liegen. Die Endpunkte der Kurve seien mit a und b benannt und der Durchlaufsinne zeige von a nach b .

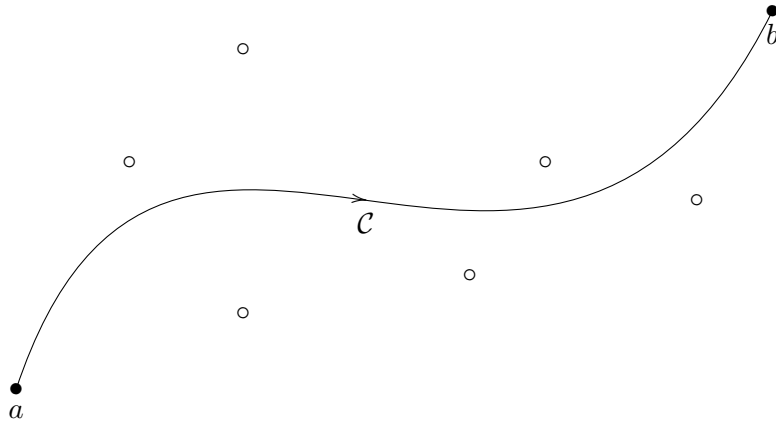


Abbildung 2: Allgemeiner Integrationsweg über $R(z)$ in der komplexen z -Ebene

Hierfür ist es nötig, ein Ersatzproblem zu betrachten. Man betrachte zunächst die Funktion:

$$h(z) := \log \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

Der Ausdruck innerhalb des Logarithmus ist eine Möbiustransformation, die den Punkt a nach $-\infty$ und b nach 0 abbildet. Man kann somit die Definitionslücke des Logarithmus in $h(z)$ genau mit dem Integrationsweg \mathcal{C} zwischen den Punkten a und b zusammenfallen lassen.

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

Durch die Mehrdeutigkeit des Logarithmus ergibt sich für den Imaginärteil von $h(z)$ eine Riemannsche Fläche, wie sie in Abbildung 3 für $(a, b) = (-1, 1)$ dargestellt ist.

Riemann-Fl. zu $\text{Im}(h(z))$

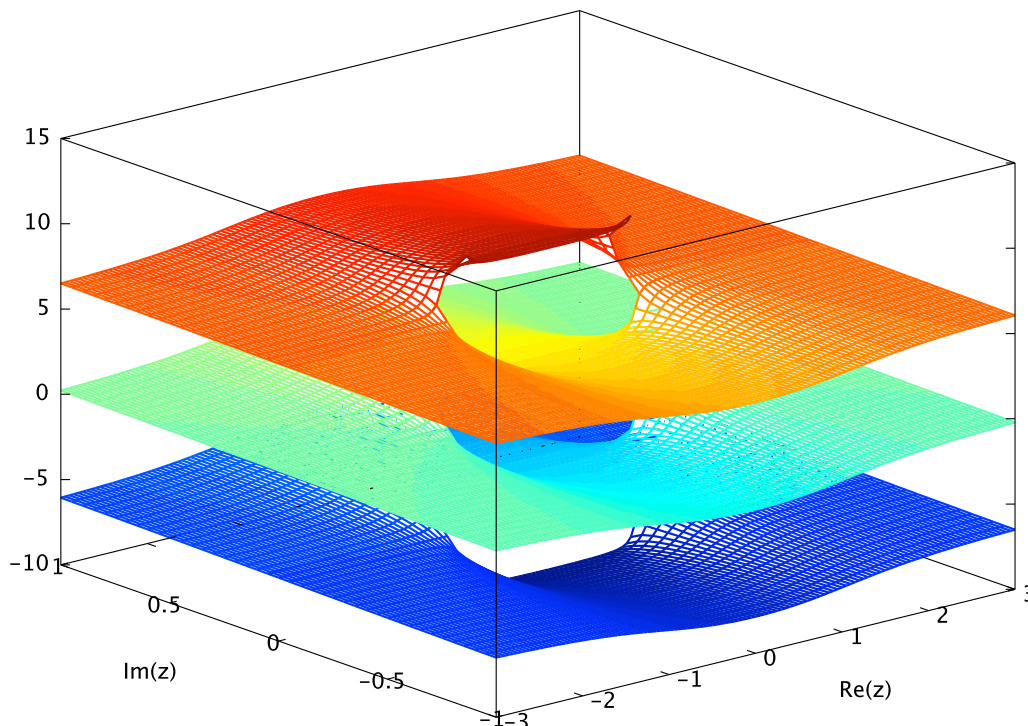


Abbildung 3: Riemannsche Fläche zu $\text{Im} \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$; Realteil ist nicht mehrdeutig.

Die Funktion $h(z)$ verhält sich bezüglich dieser Fläche nun so, dass auf einem Kreispfad um a so, dass a rechts davon liegt (im Uhrzeigersinn!), sich der Funktionswert genau um $2\pi i$ ändert, bzw. bei b um $-2\pi i$ ändert.

Anschaulich bedeutet das, dass nach der Transformation von a auf $-\infty$ ein solcher Kreispfad mit unendlich großem Radius in positiver Richtung durchlaufen wird (daher $+2\pi i$) und am auf 0 transformierten Punkt b ein Kreispfad in negativer Richtung durchlaufen wird.

$$\Delta_a h(z) = \int_{-\partial K_\varepsilon(a) \setminus \mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \quad , \quad \Delta_b h(z) = -2\pi i$$

Dadurch unterscheidet sich das Integrationsergebnis über $h(z)$ entlang \mathcal{C} auf zwei verschiedenen Ebenen der Riemannschen Fläche um Vielfache von $2\pi i$ mal der Länge von \mathcal{C} . Diese Tatsache wird nun für das Ersatzproblem genutzt.

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

Man betrachtet den neuen Integranden $R(z)h(z)$. Dieser gehört zur gleichen Riemannschen Fläche wie $h(z)$, da die rationale Funktion ja eindeutig ist. Die Riemannsche Fläche wird dann allerdings nicht mehr so eben sein wie in Abbildung 3. Es möge nun der vorgegebene Integrationspfad \mathcal{C} von einem neuen Integrationspfad α umschlossen werden, welcher in negativer Richtung (im Uhrzeigersinn) durchlaufen wird.

Dieser Weg α liege nahe genug an \mathcal{C} , um keine Singularitäten von $R(z)h(z)$ einzuschließen. Er umläuft also in positiver Richtung alle isolierten Singularitäten des Integranden. Der neue Pfad α lässt sich in vier Teile gliedern - zwei offene Kreispfade α_a , α_b um a und b , sowie einen Weg α_L links von \mathcal{C} und einen Weg α_R rechts davon.

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \partial K_\varepsilon(a) \setminus \mathcal{C} & , & & \alpha_b &= \partial K_\varepsilon(b) \setminus \mathcal{C} \\ \alpha_L &= \mathcal{C} + \varepsilon & , & & \alpha_R &= \mathcal{C} - \varepsilon \end{aligned}$$

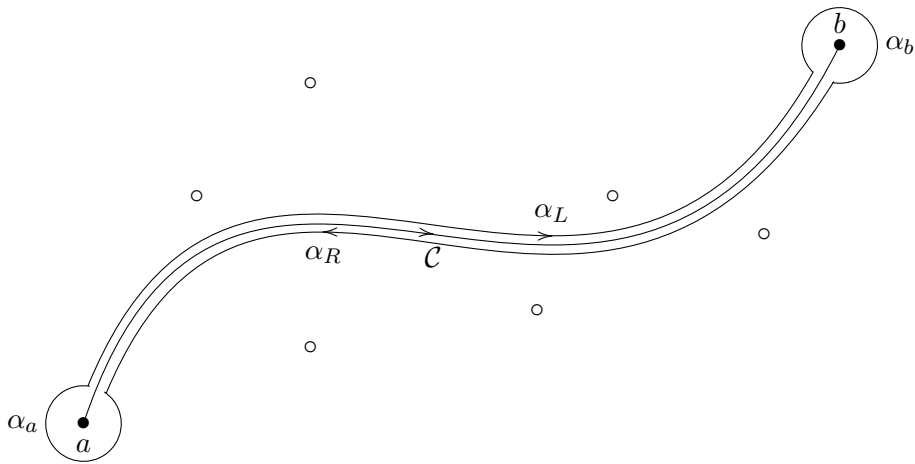


Abbildung 4: Kurve \mathcal{C} und umschließender Integrationspfad α

Bezüglich der Riemannschen Fläche verläuft α auf jener Ebene, auf welcher \mathcal{C} liegt, entlang \mathcal{C} , geht in einem Kreispfad weiter auf eine andere Ebene, verläuft dort genau unter \mathcal{C} und kehrt in einem Kreispfad wieder auf die erste Ebene zurück.

Die im Folgenden benutzten Grenzwerte für α_L und α_R müssten auf der Riemannschen Fläche also gar nicht als Grenzwerte formuliert werden. Der Anschaulichkeit halber wird aber die Herleitung aus der Literatur [1] verwendet.

