

Die Riemannsche Zetafunktion

Bakkalaureatsarbeit

ausgeführt am
Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Betreuer
Dr. Wolfgang Herfort
Dr. Stefan Krause

von
Armand Nabavi
Matr. Nr. 0925041

28. September 2012

Zusammenfassung

Die Riemannsche Zetafunktion, benannt nach Bernhard Riemann (1826-1866), ist seit über 150 Jahren Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Erstmals behandelt wurde sie in Riemanns berühmter Arbeit *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859, siehe [21]).

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der für $\text{Re}(s) > 1$ gültigen Reihendarstellung, zeigt, dass diese Funktion meromorph auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden kann und beschäftigt sich schließlich noch mit Formeln, die die einfache Berechnung bestimmter Funktionswerte ermöglichen.

Die Bedeutung der Riemannschen Zetafunktion für die Mathematik und die Physik wird im 2. Kapitel exemplarisch anhand vom Primzahlsatz und vom quantenmechanischen chaotischen Oszillator gezeigt.

Im 3. Kapitel wird gezeigt, welche Bedeutung den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion zukommt, insbesondere jenen im sogenannten „kritischen Bereich“ $0 < \text{Re}(s) < 1$. In diesem Bereich weist die Riemannsche Zetafunktion Symmetrieeigenschaften auf, die die Nullstellensuche erleichtern.

Die Suche nach Nullstellen führt unmittelbar zur Riemannschen Vermutung, laut der alle Nullstellen im „kritischen Bereich“ als Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Im 4. Kapitel werden zur Riemannschen Vermutung äquivalente mathematische Aussagen vorgestellt. Anschließend wird die Vermutung von Hilbert und Pólya behandelt, laut der eine Äquivalenz zwischen der Riemannschen Vermutung und der Existenz eines selbstadjungierten Hamilton-Operators mit bestimmten Eigenwerten, die den Nullstellen der Zetafunktion entsprechen, besteht.

Schließlich werden im 5. Kapitel Beispiele verallgemeinerter Zetafunktionen vorgestellt, nämlich die Hurwitzsche und die Epsteinsche Zetafunktion. Außerdem wird der ebenfalls mit der Riemannschen Zetafunktion verwandte Polylogarithmus behandelt.

Abstract

The Riemann zeta function, named after Bernhard Riemann (1826-1866) is being analyzed for more than 150 years. It appeared for the first time in Riemann's famous paper *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (translated: *On the Number of Prime Numbers Less Than a Given Magnitude*) (1859, see [21]).

The first chapter shows that the function, initially defined as a series that converges for $\text{Re}(s) > 1$, can be meromorphically extended to the whole complex plane. In the second part of this chapter, formulas greatly simplifying the computation of certain values of the Riemann zeta function are being introduced.

Part of the significance of the Riemann zeta function arises from its connection with Number Theory and Quantum Mechanics, as is shown in a proof of the prime number theorem and in an analysis of the quantum chaotic oscillator in chapter two.

The third chapter shows how important the zeros of the Riemann zeta function are, especially those located in the so-called “critical strip” defined as the area $0 < \text{Re}(s) < 1$. Symmetries of the Riemann zeta function make it possible to limit the search for zeros to a specific area of the critical strip.

The search for zeros leads to the Riemann hypothesis which states that all zeros in the critical strip have a real part of $\frac{1}{2}$. In the fourth chapter, several statements that are equivalent to the Riemann hypothesis are being introduced, including the Hilbert Pólya conjecture which states that there exists a self-adjoint Hamiltonian whose eigenvalues are related to the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip.

Finally, the fifth chapter contains three examples of generalizations of the Riemann zeta function, namely the Hurwitz zeta function, the Epstein zeta function and the polylogarithm.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	i
Abstract	i
Einleitung	1
1 Definition und meromorphe Fortsetzung	2
1.1 Reihendarstellung, Konvergenz	2
1.2 Meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C}	4
1.2.1 Definition der Meromorphie, Eindeutigkeit	5
1.2.2 Fortsetzung in die Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$	5
1.2.3 Fortsetzung auf \mathbb{C}	6
1.3 Auswertung der Zetafunktion für bestimmte $s \in \mathbb{C}$	11
1.3.1 Formel für $\zeta(2n), n \in \mathbb{N}$	11
1.3.2 Fourierreihen	15
2 Zetafunktion in Mathematik und Physik	21
2.1 Zahlentheorie	21
2.2 Quantenmechanik	29
3 Nullstellen der Zetafunktion	35
3.1 Bedeutung der Nullstellen der Zetafunktion	35
3.2 „Triviale“ Nullstellen	35
3.3 Nullstellen im „kritischen Bereich“	37
3.3.1 Symmetrie bezüglich der reellen Achse	38
3.3.2 Symmetrie bezüglich $s = \frac{1}{2}$	38
4 Die Riemannsche Vermutung	41
4.1 Äquivalente Aussagen	41
4.2 Die Vermutung von Hilbert und Pólya	44
5 Abwandlungen der Riemannschen Zetafunktion	46
5.1 Die Hurwitzsche Zetafunktion	46
5.2 Die Epsteinsche Zetafunktion	47
5.3 Der Polylogarithmus	48
Schlussbetrachtungen	50
Abbildungsverzeichnis	51
Literaturverzeichnis	52