Es wird nun also α in der komplexen Ebene an \mathcal{C} herangeführt (auf der Riemann-Fläche kann α_L sogar mit \mathcal{C} zur Deckung gebracht werden, da hier keine Definitionslücke des Logarithmus auftritt). Dabei ergeben sich für die Kreispfade um die Endpunkte a und b , unter der Voraussetzung, dass sich das Riemann-Integral nicht ändert, wenn der Punkt auf \mathcal{C} zum Kreispfad hinzugefügt wird, die nachfolgenden Abschätzungen (für a und b

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

analog).

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_a} R(z) \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right) dz &\leq \max_{z \in \partial K_\varepsilon(a)} (R(z)) \int_{\partial K_\varepsilon(0)} \log\left(\frac{\zeta+(a-b)}{\zeta}\right) d\zeta &= \\
 &= \max_{z \in \partial K_\varepsilon(a)} (R(z)) \int_0^{2\pi} \log\left(\frac{\varepsilon e^{it}+(a-b)}{\varepsilon e^{it}}\right) \varepsilon e^{it} i dt &\leq \\
 &\leq C_1 \varepsilon \int_0^{2\pi} \log\left(\frac{C_2}{\varepsilon}\right) dt &= \\
 &= C_3 \varepsilon \log\left(\frac{C_2}{\varepsilon}\right) \\
 &\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_a} R(z) h(z) dz = 0
 \end{aligned}$$

Für die anderen beiden Pfadteile α_L, α_R gilt nun der oben hergeleitete Umstand, dass sich $h(z)$ um genau $2\pi i$ ändert.

$$\int_{\alpha_R} R(z) h(z) dz = - \int_{\alpha_L} R(z) (h(z) - 2\pi i) dz$$

Die Pfadteile werden gegenseitig durchlaufen - deshalb gilt für ihre Summe:

$$\int_{\alpha_L \oplus \alpha_R} R(z) h(z) dz = 2\pi i \int_{\alpha_L} R(z) dz = \int_{\alpha} R(z) h(z) dz$$

Mit dem letzten Gleichheitszeichen erlaubt sich nun die Verwendung des Residuensatzes. Da ja vom Pfad α alle isolierten Singularitäten von $R(z)h(z)$ in $\hat{\mathbb{C}}$ umlaufen werden, ergibt sich das gesuchte Integral als äquivalent zur Summe aller Residuen.

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} R(z) dz = \sum_k \operatorname{Res}\left(R(z) \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right), z_k\right)}$$

Zusätzlich kann der im Ersatzproblem enthaltenen Möbiustransformation auch ein konstanter Vorfaktor hinzugefügt werden, ohne das Ergebnis zu ändern, da die Summe aller Residuen von $R(z)$ gleich null ist ($R(z)$ besitzt nach Voraussetzung nur isolierte, außerwesentliche Singularitäten) und der $\operatorname{Res}(\cdot)$ -Operator linear ist (was das Herausziehen der Residuensumme von $R(z)$ mit Vorfaktor $\log(c)$ erlaubt).

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} R(z) dz = \sum_k \operatorname{Res}\left(R(z) \log\left(c \frac{z-b}{z-a}\right), z_k\right)}$$

Nunmehr ist es möglich, diese allgemein hergeleitete Formel für reelle, beschränkte bestimmte Integrale zu verwenden. Es ist allerdings auch möglich, mit der gefundenen Formel eine Stammfunktion zu finden, sofern man nur die Polstellen des Integranden $R(z)$ kennt.

$$\int_a^b R(z) dz = \sum_k \operatorname{Res}\left(R(z) \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right), z_k\right) = F(b) - F(a)$$

3 Behandlung rationaler Integranden, eine universelle Formel

Kann man das Ergebnis in diese Form bringen, so muss $F(z) + C$ offensichtlich Stammfunktion von $R(z)$ sein. Dadurch wird eine gelegentlich aufwändigere Partialbruchzerlegung gegen die Residuenberechnung getauscht.

Zusätzlich besteht auch die Möglichkeit, Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} R(z) dz$$

direkt zu berechnen. Es wird dazu durch Möbiustransformation die positive reelle Achse auf das Intervall $[-1; 1]$ transformiert und wieder die obige Formel benutzt. Es ergibt sich die Formel:

$$\int_0^{\infty} R(z) dz = - \sum_k \operatorname{Res}(R(z) \log(z), z_k)$$

Abschließend sei noch erwähnt, dass diese einfache Formel nicht nur für rationale Integranden Gültigkeit hat, sondern ganz allgemein für beliebige meromorphe Funktionen angewendet werden kann. Sie kann - rein formal - also auch verwendet werden, um über eine Normalverteilung zu integrieren. Leider hat diese - wie auch jede andere elementare Funktion, die auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden kann - eine wesentliche Singularität im unendlich fernen Punkt. Man wird dadurch auf die Reihenentwicklung zurückgeworfen und kommt nach gliedweiser Integration zum selben Ergebnis wie in der reellen Analysis.

4 Typische Anwendungsbeispiele

Nachfolgend werden einige andere typische Beispiele für die Anwendung des Residuensatzes vorgestellt. Es zeigt sich dabei, dass es eine Reihe von Möglichkeiten gibt, die Lösung eines bestimmten Integrals auf den Residuensatz zurückzuführen.

4.1 Pfadschließung im Unendlichen

Neben der bereits besprochenen Behandlung rein rationaler Integranden, können noch andere Integrale durch verschiedene Pfadschließungen im unendlich fernen Punkt berechnet werden.

4.1.1 Fourier-Transformation von $R(z)$

Es seien Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \cos(z) dz, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \sin(z) dz, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \exp(iz) dz$$

zu berechnen. Auf diese Form lassen sich beispielsweise das Fourier- oder Laplace-Transformationsintegral für eine rationale Funktion zurückführen. Die drei Varianten sind über die Eulersche Beziehung (Winkelfunktion auf Exponentialfunktion) und partielle Integration (Winkelfunktion auf Winkelfunktion) natürlich uneingeschränkt ineinander überführbar. Es wird daher nur der Fall der Exponentialfunktion im Detail betrachtet.

Es existiert das Integral nur, wenn $\text{Grad}(p) + 1 \leq \text{Grad}(q)$ gilt. Der Integrand weise außerdem keine Singularitäten auf \mathbb{R} auf. Für die obere Halbebene gilt dann außerdem:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{p(re^{it})}{q(re^{it})} \exp(ire^{it}) rie^{it} dt \right| = 0$$

Es reicht also aus, die Residuen in der oberen Halbebene aufzusummieren.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \exp(iz) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} \exp(iz), z_k \right)}$$

Es finden sich für die Cosinus- bzw. Sinus-Transformation analog Lösungen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \cos(z) dz = \pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res} \left(\left(\frac{p(z)}{q(z)} + \frac{p(-z)}{q(-z)} \right) \exp(iz), z_k \right)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \sin(z) dz = \pi \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res} \left(\left(\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{p(-z)}{q(-z)} \right) \exp(iz), z_k \right)}$$

4.1.2 Transformationen einer Normalverteilung

Es ist natürlich auch möglich, eine Anzahl anderer Funktionen einer Fourier-Transformation zu unterwerfen. Einen universellen Lösungsweg kann man jedoch nicht angeben. Betrachten wir als weiteres Beispiel die Normalverteilungsdichtefunktion. Es soll die (beidseitige) Laplace-Transformierte einer Normalverteilungsdichte $N(\mu, \sigma^2, x)$ errechnet werden. Es ist dies die gespiegelte momenterzeugende Funktion [5] $M_z(-s)$.

Die Ableitungen von $M_z(s)$ in 0 geben dann die statistischen Momente der Normalverteilung wieder.

Gesucht sei also das Integral:

$$M_z(s) = \mathcal{L}_2 [N(\mu, \sigma^2, z)] (-s) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma^2, z) e^{sz} dz$$

$$N(\mu, \sigma^2, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Durch eine Substitution $y = (z - \mu)/(\sigma\sqrt{2})$ kommt man zunächst auf:

$$M_z(s) = \frac{e^{s\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(y^2 + \underbrace{s\sigma\sqrt{2}}_{=:a} y\right)\right) dy$$

Durch quadratisches Erweitern des Exponenten und Substitution gelangt man zu einem bekannten Problem.

$$M_z(s) = \frac{e^{s\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{a^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+\frac{a}{2})^2} dy$$

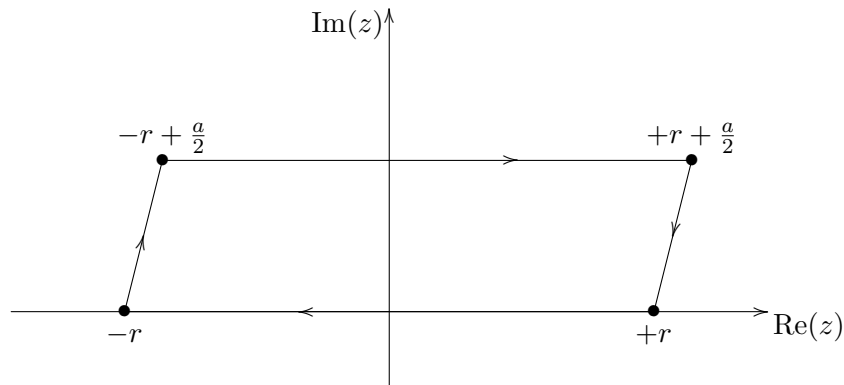


Abbildung 5: Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}+\frac{a}{2}} e^{-z^2} dx$