Einleitung

Die nach Bernhard Riemann (1826-1866) benannte Riemannsche Zetafunktion wurde erstmals in Riemanns Arbeit *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859, siehe [21]) umfassend analysiert. Seitdem war und ist sie Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Zunächst stellt sich die Frage, wie diese Funktion definiert ist und welche Eigenschaften sie besitzt. Anschließend kommt die Frage auf, in welchen Teilgebieten der Mathematik diese Funktion eine Rolle spielt. Dieser Faktor ist maßgebend für die Bedeutung der Riemannschen Zetafunktion und auch eine mögliche Erklärung, warum sich bis heute so viele Mathematiker mit dieser Funktion beschäftigen.

In dieser Arbeit liegt das Hauptaugenmerk auf den grundlegenden Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion und auf ihren typischen Anwendungen. Auf die numerische Berechnung von Funktionswerten wird nur am Rande eingegangen (zum Beispiel wird auf die Behandlung der Riemann-Siegel Formel verzichtet). Beweise werden angeführt, sofern sie nicht zu komplex und für das Verständnis wichtig sind, ansonsten wird auf die Literatur verwiesen.

Kapitel 1

Definition und meromorphe Fortsetzung

Es wird im Folgenden als komplexe Variable s mit $s = \sigma + it$, d.h. $\sigma = \operatorname{Re}(s)$, $t = \operatorname{Im}(s)$ verwendet. Diese Notation wurde bereits von Riemann (siehe [21]) verwendet und wird außerdem in vielen Publikationen zur Riemannschen Zetafunktion benützt.

1.1 Reihendarstellung, Konvergenz

Die Riemannsche Zetafunktion wird in den meisten Fällen als Reihe definiert:

$$\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Diese Reihe gehört zu den sogenannten Dirichlet-Reihen, die allgemein die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, s \in \mathbb{C}$$

haben. Die Riemannsche Zetafunktion entspricht dem Spezialfall $a_n = 1$. Es treten, wie aus der Formel ersichtlich ist, in der Reihe Terme mit komplexen Potenzen natürlicher Zahlen auf. Die komplexe Potenz einer natürlichen Zahl kann als Abbildung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (n, s) \mapsto n^s$$

interpretiert werden, die auch angeschrieben werden kann als

$$\mathbb{N} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (n, s) \mapsto e^{s \ln(n)}.$$

Wird die komplexe Zahl s als $s = \sigma + it$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ ausgedrückt, so kann für den Betrag von n^s geschrieben werden:

$$|n^s| = |n^{\sigma+it}| = \left| e^{(\sigma+it) \ln(n)} \right| = \left| e^{\sigma \ln(n)} \right| \underbrace{\left| e^{it \ln(n)} \right|}_{=1} = \left| e^{\sigma \ln(n)} \right| = n^\sigma.$$

Daraus folgt für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Dieser Ausdruck wird für die Untersuchung des Konvergenzgebiets der Zetafunktion benötigt. Es ist zum Beispiel sofort ersichtlich, dass

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert, da es sich dabei um die harmonische Reihe handelt. Wie vorher gezeigt hat lediglich $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ einen Einfluss auf den Betrag der Reihe. Es wird daher zunächst die Reihe mit Hilfe einer Fallunterscheidung auf absolute Konvergenz untersucht:

- $0 \leq \sigma \leq 1$

In diesem Fall gilt $n^\sigma \leq n$ bzw. $\frac{1}{n^\sigma} \geq \frac{1}{n}$, die harmonische Reihe ist also eine divergente Minorante, daraus folgt, dass die Reihe nicht absolut konvergent ist (sie könnte aber durchaus konvergent sein).

- $\sigma < 0$

Es gilt $\frac{1}{n^\sigma} = n^{-\sigma} = n^{|\sigma|}$. Funktionen der Form $f(x) = x^\sigma$ mit $\sigma > 0$ sind auf $[1, \infty]$ aufgrund der Positivität ihrer Ableitung streng monoton steigend, außerdem gilt $f(1) = 1$, daher konvergieren sie für $x \rightarrow \infty$ nicht gegen 0. Daraus folgt, dass $a_n = n^{|\sigma|}$ keine Nullfolge ist, daher ist die Reihe nicht absolut konvergent.

- $\sigma > 1$

Sei $f(x) = \frac{1}{x^\sigma}$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Es gilt $f'(x) = -\frac{\sigma}{x^{\sigma+1}}$, somit ist f für $\sigma > 1$ streng monoton fallend. Diese Tatsache erlaubt es, folgende Abschätzung zu machen:

$$\sum_{n=1}^k f(n) \geq \int_1^{k+1} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^k f(n+1)$$

Aus geometrischer Sicht wird das Integral durch Rechtecke approximiert, zuerst wird als Höhe der Funktionswert an der unteren Intervallgrenze genommen (linke Summe) und dann der an der oberen Intervallgrenze (rechte Summe). f ist Riemann-integrierbar, die Summen lassen sich als Riemannsche Ober- bzw. Untersummen deuten.

Durch Umformen erhält man außerdem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k f(n) - \sum_{n=1}^k f(n) &\geq \int_1^{k+1} f(x) dx - \sum_{n=1}^k f(n) \geq \sum_{n=1}^k f(n+1) - \sum_{n=1}^k f(n) \\ 0 &\geq \int_1^{k+1} f(x) dx - \sum_{n=1}^k f(n) \geq f(k+1) - f(1) \\ 0 &\leq \sum_{n=1}^k f(n) - \int_1^{k+1} f(x) dx \leq f(1) - f(k+1) \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ werden aus den Summen Reihen und aus dem bestimmten Integral ein unbestimmtes Integral. Es gilt

$$\int \frac{1}{x^\sigma} dx = -\frac{1}{(\sigma-1)x^{\sigma-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{(\sigma-1)x^{\sigma-1}} = 0$$

woraus die Existenz des unbestimmten Integrals und damit die Konvergenz der Unter- und Obersummen folgen. Wird noch zusätzlich der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ bei der umgeformten

Eingrenzung durchgeführt, so erhält man unter Vorwegnahme von $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

bzw. in unserem Fall

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma}} dx \leq 1$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| - \frac{1}{\sigma - 1} \leq 1$$

Für $s \in \mathbb{R}$ können bei der Reihe die Betragsstriche wie bereits gezeigt weggelassen werden, sie entspricht dann genau der Riemannschen Zetafunktion (auf der reellen Achse).

Diese Methode zum Beweis der Konvergenz und zur Abschätzung des Wertes der Reihe ist auch unter dem Namen Integralkriterium bekannt.

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, eine nicht absolut konvergente Reihe muss aber nicht unbedingt divergent sein. Es werden daher die Bereiche $0 \leq \sigma \leq 1$ und $\sigma < 0$ noch einmal untersucht. Dabei wird die Tatsache verwendet, dass eine komplexwertige Reihe genau dann konvergiert, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil für sich alleine konvergieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} &= n^{-s} \\ &= e^{-s \log(n)} \\ &= e^{s \log(1/n)} \\ &= e^{(\sigma + it) \log(1/n)} \\ &= e^{\sigma \log(1/n)} e^{it \log(1/n)} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Re}(1/n^s) = e^{\sigma \log(1/n)} \cos(t \log(1/n)).$$

Damit diese Reihe der Realteile überhaupt konvergieren kann, muss die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge sein. Dazu muss für $n \rightarrow \infty$ der Exponentialterm verschwinden. Mit Hilfe der Grenzwertsätze erhält man wegen $\log(1/n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$ dafür die Bedingung $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 0$. Die Reihe ist also divergent für $\sigma \leq 0$.

Das Konvergenzverhalten der Reihe für $0 \leq \sigma \leq 1$ lässt sich nicht so einfach bestimmen, es wurde aber gezeigt, dass sie auf diesem Gebiet nicht absolut konvergiert. Dies bedeutet, dass die Reihenglieder nicht beliebig umgeordnet werden dürfen, ohne dass sich der Wert der Reihe verändert. Das Umordnen einer konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihe kann sogar dazu führen, dass die neue Reihe divergiert. Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass die Reihe nur in der durch $\operatorname{Re}(s) > 1$ definierten Halbebene absolut konvergiert, das Konvergenzverhalten im Bereich $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ konnte nicht genau bestimmt werden. Dies ist jedoch kein Problem, da im Folgenden alternative Darstellungen der Riemannschen Zetafunktion hergeleitet werden, die auch für $\operatorname{Re}(s) < 1$ gültig sind.