Die Anwendung des Residuensatzes erlaubt die Abschätzung [1], dass sich das Integral über die Normalverteilungsdichte bei Verschieben des Integrationsweges \mathbb{R} entlang

4 Typische Anwendungsbeispiele

der imaginären Achse nicht verändert, da die Normalverteilung keine Pole hat und die Verbindungswege im Unendlichen keinen Beitrag mehr liefern.

$$\int_{-\infty+\frac{a}{2}}^{\infty+\frac{a}{2}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Es gilt dann die Lösung:

$$M_z(s) = \mathcal{L}_2 \left[N(\mu, \sigma^2, z) \right] (-s) = e^{s\mu} e^{-\frac{s^2\sigma^2}{2}}$$

Zusätzlich liegt in der komplexen s -Ebene auch die imaginäre Achse im Konvergenzbe-
reich der Laplace-Transformation. Man kann also die Substitution $s = -i\nu$ vornehmen
und erhält sofort die Fourier-Transformierte der Funktion $N(\mu, \sigma^2, z)$.

$$\mathcal{F} \left[N(\mu, \sigma^2, z) \right] (i\nu) = e^{i\nu\mu} e^{-\frac{\nu^2\sigma^2}{2}}$$

4.1.3 Die sinc-Funktion

Es sei das Integral entlang der positiven reellen Achse über die Spaltfunktion (Sinus
Cardinalis) gesucht:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz$$

Da der Integrand im Sinne der reellen Analysis gerade ist, kann der Integrationsweg
auf die gesamte reelle Achse erweitert und das Ergebnis dann halbiert werden. Es ergibt
sich eine Vorgangsweise analog zur oben gezeigten Fourier-Sinus-Transformation einer
rationalen Funktion z^{-1} .

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2iz} dz$$

Es kommt nun allerdings die Singularität des Integranden auf dem Integrationsweg zu
liegen. Diese muss also in einem kleinen Radius umrundet werden, damit das Integral
nach dem Cauchyschen Integralsatz den richtigen Wert hat.

Der Integrationspfad entlang der reellen Achse ist nun einmal für die Funktion $\exp(iz)$
in der oberen Halbebene und für $\exp(-iz)$ in der unteren Halbebene zu schließen. Da-
durch bleibt als Ergebnis der Integration die Hälfte des Residuums des ursprünglichen
Integranden.

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(z)}{z} dz = \text{Res} \left(\frac{\exp(iz)}{4iz}, 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

Das Ergebnis der Integration über ganz \mathbb{R} ist nun ein Cauchyscher Hauptwert, da über
eine Singularität hinweg integriert wurde. Da nun aber die Singularität des Integranden
im Ursprung hebbar ist, folgert man, dass das Integral existieren muss.

4 Typische Anwendungsbeispiele

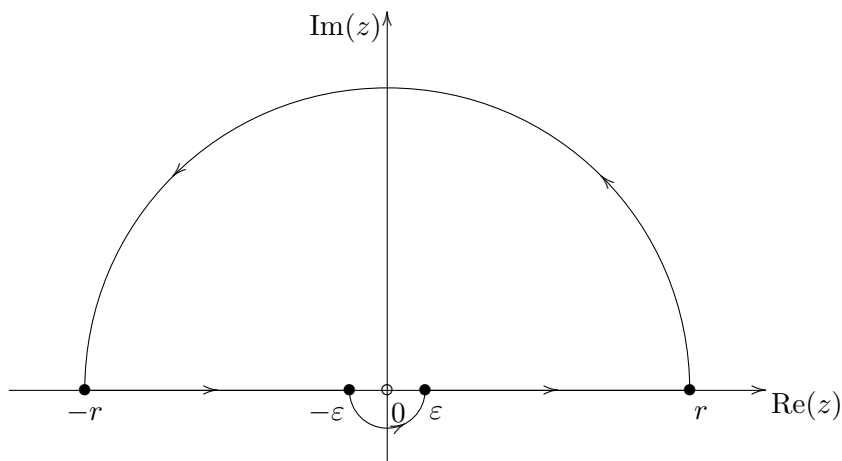


Abbildung 6: Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\sin(z)}{z} dz$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

4.1.4 Integration von $R(z) \log(z)$

Gesucht ist ein Integral der Form:

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\log(z)}{1+z^2}}_{f(z)} dz$$

Man wählt den Logarithmus-Zweig mit Definitionslücke auf der negativen Imaginärachse und betrachtet zunächst den geschlossenen Integrationspfad aus den Teilen α_1 bis α_4 , definiert durch einen Parameter $r > 1$.

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t & , & \quad t \in \left[-r; -\frac{1}{r}\right] \\ \alpha_2(t) &= \frac{1}{r} e^{i(\pi-t)} & , & \quad t \in [0; \pi] \\ \alpha_3(t) &= t & , & \quad t \in \left[\frac{1}{r}; r\right] \\ \alpha_4(t) &= r e^{it} & , & \quad t \in [0; \pi] \end{aligned}$$

Der Integrationsweg schließt einen Pol in i ein. Es gilt daher:

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi^2}{2} i = \int_{\alpha_1} f(t) dt + \int_{\alpha_2} f(t) dt + \int_{\alpha_3} f(t) dt + \int_{\alpha_4} f(t) dt$$

Untersucht man nun zunächst die Integrale entlang α_1 und α_3 , so erkennt man deren Gleichheit bis auf einen additiven Anteil, da die rationale Funktion gerade ist und sich

4 Typische Anwendungsbeispiele

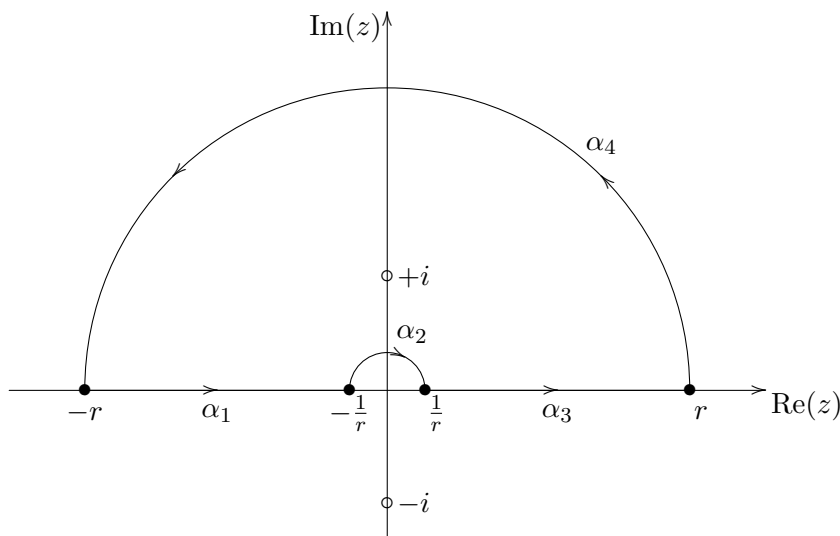


Abbildung 7: Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\log(z)}{1+z^2} dz$; Logarithmuszweig liegt auf der negativen Imaginärachse

der Logarithmus in gleicher Art ändert, wie schon bei den Herleitungen im vorigen Abschnitt.

$$\int_{\alpha_1} f(z) dz = \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{\log(z) + \pi i}{1+z^2} dt = \int_{\alpha_3} f(z) dz + \pi i \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{1}{1+z^2} dt$$

Anschließend wird der Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ gebildet und die Integrale entlang der Halbkreisbögen α_2 und α_4 abgeschätzt.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\alpha_2} f(z) dz \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{-\pi}^0 \frac{\log(\frac{1}{r} e^{it})}{1 + \frac{1}{r^2} e^{i2t}} \frac{1}{r} i e^{it} dt \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left| C \frac{\log(r)}{r} \right| = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\alpha_4} f(z) dz \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{\log(r e^{it})}{1 + r^2 e^{i2t}} r i e^{it} dt \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left| C \frac{\log(r)}{r} \right| = 0$$

In der obigen Gleichung für das Residuum in i fallen also bis auf das gesuchte Integral alle Anteile heraus.

$$\frac{\pi^2}{2} i = 2 \int_0^\infty \frac{\log(z)}{1+z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} dz$$

Auf der linken Seite der Gleichung stehen nun zwei reelle Integrale. Trennung von Real- und Imaginärteil liefert gleich zwei Ergebnisse. Eines davon ist bereits bekannt (siehe oben).

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\log(z)}{1+z^2} dz = 0 \text{ und } \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{2}}$$

4 Typische Anwendungsbeispiele

Diese Vorgangsweise lässt sich für gerades $R(z)$ mit $\text{Grad}(p) + 1 < \text{Grad}(q)$ jedenfalls verallgemeinern. Die obigen Abschätzungen bleiben gleich. Allgemein ergibt sich der Ausdruck:

$$\int_0^{\infty} R(z) \log(z) dz = \frac{1}{2} \left(\sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}(R(z) \log(z), z_k) - \pi i \int_0^{\infty} R(z) dz \right), \quad R(z) \text{ gerade}$$

4.2 Lösung durch ein Ersatzproblem

Da der Integrand nicht immer (nur isolierte, außerwesentliche) Singularitäten auf \mathbb{C} aufweist, bzw. diese anderweitig ungünstig beschaffen sind, ist es manchmal nötig, die Lösung als Teillösung eines Ersatzproblems zu definieren. Dies erreicht man etwa, wenn man durch geschicktes Umformen Definitionslücken - und damit Singularitäten - erzeugt.