1.2 Meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C}

Die Riemannsche Zetafunktion ist also nur in einer Halbebene definiert. Man kann sich jetzt die Frage stellen, ob es Funktionen mit größeren Definitionsbereichen gibt, die für $\operatorname{Re}(s) > 1$ mit der Zetafunktion übereinstimmen. Solche Funktionen werden Fortsetzung (der Riemannschen Zetafunktion) genannt.

1.2.1 Definition der Meromorphie, Eindeutigkeit

Diese Fortsetzungen sind erst dann sinnvoll einsetzbar, wenn sie holomorph oder zumindest meromorph auf ihrem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ sind.

Definition (Meromorphie). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei nun $P(f)$ die Menge aller Polstellen von f . Wenn den Polstellen formal der Wert ∞ zugeordnet wird, so lässt sich die Funktion \hat{f} mit $\hat{f} : G \cup P(f) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definieren. f ist dann eine Einschränkung von \hat{f} auf G . Ist $P(f)$ außerdem eine diskrete Teilmenge von $G \cup P(f)$, d.h. besitzt jedes $p_0 \in P(f)$ eine ε -Umgebung in G , die außer p_0 kein anderes Element aus $P(f)$ enthält, so nennt man \hat{f} meromorph.

Es stellt sich nun die Frage, ob die stetige Fortsetzung wirklich eindeutig bestimmt ist, oder ob es mehrere gibt. Die Antwort liefert der Identitätssatz für holomorphe Funktionen: Ist G ein Gebiet und sind f und g Funktionen, sodass gilt $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$, so sind f und g identisch, wenn sie auf einer Menge mit Häufungspunkt in G übereinstimmen. Von einer stetigen Fortsetzung fordert man ja prinzipiell, dass sie auf dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion mit eben dieser Funktion übereinstimmt, dadurch sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Daraus folgt die Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung.

1.2.2 Fortsetzung in die Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$

Zuerst soll die Riemannsche Zetafunktion allgemein für Argumente mit positivem Realteil definiert werden. Dies ist möglich, indem man die Reihendarstellung in eine Integraldarstellung überführt, wobei die Integrale einen größeren Konvergenzbereich als die Reihe aufweisen. Verwendet wird hierfür ein Spezialfall der Euler-MacLaurin-Summationsformel, der im Folgenden kurz erläutert wird. Es wird dabei vorgegangen wie in [16] beschrieben.

Sei $f : [1; n] \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Diese wird nun partiell von k bis $k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$, $k < n$) integriert:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \int_k^{k+1} 1 \cdot f(x) dx = \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f(x) \Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

Daraus ergibt sich

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

Dabei wurde als Stammfunktion für $g(x) = 1$ die Funktion $G(x) = x - k - \frac{1}{2}$ verwendet. Sei nun

$$H(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Es gilt

$$\int_k^{k+1} G(x) f'(x) dx = \int_k^{k+1} H(x) f'(x) dx$$

da $H(x)$ und $G(x)$ in $[k, k + 1]$ nur an den beiden Intervallgrenzen verschieden voneinander sind und der Wert des Integrals daher der gleiche ist. Wird jetzt über $k = 1, \dots, n - 1$ summiert, so

erhält man

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n f(k+1) + \sum_{k=1}^n f(k) \right) - \int_1^n H(x) f'(x) dx \\ \int_1^n f(x) dx &= \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{1}{2} (f(1) + f(n)) - \int_1^n H(x) f'(x) dx \\ \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(1) + f(n)) + \int_1^n H(x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Es wird $f(x) = \frac{1}{x^s} = x^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$ gewählt und in die Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{1}{x^s} dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^s} \right) - s \int_1^n \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \\ &= -\frac{1}{(s-1)n^{s-1}} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^s} \right) - s \int_1^n \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \end{aligned}$$

Wählt man jetzt $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ und führt den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so ergibt sich:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx. \quad (1.1)$$

Bei genauerer Betrachtung dieses Ausdrucks stellt man fest, dass er sogar für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$ definiert ist. Es gilt $|H(x)| < \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$, daher konvergiert das Integral für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$. Der restliche Ausdruck ist für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert.

Dieser Ausdruck entspricht also der meromorphen Fortsetzung der Riemannsches Zetafunktion in die Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$.

1.2.3 Fortsetzung auf \mathbb{C}

Um eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} zu erhalten, wird hier ähnlich vorgegangen, wie in Riemanns Arbeit (siehe [21]). Die Vorgehensweise orientiert sich insbesondere an [10, 19], in denen Riemanns Arbeit analysiert wird.