4.2.1 Nicht-ganzzahlrationale Funktion (Mellin-Transformation)

Gegeben sei ein Integral der Form:

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$$

Es sei $R = p/q$ rationale Funktion, wobei das Nennerpolynom $q(z)$ keine Nullstellen auf \mathbb{R}^+ aufweist. Vorausgesetzt wird, dass das Integral existiert ($\text{Grad}(p) + \lambda < \text{Grad}(q)$).

Nun betrachte man zunächst die Funktion:

$$f(z) = (-z)^{\lambda-1} R(z), \quad (-z)^{\lambda-1} = \exp((\lambda-1) \log(-z))$$

Diese ist für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ holomorph, wenn der Hauptzweig des Logarithmus gewählt wird.

Wir definieren eine geschlossene Kurve aus den Teilen α_1 bis α_4 , festgelegt durch einen Winkel $\varphi \in [0; 2\pi)$ und einen Radius $r > 1$, entlang welcher f integriert werden kann:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= te^{i\varphi} & , & \quad t \in \left[\frac{1}{r}; r\right] \\ \alpha_2(t) &= re^{it} & , & \quad t \in [\varphi; 2\pi - \varphi] \\ \alpha_3(t) &= -te^{-i\varphi} & , & \quad t \in \left[-r; -\frac{1}{r}\right] \\ \alpha_4(t) &= \frac{1}{r}e^{i(2\pi-t)} & , & \quad t \in [\varphi; 2\pi - \varphi] \end{aligned}$$

Für hinreichend großes r und kleines φ gilt nun, dass alle Residuen des Integranden umschlossen werden:

$$\int_{\alpha_1} f(z) dz + \int_{\alpha_2} f(z) dz + \int_{\alpha_3} f(z) dz + \int_{\alpha_4} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

Beim Grenzübergang $\varphi \rightarrow 0$ verschwinden die Integrale entlang der entstehenden Kreise α_2 und α_4 , wie man durch einfache Abschätzung zeigt. Für die beiden anderen

4 Typische Anwendungsbeispiele

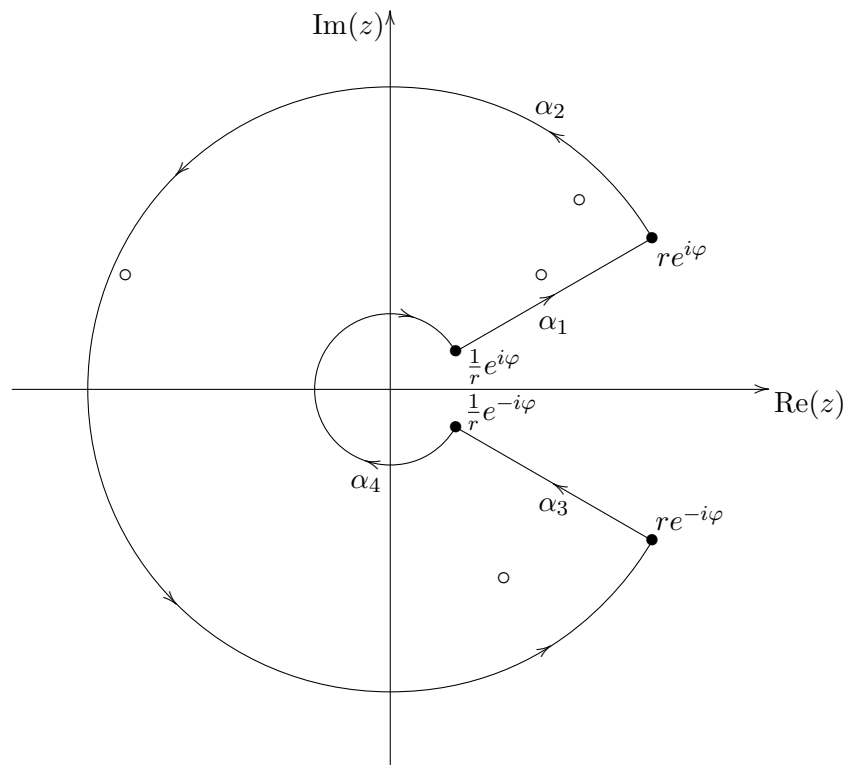


Abbildung 8: Integrationsweg für $\mathcal{M}[R(z)]$

4 Typische Anwendungsbeispiele

Anteile setzt man die Definition von $-z$ über den Logarithmus ein:

$$\int_{\alpha_1} f(z) dz = e^{i\varphi} \int_{\frac{1}{r}}^r \exp((\lambda - 1)(\log(t) + \log(-e^{i\varphi}))) R(te^{i\varphi}) dt$$

Da φ klein werden soll, befindet sich der Teilpfad α_1 in der oberen Halbebene und es gilt wegen der Wahl des Logarithmus-Hauptzweigs:

$$\log(-e^{i\varphi}) = i(-\pi + \varphi)$$

Insgesamt gilt also:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\alpha_1} f(z) dz = e^{-(\lambda-1)\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^r t^{\lambda-1} R(t) dt = -e^{-\lambda\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^r t^{\lambda-1} R(t) dt$$

Analog setzt man für das Integral entlang α_3 ein und erhält:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\alpha_3} f(z) dz = -e^{(\lambda-1)\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^r t^{\lambda-1} R(t) dt = e^{\lambda\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^r t^{\lambda-1} R(t) dt$$

Es muss nun nur noch der Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ gebildet werden. Nach Summation der Teilergebnisse ergibt sich unschwer die lösende Gleichung:

$$2i \sin(\lambda\pi) \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} R(t) dt = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} R(t) dt = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \sum_{z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

4.2.2 Normalverteilung

Es sei das Integral über die Gaußsche Normalverteilungsdichte zu berechnen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Man bedient sich hier der bereits bekannt vorausgesetzten Eigenschaft des Integranden, dass sich das Integral nicht verändert, wenn der Integrationsweg verschoben wird [1]. Wir nehmen also eine komplexe Konstante a an.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+a)^2} dz = e^{-a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-2az} dz$$

4 Typische Anwendungsbeispiele

Aus dem linken und dem rechten Ende ergibt sich schließlich die nachfolgende Gleichung und die weitere Argumentation.

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} (1 - e^{-a^2} e^{-2az}) dz$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-z^2}}{1 - e^{-a^2} e^{-2az}}}_{f(z)} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(z+a)^2}}{1 - e^{-a^2} e^{-2az}} dz$$

Wir bezeichnen den ersten Integranden auf der rechten Seite nun mit $f(z)$. Die Integrale der rechten Seite sind offenbar nicht äquivalent. Wenn es also möglich ist, den zweiten Integranden auf die Form $f(z+a)$ zu bringen, so ist ein passender Integrationspfad über f gefunden, der mindestens eine Singularität einschließt. Es gilt dann auch:

$$f(z) - f(z+a) = e^{-z^2}$$

Eine passende Konstante wäre etwa $a = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$$

Der zu betrachtende geschlossene Integrationsweg über f ist nun ein Parallelogramm mit den Eckpunkten $-r, r, r+a, -r+a$. Die Funktion f hat einfache Pole der Form $z_k = a/2 + ka$. Der Pol an $a/2$ wird als einziger eingeschlossen.

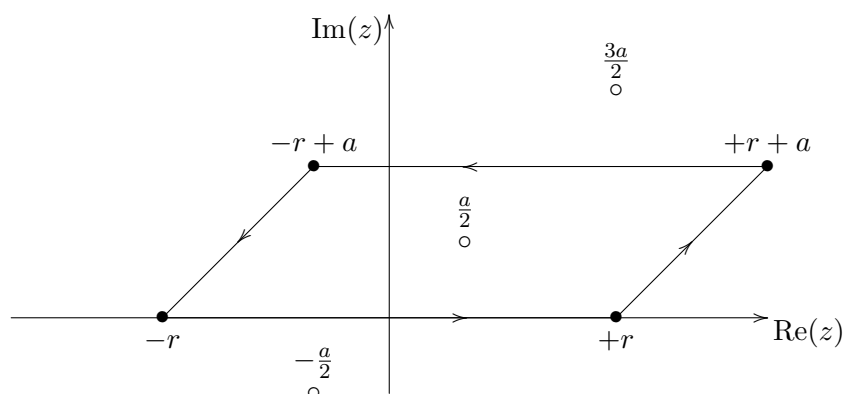


Abbildung 9: Integrationsweg für das Ersatzproblem zu $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-z^2} dz$

Beim Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ liefert nun das Residuum in $a/2$ das gesuchte Ergebnis. Die Integrale entlang der Verbindungsstücke zwischen r und $r+a$ bzw. zwischen $-r$ und $-r+a$ werden zu null, da f extrem schnell abfällt.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

4 Typische Anwendungsbeispiele

4.2.3 Fresnel-Integral

Es seien die sogenannten Fresnel-Integrale zu berechnen:

$$C = \int_0^{\infty} \cos(z^2) dz \quad , \quad S = \int_0^{\infty} \sin(z^2) dz$$

Diese werden als Real- und Imaginärteil eines Integrals E interpretiert.

$$C + iS = \int_0^{\infty} e^{iz^2} dz = E$$

E hat wiederum starke Ähnlichkeit mit der Gaußschen Normalverteilung, auf die es nun auch zurückgeführt wird. Man betrachtet also einen geschlossenen Integrationspfad, bestehend aus drei Teilen α_1 bis α_3 .