Die Herleitung des Ausdrucks für die meromorphe Fortsetzung basiert auf den Eigenschaften der durch

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ definierten Gammafunktion. Die Substitution $t \rightarrow n\tau$ führt auf

$$\Gamma(s) = n^s \int_0^\infty e^{-n\tau} \tau^{s-1} d\tau$$

bzw.

$$\frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-n\tau} \tau^{s-1} d\tau.$$

Wird jetzt über alle $n \in \mathbb{N}$ summiert und gleichzeitig $\operatorname{Re}(s) > 1$ angenommen, so erhält man

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n\tau} \tau^{s-1} d\tau.$$

Es sollen jetzt Summation und Integration auf der rechten Seite der Gleichung vertauscht werden. Dass dies zulässig ist, muss jedoch zuerst begründet werden.

Behauptung. Es gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-kt} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} t^{s-1} dt,$$

und beide Ausdrücke sind endlich.

Beweis. Seien $0 < a \leq 1 \leq b < +\infty$, $C = 1/(1 - e^{-t})$ und $x = \operatorname{Re}(s) - 1$ also $s > 0$.

Es gilt $e^{-t} \leq 1 - t/C$ für alle $t \in [0, 1]$, da für $t = 0$ und $t = 1$ gilt und die linke Seite auf $(0, 1)$ konvex ist, die zugehörige Kurve liegt also unter der der rechten Seite entsprechenden Geraden. Man erhält somit $1 - e^{-t} \geq t/C$ und außerdem

$$\frac{t^x}{1 - e^{-t}} \leq Ct^{x-1} \quad \forall t \in [a, 1].$$

Wählt man nun $m \in \mathbb{N}$ und substituiert $s = mt$, so erhält man

$$\int_a^1 e^{-mt} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} dt \leq \int_a^1 e^{-mt} Ct^{x-1} dt = \frac{C}{m^x} \int_{ma}^m e^{-s} s^{x-1} ds \leq \frac{C\Gamma(x)}{m^x}$$

und wegen $1/(1 - e^{-t}) \leq C$ für alle $t \in [1, b]$

$$\int_1^b e^{-mt} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} dt \leq C \int_1^b e^{-mt} t^x dt = \frac{C}{m^{x+1}} \int_m^{mb} e^{-s} s^x dx \leq \frac{C\Gamma(x+1)}{m^{x+1}}.$$

Es gilt für alle $t \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} = \frac{1}{1 - e^{-t}} - 1 = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$$

sowie $|t^{z-1}| = t^x$. Daraus folgt

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} t^{z-1} \right| dt = \int_a^b e^{-t} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} dt \leq C\Gamma(x) + C\Gamma(x+1)$$

unabhängig von a und b , die Grenzübergänge $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow +\infty$ können nacheinander durchgeführt werden, sodass das uneigentliche Integral auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung sogar absolut konvergiert. Ebenso konvergiert $\int_0^{+\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt$ für alle $k \in \mathbb{N}$ absolut.

Mit $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt - \sum_{k=1}^n \int_a^b e^{-kt} t^{z-1} dt \right| &= \left| \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt \right| \leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kt} t^x dt \\ &= \int_a^b e^{-(n+1)t} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-lt} t^x dt = \int_a^b e^{-(n+1)t} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} dt \leq \frac{C\Gamma(x)}{(n+1)^x} + \frac{C\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}} \end{aligned}$$

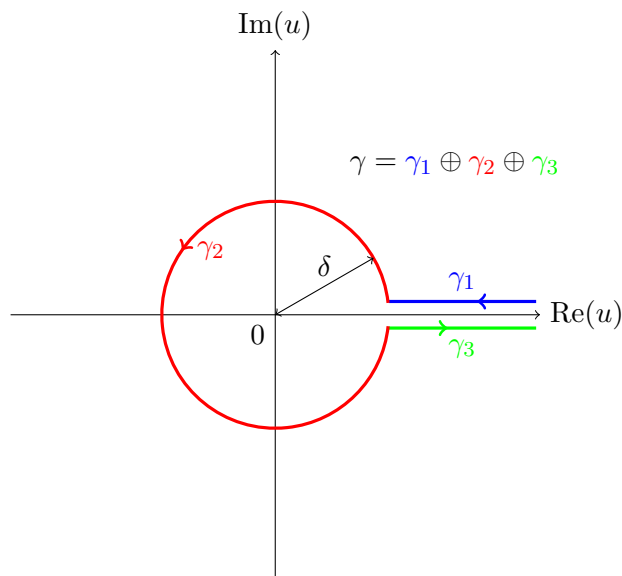


Abbildung 1.1: Integrationsweg γ zu Gleichung (1.3).

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} t^{z-1} dt,$$

was genau der Behauptung entspricht.

Man erhält also durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} (e^{\tau} - 1)^{-1} \tau^{s-1} d\tau \tag{1.2}$$

für $\text{Re}(s) > 1$. Dieses Resultat wurde bereits von Riemann in [21] angegeben.

Es soll nun das auf der rechten Seite der Gleichung stehende Integral ausgewertet werden. Für $\tau \gg 0$ gilt $(e^{\tau} - 1)^{-1} \approx e^{-\tau}$ (da $\tau \gg 0 \implies e^{\tau} \gg 1$), für $\tau \ll 1$ hingegen gilt $(e^{\tau} - 1)^{-1} \approx t^{-1}$ (Näherung durch Taylorpolynom 1. Grades an der Stelle $\tau = 0$). Der Integrand weist bei $\tau = 0$ eine Singularität auf.

Aus diesen Gründen hat Riemann stattdessen das Integral

$$I(s) = \int_{\gamma} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u} \tag{1.3}$$

ausgewertet, wobei γ den Weg in Abb. 1.1 bezeichnet: Es wird von ∞ entlang der reellen Achse bis $\delta > 0$ (γ_1) integriert, anschließend über den Kreis mit Radius δ und dem Ursprung als Mittelpunkt (γ_2) und schließlich wieder entlang der reellen Achse nach ∞ (γ_3). Es gilt also $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

Das Integral kann also wie folgt in Teilintegrale aufgespalten werden:

$$I(s) = \int_{\gamma_1} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u} + \int_{\gamma_2} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u} + \int_{\gamma_3} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u}.$$

Für das erste und das letzte Integral wird die Schreibweise $(-u)^s = e^{s \log(-u)}$ verwendet, wobei \log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet, der auf $\mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} : \arg(s) = \pi\}$ definiert ist. Es werden für die Wege γ_1 und γ_3 folgende Parametrisierungen verwendet:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= te^{i\varepsilon}, \quad t \in (\infty, \delta] \\ \gamma_3(t) &= te^{i(2\pi-\varepsilon)}, \quad t \in [\delta, \infty).\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ stellt hier einen sehr kleinen Winkel dar, der im Folgenden vernachlässigt wird und andeuten soll, dass γ_1 sich leicht „über“ und γ_3 sich leicht „unter“ der reellen Achse befindet. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erlaubt es außerdem, γ_2 als den im mathematischen Sinne positiv durchlaufenen Kreis mit Radius δ und Zentrum im Ursprung anzusehen.

Für den Hauptzweig des Logarithmus gilt für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} : \arg(s) = \pi\}$

$$\log(s) = \ln |s| + i \cdot \arg(s).$$

Man erhält schließlich

$$I(s) = \int_{\infty}^{\delta} (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t) - i\pi)} \frac{dt}{t} + \int_{\partial K_{\delta}(0)} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u} + \int_{\delta}^{\infty} (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t) + i\pi)} \frac{dt}{t},$$

wobei $K_{\delta}(0)$ für die Kreisscheibe mit Zentrum $u_0 = 0$ und Radius δ steht und $\partial K_{\delta}(0)$ ihren im mathematisch positiven Sinn orientierten Rand bezeichnet. Das Integral konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$, $I(s)$ ist eine ganze Funktion.

Aufgrund des Wegdeformationssatzes kann $\delta > 0$ frei gewählt werden, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Es muss die Art der Singularität im Ursprung abhängig von s untersucht werden. Es gilt

$$\lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1)^{-1} \frac{(-u)^s}{u} \in \mathbb{C} \quad \text{für } s \in \mathbb{N}, s \geq 2,$$

in diesem Fall ist die Singularität hebbar, das Integral muss also verschwinden, da sich bei ganzzahligem s die Integrale über γ_1 und γ_2 wegheben und somit nur das Integral um γ_2 , d.h. um den Kreis mit Radius δ und Mittelpunkt im Ursprung, übrig bleibt.

Es muss nun das Integral über $\partial K_{\delta}(0)$ näher untersucht werden. Es gilt $s \in \partial K_{\delta}(0) \iff |s| = \delta$. Mit der Substitution $u = \delta e^{i\theta}$, $du = i\delta e^{i\theta} d\theta$, $\frac{du}{u} = i d\theta$ erhält man

$$\int_{\partial K_{\delta}(0)} (e^u - 1)^{-1} (-u)^s \frac{du}{u} = \int_0^{2\pi} (e^{\delta e^{i\theta}} - 1)^{-1} (-1)^s \delta^s e^{is\theta} i d\theta.$$

Für das Integral soll nun gezeigt werden, dass es für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0 geht. Dafür wird eine obere Schranke für das Integral bestimmt, die dieses Verhalten beim Grenzübergang zeigt.