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t & , \quad t \in [0; r] \\ \alpha_2(t) &= re^{it} & , \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}] \\ \alpha_3(t) &= (r-t)e^{i\frac{\pi}{4}} & , \quad t \in [0; r] \end{aligned}$$

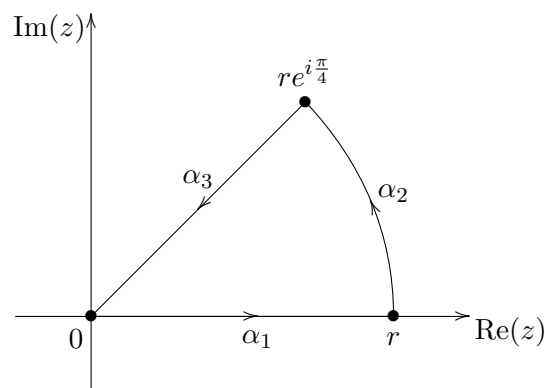


Abbildung 10: Integrationsweg für $\int_{\mathbb{R}^+} e^{iz^2} dz$

Der gewählte (oktantenförmige) Integrationsweg schließt keine Singularitäten ein. Es ist daher nach dem Cauchyschen Integralsatz die Summe der Integrale entlang α_1 bis α_3 gleich null.

$$\int_{\alpha_1} e^{iz^2} dz + \int_{\alpha_2} e^{iz^2} dz + \int_{\alpha_3} e^{iz^2} dz = 0$$

Nach dem Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ zeigt eine Abschätzung, dass die Summe entlang α_2 verschwindet. Das gesuchte Integral ist dann genau jenes entlang α_1 .

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_2} e^{iz^2} dz \leq \lim_{r \rightarrow \infty} |r^{-1}| \int_0^{\frac{\pi}{4}} |e^{-r^2 \sin(2t)}| dt = 0$$

4 Typische Anwendungsbeispiele

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_3} e^{iz^2} dz &= \lim_{r \rightarrow \infty} -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^r e^{-(r-t)^2} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = -e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &\implies \int_0^\infty e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

Für die beiden - offensichtlich gleichwertigen - Integrale C und S gilt also:

$$C = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$S = \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

In diesem Abschnitt wird ein Problem vorgestellt, welches mit dem Residuensatz und anderen Werkzeugen der Funktionentheorie gelöst wurde.

Konkret wird die Lösung des Beugungsproblems von elektromagnetischen Wellen betrachtet, wie sie von Arnold Sommerfeld [3] hergeleitet wird. Als exakte Lösung gilt sie für alle Wellenlängen und ist somit in der Optik wie auch in der Telekommunikation für Abschattungsprobleme heranzuziehen. Es wird hier nur das Modell der Beugung an der Halbebene behandelt, jedoch ist klar, dass auf dieselbe Art auch andere Geometrien behandelt werden können.

Die Behandlung des Lösungswegs wird mit komplexen Größen vorgenommen, wie es in der Elektrotechnik üblich ist. Die Umlegung auf reelle Größen ist jedoch leicht zu bewerkstelligen.

5.1 Das Modell

Es liege im \mathbb{R}^3 ein ideal leitfähiger Schirm S in der Halbebene:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Der restliche Feldraum S^C ist leer und einfach zusammenhängend. Die Feldsituation ist daher translationsinvariant bezüglich der x_3 -Achse.

Der Wellenvektor (die Ausbreitungsrichtung) sei daher gegeben durch:

$$\vec{k} = -k(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)^T, \quad \alpha \in (0; \pi)$$

Es wird der elementare Ausbreitungsfall von ebenen, linear polarisierten Wellen behandelt, wobei einmal die Komponente E_3 und einmal die Komponente B_3 nullgesetzt sei. Es wird davon abgesehen, von TE- bzw. TM-Wellen zu sprechen, da die Transversalität hier zur x_3 -Achse und nicht zum Wellenvektor gegeben ist. Der Beweis einer vollständigen Beschreibung durch diese zwei Fälle folgt aus den Rotorgleichungen.

Da die Welle also in der Einfallsebene und durch eine skalare Größe vollständig beschrieben wird, kann das Problem in die komplexe Ebene eingebettet werden.

Die beschreibende Feldkomponente (E_3 bzw. B_3) wird in Polarkoordinaten als $u(r, \varphi)$ ausgedrückt und in die (zeitlich fouriertransformierte) Wellengleichung eingesetzt.

$$(\Delta + k^2)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) u(r, \varphi) = 0$$

Die einfallende ebene Welle wird entsprechend als u_0 bezeichnet.

$$u_0(r, \varphi) = e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)}$$

Zusätzlich werden an die gesuchte Lösung eine Reihe von Randbedingungen gestellt.

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

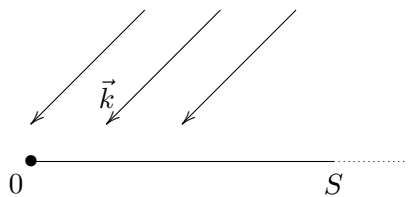


Abbildung 11: Einfallsebene mit Schirm S und Wellenvektor k

Bei der Beschreibung von E_3 durch u wird die Sprungbedingung für elektrische Felder, bzw. von B_3 jene für magnetische Felder, auf der Schirmebene S benötigt.

$$B_3 = 0 \implies u = 0 \quad \text{bzw.} \quad E_3 = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad , \quad \varphi \in \{0; 2\pi\}$$

Außerdem verlangt man, dass $u(r, \varphi)$ im gesamten Feldraum $r \neq 0$ beschränkt und stetig ist, und sich die Wellenanteile mit Quellen im Endlichen im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ wie auslaufende Zylinderwellen verhalten:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0 \quad , \quad v = \begin{cases} u - u_0, & \text{im geometrisch beleuchteten Bereich} \\ u, & \text{im geometrischen Schatten} \end{cases}$$

Abschließend wird noch festgelegt, dass die Schirmkante nicht leuchten darf. Hierzu wird definiert, dass die radiale Komponente S_r des Poynting-Vektors keinen Pol erster oder höherer Ordnung in $r = 0$ haben darf.

$$\lim_{r \rightarrow 0} ru \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad , \quad \text{wobei} \quad u \frac{\partial u}{\partial r} \propto S_r$$

5.2 Konstruktion der Lösung

Das Problem wird nun zuerst - in Analogie zur Kutta-Joukowski-Transformation in der Strömungslehre - per konformer Abbildung t in ein bekanntes Problem transformiert.

$$t : z \mapsto \sqrt{z}$$

Dadurch wird die Halbebene des Schirms S auf die Ebene $x_1 \in \mathbb{R}$ transformiert, bzw. die positive reelle z -Achse auf die gesamte reelle Achse projiziert. Es kann also im weiteren derselbe Lösungsansatz verwendet werden, wie beim Spiegel-Problem. Vorher müssen allerdings noch einige Konsequenzen der Transformation abgeklärt werden.

Die Wurzelfunktion ist eine mehrdeutige Funktion. Daher definieren wir die verwendete Transformation $t(z)$ als positiven Teil der Wurzelfunktion.

$$t : re^{i\varphi} \mapsto +\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$$

Weiters ist das Urbild der Transformation festzulegen, da ja eigentlich eine Lösung für das nicht transformierte Problem gesucht ist. Da der Winkel (das komplexe Argument)

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

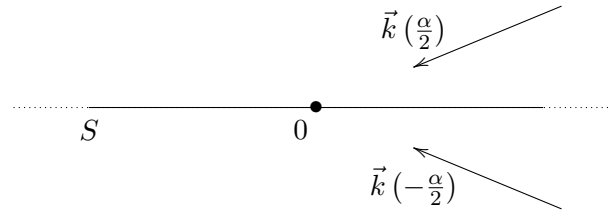


Abbildung 12: Transformierte Einfallsebene mit Schirm S und Wellenvektor k , sowie gespiegelm Wellenvektor

halbiert wird, wird also nicht die komplexe Ebene, sondern eine Riemannsche Fläche als Definitionsmenge der Transformation verwendet.

$$r \in \mathbb{R}_0^+ \quad \varphi \in [-2\pi; +2\pi]$$

Diese Riemannsche Fläche lässt sich etwa durch zwei komplexe Ebenen übereinander darstellen und hat Verzweigungspunkte in 0 und ∞ .

Es können nun also Lösungen analog zum Spiegelproblem konstruiert werden, d.h. die Feldsituation in der oberen Halbebene des transformierten Problems wird einfach an der reellen Achse gespiegelt und im Vorzeichen so gewählt, dass die Randbedingungen am Schirm erfüllt sind. Die transformierte Lösung ist dann 2π -periodisch in $\varphi/2$ bzw. die gesuchte Lösung ist 4π -periodisch in φ .

$$u(r, \varphi) = U(r, \varphi - \alpha) \mp U(r, \varphi + \alpha) \quad , \quad \begin{cases} B_3 = 0 \\ E_3 = 0 \end{cases}$$

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

Die lösende Funktion $U(r, \psi)$ habe dabei folgende Eigenschaften:

- 4π -Periodizität:

$$U(r, \psi + 4\pi) = U(r, \psi)$$

- U ist gerade in ψ (folgt aus der Spiegelungsmethode):

$$U(r, \psi) = U(r, -\psi)$$

- U erfüllt die elektrodynamischen Randbedingungen bei $\varphi \in \{0, 2\pi\}$:

$$U(r, \varphi - \alpha) - U(r, \varphi + \alpha) = U(r, -\alpha) - U(r, \alpha) = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial U}{\partial n}(r, \varphi - \alpha) + \frac{\partial U}{\partial n}(r, \varphi + \alpha) = \frac{\partial U}{\partial \psi}(r, -\alpha) + \frac{\partial U}{\partial \psi}(r, \alpha) = 0$$

- U ist stetig und beschränkt auf ganz \mathbb{C} .
- Übereinstimmung mit den Beschreibungen der geometrischen Optik (Zylinderwellen-Bedingung):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, \psi) = \begin{cases} e^{-ikr \cos(\psi)} & , \quad 0 < |\psi| < \pi \\ 0 & , \quad \pi < |\psi| < 2\pi \end{cases}$$

- Schirmkante leuchtet nicht:

$$\lim_{r \rightarrow 0} ru \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Die letzten drei Eigenschaften gilt es nach Findung einer Lösung zu überprüfen, da es Randbedingungen sind, die aus der Physik kommen.

5.3 Berechnung der Lösung

Die gefundene Lösung ist noch zu allgemein, da die letzten beiden Eigenschaften erfüllt sein können oder auch nicht. Es wird im weiteren eine elementare Lösung für die Einstrahlung einer ebenen Welle berechnet. Man gehe zunächst von der Darstellung der Lösungen der Wellengleichung als Wellenpakete aus.

$$u_{\text{allg}} = \int A(\beta) e^{-ikr \cos(\varphi - \beta)} d\beta$$

Dabei sei A eine beliebige Amplitudenfunktion (Gewichtungsfunktion) und die Integrationsvariable β der jeweilige Einfallswinkel. Es ist dadurch möglich, die einfallende ebene Welle u_0 mit einer 2π -periodischen Amplitudenfunktion (u_0 ist ja auch 2π -periodisch) mit einfachem Pol in α durch ein Umlaufintegral zu beschreiben (A ist dabei willkürlich gewählt und der Vorfaktor dem Residuum angepasst).

$$u_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K_\varepsilon(\alpha)} \underbrace{\frac{1}{1 - e^{i(\alpha - \beta)}}}_{A(\beta)} e^{-ikr \cos(\beta - \varphi)} d\beta$$

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

Es wird dabei $A(\beta)$ absichtlich 2π -periodisch angesetzt und erst später als 4π -periodisch angenommen. Nach dem Satz über die Wegdeformation kann der Integrationsweg beliebig verformt werden, solange keine weiteren Singularitäten des Integranden eingeschlossen werden. Betrachtet man das Verhalten des Integranden in der komplexen Ebene, so zeigt sich, dass er auf rechteckig begrenzten Gebieten im unendlich fernen Punkt alternierend gegen Null und Unendlich strebt. In Abbildung 13 sind die Gebiete, auf denen $e^{-ikr \cos(\beta-\varphi)}$ endlich bleibt, schraffiert eingezeichnet.

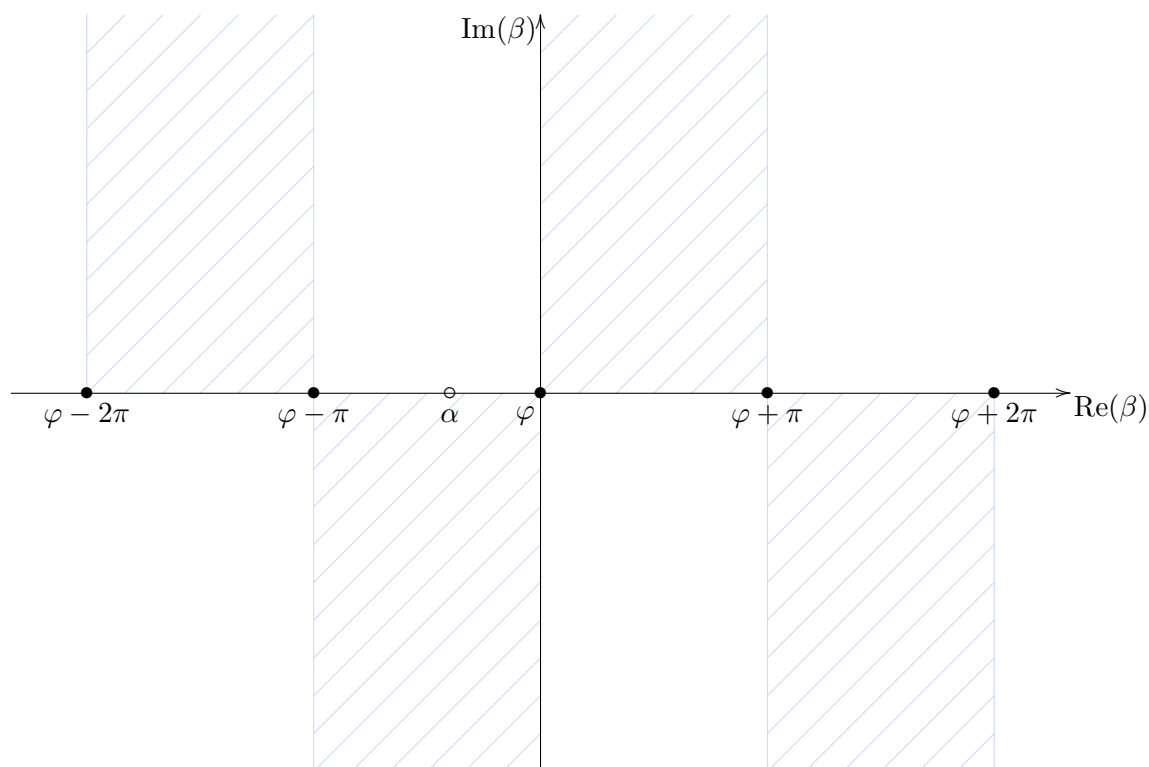


Abbildung 13: Musterung aufgrund der Konvergenz von $e^{-ikr \cos(\beta-\varphi)}$ komplexen β -Ebene

Es ist also möglich, den Integrationsweg auf jenen Gebieten, auf welchen der Integrand für $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht, zum unendlich fernen Punkt hin zu erweitern. Der Integrationsweg teilt sich dann in zwei Schleifen, zusammengefasst als \mathcal{C} , und zwei Verbindungswege \mathcal{D}_1 und $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 + 2\pi$. Eine solche Wegverformung ist in Abbildung 14 dargestellt.

Durch die 2π -Periodizität des Integranden heben sich die Beiträge der gegensinnig durchlaufenen Kurven \mathcal{D}_k gegenseitig auf. Der Integrationsweg \mathcal{C} liefert damit denselben