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{2\pi} (e^{\delta e^{i\theta}} - 1)^{-1} (-1)^s \delta^s e^{is\theta} i d\theta \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| (e^{\delta e^{i\theta}} - 1)^{-1} (-1)^s \delta^s e^{is\theta} i \right| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\delta e^{i\theta}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1} \right| |\delta^{s-1}| |e^{i\theta(s-1)}| d\theta\end{aligned}$$

Es wird nun das Verhalten der einzelnen Terme für $\delta \rightarrow 0$ untersucht:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta e^{i\theta}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{e^u - 1} \quad \text{mit } u = \delta e^{i\theta} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1 + u + u^2/2 + O(u^3) - 1} \quad (\text{Reihenentwicklung}) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u + u^2/2 + O(u^3)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{1 + u/2 + O(u^2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| e^{i\theta(s-1)} \right| &= \left| e^{i\theta(\operatorname{Re}(s)-1+i\operatorname{Im}(s))} \right| \\ &= \left| e^{-\theta \operatorname{Im}(s)} \right| < \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}, \theta \in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den letzten zu analysierenden Term

$$\begin{aligned} |\delta^{s-1}| &= \left| e^{(s-1)\ln(\delta)} \right| \\ &= \left| e^{(\operatorname{Re}(s)+i\operatorname{Im}(s))\ln(\delta)} \delta^{-1} \right| \\ &= \delta^{\operatorname{Re}(s)-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Integral für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0 geht, vorausgesetzt $\operatorname{Re}(s) > 1$. Der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ liefert also

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_{\infty}^0 (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t)-i\pi)} \frac{dt}{t} + \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t)+i\pi)} \frac{dt}{t} \\ &= - \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t)-i\pi)} \frac{dt}{t} + \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} e^{s(\ln(t)+i\pi)} \frac{dt}{t} \\ &= (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{s-1} dt \\ &= 2i \sin(\pi s) \zeta(s) \Gamma(s). \end{aligned}$$

Für die Herleitung dieses Ergebnisses musste man nur $\operatorname{Re}(s) > 1$ fordern. Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, wird folgende für die Gammafunktion gültige Beziehung

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

(entnommen aus [12]) benötigt. Einsetzen in den eben hergeleiteten Ausdruck ergibt

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s). \quad (1.4)$$

Im Grunde genommen gilt immer noch die bei der Herleitung benötigte Forderung $\operatorname{Re}(s) > 1$, aber der Definitionsbereich der rechten Seite ist möglicherweise größer: $\Gamma(1-s)$ besitzt einfache Polstellen bei $s = 1, 2, 3, \dots$ während $I(s)$ die Nullstellen $s = 2, 3, \dots$ hat. Die rechte Seite der Gleichung besitzt höchstens einen einfachen Pol bei $s = 1$ und ist sonst holomorph.

Um die Singularität bei $s = 1$ zu charakterisieren, wird folgender Ausdruck berechnet:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s)$$

Anwenden der Grenzwertsätze liefert

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s) &= \frac{I(1)}{2\pi i} \lim_{s \rightarrow 1} -(1-s)\Gamma(1-s) \\ &\text{[Substitution } w = 1-s\text{]} \\ &= -\frac{I(1)}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow 0} w\Gamma(w) \\ &= -\frac{I(1)}{2\pi i} \text{Res}(\Gamma(s), 0) \end{aligned}$$

Den Wert des Residuums der Gammafunktion in $s_0 = 0$ ist laut [12] gleich -1 , daraus folgt

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s) = -\frac{I(1)}{2\pi i}.$$

Das Argument von I ist ganzzahlig, d.h. das erste und das dritte Teilintegral heben einander auf, es muss also nur noch über den Kreis mit Radius δ und Zentrum im Ursprung integriert werden. Dies wird mit Hilfe des Residuensatzes gemacht, man erhält

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s) &= -\lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1)^{-1}(-u) \\ &= 1, \end{aligned}$$

wie man z.B. durch Auswertung des Grenzwerts mit dem Satz von de l'Hôpital zeigen kann. Der hergeleitete Ausdruck ist also die meromorphe Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion auf ganz \mathbb{C} . Die Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sie besitzt einen Pol an der Stelle $s = 1$ mit Residuum 1.

1.3 Auswertung der Zetafunktion für bestimmte $s \in \mathbb{C}$

Will man nun die Funktion an einer bestimmten Stelle $s_0 \in \mathbb{C}$ auswerten, so muss eine Reihe mit i.A. komplexen Gliedern ausgewertet werden, was einen gewissen Aufwand darstellen kann. Dieser Abschnitt soll zeigen, dass für bestimmte Argumente die Berechnung des Funktionswerts stark vereinfacht werden kann. Dies gilt insbesondere für ganzzahlige, gerade Zahlen.