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

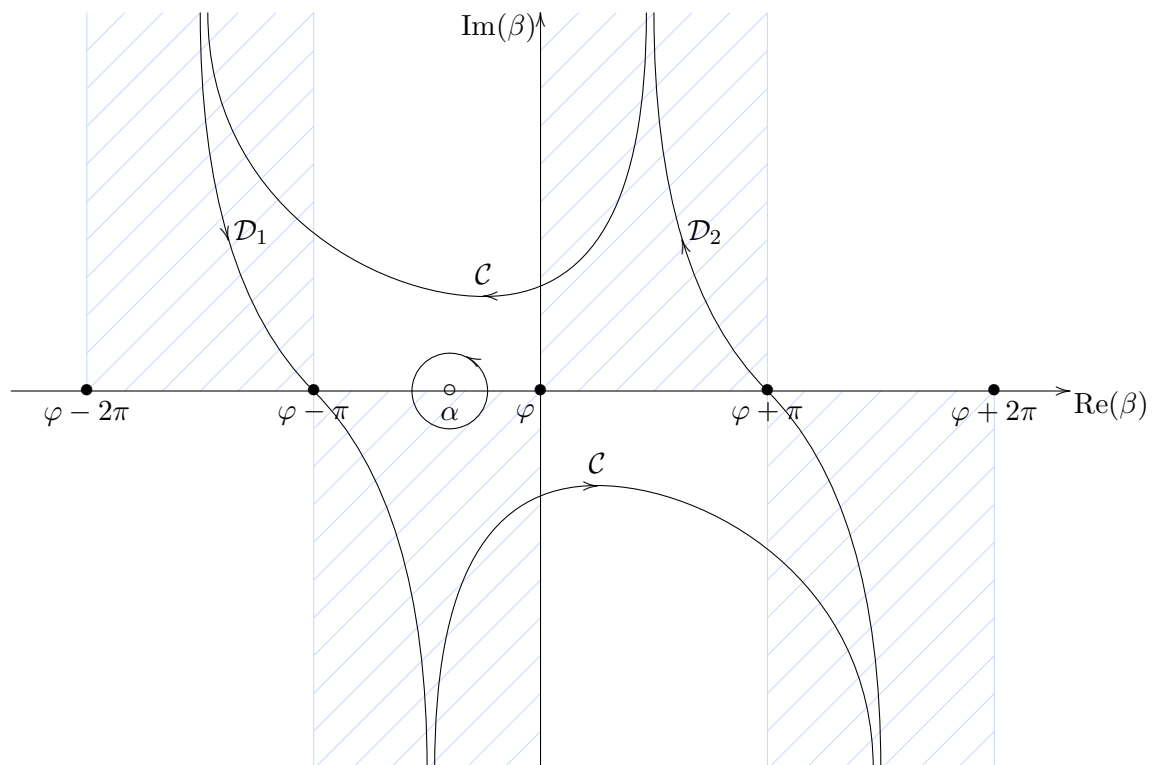


Abbildung 14: Die Pfade \mathcal{C} und \mathcal{D}_k in der (gemusterten) komplexen β -Ebene

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

Wert wie das Umlaufintegral.

$$u_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1 - e^{i(\alpha-\beta)}} e^{-ikr \cos(\beta-\varphi)} d\beta$$

Da die gesuchte Lösung nun allerdings nicht 2π -periodisch sondern 4π -periodisch ist, muss auch $A(\beta)$ so gewählt werden. Zur Erinnerung: Die Amplitudenfunktion kann beliebig gewählt sein. Es sei lediglich gefordert, dass das Residuum im Pol bei α auf $1/2\pi i$ normiert sei.

Die angesprochenen Beiträge entlang der \mathcal{D}_k heben sich nun nicht mehr gegenseitig auf, werden aber absichtlich weggelassen. Genau dadurch entstehen dann beim Ergebnis die gesuchten Beugungsphänomene. Würde man nämlich einen geschlossenen Integrationsweg wählen, wäre nach dem Residuensatz nur wieder u_0 erzeugt worden. Es ergibt sich dann für die lösende Funktion U :

$$U(r, \varphi - \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1 - e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}} e^{-ikr \cos(\beta-\varphi)} d\beta$$

Die Musterung in der Abbildung verschiebt sich nun allerdings gemeinsam mit dem Integrationsweg in Abhängigkeit vom Winkel φ . Deshalb substituiert man im Integral:

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi - \alpha \quad , \quad \gamma = \beta - \varphi \\ \implies U(r, \psi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1 - e^{-i\frac{\gamma+\psi}{2}}} e^{-ikr \cos(\gamma)} d\gamma \end{aligned}$$

Anschließend wird der Weg \mathcal{C} erneut deformiert. Die obere Schlinge von \mathcal{C} wird in die obere Hälfte von \mathcal{D}_1 übergeführt bis vor den Punkt $\gamma = -\pi$, weiter in der offenen oberen Halbebene auf die Verbindungsstrecke zu $\gamma = \pi$ gelegt und mit der oberen Hälfte von \mathcal{D}_2 zur Deckung gebracht. Die untere Schlinge von \mathcal{C} wird analog in der offenen unteren γ -Halbebene deformiert.

Je nach Lage des Pols in α , welcher in der komplexen γ -Ebene auf $\gamma = \alpha - \varphi = -\psi$ transformiert wurde, hat die lösende Funktion $U(r, \psi)$ nun also einen additiven Anteil, der starke Ähnlichkeit mit u_0 hat und einen für $r \rightarrow \infty$ abklingenden Beugungsfeld-Anteil, der von den Beiträgen entlang der \mathcal{D}_k herrührt. Beachte: der Pol in α wird nicht vollständig umlaufen, da die obere Schlinge von \mathcal{C} in der offenen oberen Halbebene verläuft und die untere Schlinge in der offenen unteren Halbebene. Es kann also nicht die Aussage des Residuensatzes geltend gemacht werden, dass das Residuum im Pol einen genau definierten Anteil liefert, solange der Pol vom Integrationspfad umschlossen ist.

Die Funktion U ist stetig im gesamten 4π -periodischen Definitionsbereich und sicher beschränkt auf $r \neq 0$. Der scheinbare Sprung in $\psi = \pm\pi$ an der Grenze zwischen geometrischem Licht und Schatten ist tatsächlich keiner. Die Integralanteile entlang der \mathcal{D}_k verschwinden im Gegensatz zum Anteil beim Umlauf eines Pols nicht plötzlich. Stattdessen wirkt sich der Pol im Fall $|\psi| > \pi$ stetig schwächer aus. Das bedeutet auch, dass die gebeugte Welle azimuthal abnimmt, je tiefer ein Aufpunkt im geometrischen Schatten

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

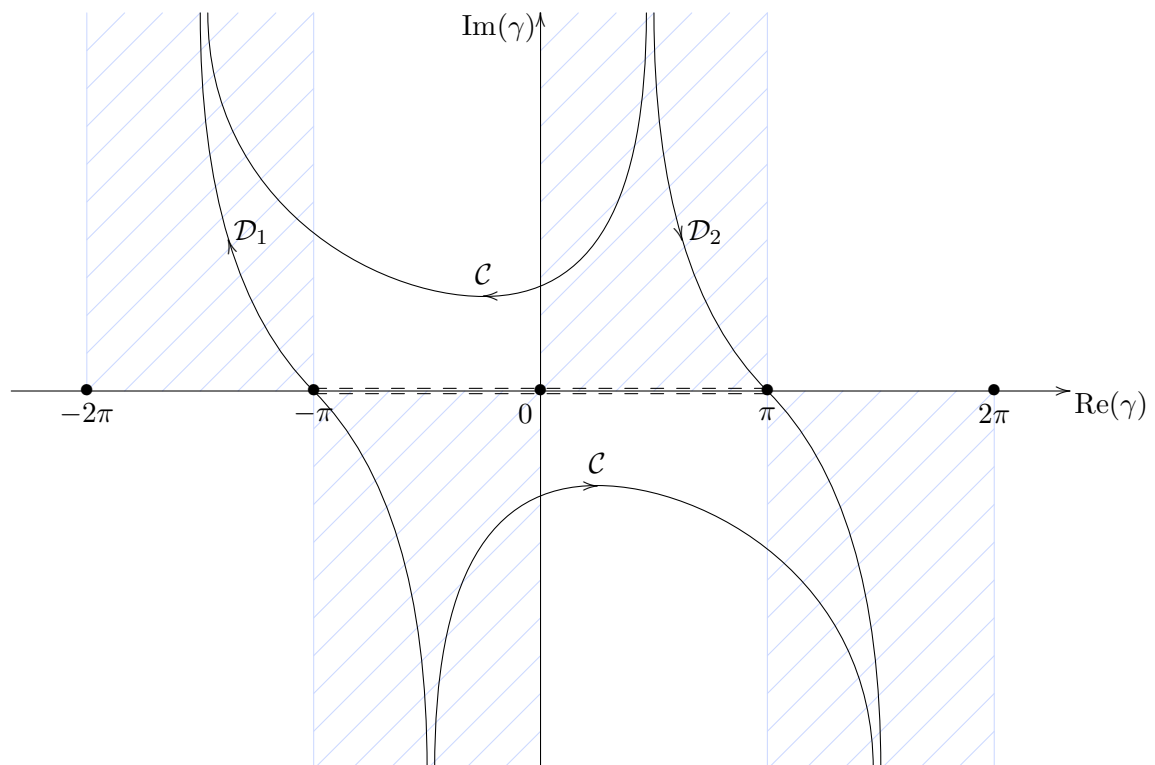


Abbildung 15: Die Pfade \mathcal{C} und \mathcal{D}_k in der (gemusterten) komplexen γ -Ebene

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

liegt. Es reicht also, den Fall $|\psi| > \pi$ zu betrachten und nicht dezidiert einen Term für die einfallende Welle u_0 in der Lösung mitzuführen.

Für $r = 0$ gilt nun, dass der Faktor $e^{-ikr \cos(\gamma)}$ im Integranden zu 1 wird und die Konvergenz des Integrals fraglich wird. Durch die Substitutionen $z = e^{i\frac{\gamma}{2}}$ und $\zeta = e^{-i\frac{\psi}{2}}$ findet man - abgesehen von Vorfaktoren - das Integral:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{z - \zeta} dz = \ln \left(\frac{z_1 - \zeta}{z_0 - \zeta} \right) = \begin{cases} 0 & \text{obere Schlinge} \\ i\pi & \text{untere Schlinge} \end{cases}$$

Das Paar (z_0, z_1) stellt dabei die Endpunkte der oberen bzw. unteren Schlinge von \mathcal{C} nach der Substitution dar.

Für $r \rightarrow \infty$ wurde der Wert von U bereits vorweggenommen. Die Beiträge der Beugung verschwinden und es bleibt je nach Lage des Pols u_0 oder 0 übrig. Auch hier ist U damit beschränkt. Der stetige Übergang zwischen Licht und Schatten schrumpft auf die Linie $|\psi| = \pi$ zusammen. Als schärfere Bedingung kann auch noch der Grenzwert aus dem Modell berechnet werden:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) = 0 \quad , \quad |\psi| > \pi$$

Dies geht bereits aus einer einfachen Abschätzung hervor, da im Grenzwert $r \rightarrow \infty$ der Anteil der Beugung exponentiell abklingt, während der Vorfaktor \sqrt{r} weitaus langsamer wächst. Lediglich der Integralanteil bei $\gamma = \pm\pi$ ist nicht unmittelbar einsichtig und muss separat behandelt werden. Hierbei wird auf die Literatur verwiesen.

5.4 Das Ergebnis

Nunmehr ist es von Interesse, die Lösung auszurechnen. Die Integralanteile auf \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 summieren sich wegen $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 + 2\pi$ und der gegensinnigen Durchlaufrichtung zu:

$$U(r, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}_2} e^{-ikr \cos \gamma} \left(\frac{1}{1 - e^{-i\frac{\gamma+\psi}{2}}} - \frac{1}{1 + e^{-i\frac{\gamma+\psi}{2}}} \right) d\gamma$$

Die Differenz in der Klammer wird ausgerechnet und $\gamma \mapsto \pi + \eta$ substituiert, sodass der Integrationspfad punktsymmetrisch wird.

$$U(r, \psi) = \frac{-i \cos \frac{\psi}{2}}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{ikr \cos \eta} \frac{\cos \frac{\eta}{2}}{\cos \psi + \cos \eta} d\eta$$

Anschließend wird die gesuchte Funktion auf u_0 bezogen und nach r differenziert, um den Nenner im Integranden aufzuheben.

$$V(r, \psi) = \frac{U(r, \psi)}{u_0(r, \psi)} \implies \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k \cos \frac{\psi}{2}}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{ikr(\cos \psi + \cos \eta)} \cos \frac{\eta}{2} d\eta$$

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

Umwandeln der Winkelfunktionen mittels Sumsensätzen ergibt im Exponenten:

$$\cos \psi + \cos \eta = 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} - 1 + 1 - 2 \sin^2 \frac{\eta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} - 2 \sin^2 \frac{\eta}{2}$$

Es verbleibt dadurch ein Integral der Form:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k \cos \frac{\psi}{2}}{\pi} e^{2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{-i2kr \sin^2 \frac{\eta}{2}} \cos \frac{\eta}{2} d\eta$$

Durch erneute Substitution $2kr \sin^2(\eta/2) \mapsto \tau^2$ entsteht schließlich ein Fresnel-Integral. Die Integrationsgrenzen schließen die positive reelle Achse in der Integrationsvariablen τ ein (der Summand $\pi/2$ in der oberen Integrationsgrenze wurde absichtlich günstig gewählt).

$$\int_0^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{-i2kr \sin^2 \frac{\eta}{2}} \cos \frac{\eta}{2} d\eta = \sqrt{\frac{2}{kr}} \int_0^\infty e^{-i\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{2}{kr}} (C - iS) = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{kr}}$$

Die Konstanten C und S kommen aus den Ergebnissen im vorigen Abschnitt (Fresnel-Integral). Insgesamt ergibt sich für die bezogene Funktion V :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1-i}{2} \cos \frac{\psi}{2} \frac{\partial}{\partial r} \int \sqrt{\frac{k}{\pi r}} e^{2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} dr$$

Eine letzte Substitution $\frac{4k}{\pi} \cos^2(\psi/2)r \mapsto \tau^2$ führt schließlich zur Lösung für U .

$$U(r, \psi) = u_0 \frac{1-i}{2} \int_{-\infty}^{\rho} e^{i\pi\tau^2/2} d\tau \quad , \quad \rho = 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\psi}{2}$$

Die letzte Substitution wurde dabei absichtlich so gewählt, dass sich das Ergebnis wieder genau mit jenem aus der Literatur deckt.

Die gefundene Lösung wurde zunächst nur für den geometrischen Schatten berechnet. Es stellt sich die Funktion U jedoch durch die Verflechtung ihrer Parameter r und ψ im Ausdruck ρ als Lösung für den gesamten 4π -periodischen Definitionsbereich heraus. Vergleiche hierzu auch die Ausführungen oben bezüglich der Wegdeformation.

Abschließend gilt es noch, die Randbedingung an der Kante zu prüfen. Es gelte:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r u \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Dabei ist die Funktion U selbst und damit auch u beschränkt laut Forderung und besitzt eine Majorante. Die Ableitung wächst für $r \rightarrow 0$ nur mit $1/\sqrt{r}$, sodass der Grenzwert sicher verschwindet.

Es ist also die gewünschte exakte Lösung für die Beugung am Schirm bei Einstrahlung einer ebenen Welle gefunden. Selbstverständlich kann nun auch mit den oben benutzten

5 Eine praktische Anwendung: Beugungsphänomene

Integralen C und S die Richtigkeit der Lösung bezüglich des Verhaltens bei $r \rightarrow \infty$ gezeigt werden.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, \psi) = u_0 \frac{1-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau^2/2} d\tau = u_0 \frac{1-i}{2} \frac{1+i}{2} = u_0$$

6 Schlussbetrachtungen

Es wurde also aufgezeigt, wie mit der Funktionentheorie, insbesondere Residuensatz und Wegdeformation, die Methoden der reellen Analysis ergänzt werden können, um die Möglichkeiten der analytischen Integration zu erweitern.

Pfadschließungen auf der Riemannschen Zahlenkugel und die Erzeugung Riemannscher Flächen durch die Multiplikation eines meromorphen Integranden mit einer Logarithmusfunktion sind Beispiele dafür. Auch die Lösung eines Integrals durch Rückführung auf ein Ersatzproblem, in dem die Verteilung isolierter Singularitäten günstiger ausfällt, ist eine wichtige Methode.

Im Allgemeinen kann keine universelle Methode für die Benutzung des Residuensatzes angegeben werden. Hier ist die Kreativität des Anwenders gefordert. Es sind allerdings Lösungswege für eine große Zahl von Integraltypen bereits bekannt, wie auch die Beispielsammlung in dieser Arbeit gezeigt hat.

Die Vorstellung einer praktischen Anwendung aus der Wellenausbreitung hat außerdem gezeigt, wie eindimensional translationsinvariante Feldprobleme sofort in die komplexe Analysis übertragen werden können. Die möglichen Anwendungsfälle des Residuensatzes und der komplexen Analysis decken damit eine breite Palette von Standardproblemen ab, wodurch sie für Elektrotechniker jedenfalls nützliche Werkzeuge darstellen.

Abbildungsverzeichnis

1	Integrationsweg für $\int_{\mathbb{R}} R(x)dx$	3
2	Allgemeiner Integrationsweg über $R(z)$ in der komplexen z -Ebene	4
3	Riemannsche Fläche zu $\text{Im} \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$; Realteil ist nicht mehrdeutig.	5
4	Kurve \mathcal{C} und umschließender Integrationspfad α	6
5	Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}+\frac{\alpha}{2}} e^{-z^2} dz$	10
6	Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin(z)}{z} dz$	12
7	Integrationsweg zu $\int_{\mathbb{R}+} \frac{\log(z)}{1+z^2} dz$; Logarithmuszweig liegt auf der negativen Imaginärachse	13
8	Integrationsweg für $\mathcal{M}[R(z)]$	15
9	Integrationsweg für das Ersatzproblem zu $\int_{\mathbb{R}+} e^{-z^2} dz$	17
10	Integrationsweg für $\int_{\mathbb{R}+} e^{iz^2} dz$	18
11	Einfallebene mit Schirm S und Wellenvektor k	21
12	Transformierte Einfallebene mit Schirm S und Wellenvektor k , sowie gespiegeltem Wellenvektor	22
13	Musterung aufgrund der Konvergenz von $e^{-ikr \cos(\beta-\varphi)}$ komplexen β -Ebene	24
14	Die Pfade \mathcal{C} und \mathcal{D}_k in der (gemusterten) komplexen β -Ebene	25
15	Die Pfade \mathcal{C} und \mathcal{D}_k in der (gemusterten) komplexen γ -Ebene	27

Literatur

- [1] HEINRICH BEHNKE, FRIEDRICH SOMMER *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 3. Auflage, Springer, 1955
- [2] EBERHARD FREITAG, ROLF BUSAM *Funktionentheorie 1*, 4. Auflage, Springer, 1942
- [3] ARNOLD SOMMERFELD *Vorlesungen über theoretische Physik - Band 4 (Optik)*, 3. Auflage, Deutsch, 1978
- [4] STEFAN KRAUSE, ANDREAS KÖRNER *Komplexe Analysis*, Skriptum zur begleitenden Vorlesung, TU Wien, 2010
- [5] WIKIPEDIA *Momenterzeugende Funktion*, http://de.wikipedia.org/wiki/Momenterzeugende_Funktion, letzter Aufruf: 16. Oktober 2012.

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, 8. November 2012

Florian Rötzer