1.3.1 Formel für $\zeta(2n), n \in \mathbb{N}$

Dieser Abschnitt orientiert sich an den Darstellungen in [16]. Es wird eine Formel für $\zeta(2n)$ hergeleitet, die eine exakte Berechnung der Funktionswerte an diesen Stellen ermöglicht. Bei der Herleitung werden Bernoulli-Polynome verwendet, die zu beweisende Formel enthält Bernoulli-Zahlen als Faktor.

Zunächst soll der Wert der Reihe

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k}, \quad \varphi \in (0; 2\pi)$$

bestimmt werden. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf allen Intervallen $[\delta; 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < \pi$ wird mit Hilfe des Dirichlet-Kriteriums gezeigt:

- Für alle $\varphi \in (0; 2\pi)$ ist $\{f_k\} = \{1/k\}$ monoton fallend.

- $\{f_k\}$ konvergiert gleichmäßig auf $\varphi \in (0; 2\pi)$ gegen 0.
- $\|\sum_{k=1}^n a_k\| = \|\sum_{k=1}^n e^{ik\varphi}\|$ ist beschränkt bezüglich der Supremumsnorm, da gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\varphi} \right| &= \left| \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \\ &= \frac{1}{|e^{ix/2}|} \frac{|e^{inx} - 1|}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} \\ &\leq \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} \\ &\leq \frac{2}{\sin(\delta/2)} < \infty \quad \text{wegen } 0 < \delta < \pi \end{aligned}$$

Es wird nun folgender Satz verwendet:

Satz (Abelscher Grenzwertsatz). *Sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für die positive Zahl $x = R$ konvergent. Dann konvergiert sie gleichmäßig auf $[0; R]$ und definiert dort eine stetige Funktion.*

Der Beweis dieses Satzes basiert auf dem Dirichlet-Kriterium, man verwendet die Aufspaltung $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k$ mit $a_k = c_k R^k$ und $f_k(x) = (x/R)^k$.

Zur Berechnung von $f(\varphi)$ wird nun das Abelsche Potenzreihenverfahren verwendet. Sei

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k} x^k.$$

Für $x = 1$ erhält man genau jene Reihe, deren Wert berechnet werden soll, die Konvergenz wurde bereits gezeigt. Mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes folgt daraus, dass F stetig auf $[0; 1]$ ist. Darüber hinaus ist F auf $[0; 1)$ differenzierbar. Man erhält

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\varphi} x^{k-1}.$$

Für $x \in [0; 1)$ gilt $x^{k-1} < 1$ und damit $|e^{ik\varphi} x^{k-1}| < 1$, daraus folgt durch Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{i\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{i\varphi} x)^{k-1} \\ &= e^{i\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\varphi} x)^k \\ &= \frac{e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi} x}. \end{aligned}$$

$F(x)$ kann nun mittels Integration berechnet werden. Wegen $F(0) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{e^{i\varphi} - \xi}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2} d\xi \\ &= \int_0^x \frac{\cos(\varphi) - \xi}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2} d\xi + i \int_0^x \frac{\sin(\varphi)}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{d}{d\xi} (\ln(1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2)) = \frac{2\xi - 2 \cos(\varphi)}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\arctan \left(\frac{\xi \sin(\varphi)}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2} \right) \right) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi \sin(\varphi)}{1 - \xi \cos(\varphi)} \right)^2} \frac{\sin(\varphi)(1 - \xi \cos(\varphi)) + \cos(\varphi)\xi \sin(\varphi)}{(1 - \xi \cos(\varphi))^2} \\ &= \frac{\sin(\varphi)}{(1 - \xi \cos(\varphi))^2 + \xi^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= \frac{\sin(\varphi)}{1 - 2 \cos(\varphi)\xi + \xi^2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2 \cos(\varphi)x + x^2) + i \arctan \left(\frac{x \sin(\varphi)}{1 - 2 \cos(\varphi)x + x^2} \right).$$

F ist wie schon vorher gezeigt stetig auf $[0; 1]$. Für $x = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k} = -\frac{1}{2} \ln(2(1 - \cos(\varphi))) + i \arctan \left(\frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2 \sin(\varphi/2)) + i \frac{\pi - \varphi}{2}. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Umformungen

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\varphi) &= \cos^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2) - \cos^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2) \\ &= 2 \sin^2(\varphi/2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)} &= \frac{2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{2 \sin^2(\varphi/2)} \\ &= \frac{\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \\ &= \frac{\sin(\pi/2 - \varphi/2)}{\cos(\pi/2 - \varphi/2)} \\ &= \tan(\pi/2 - \varphi/2) \end{aligned}$$

verwendet.

Die Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt schließlich

$$\operatorname{Re}(F(1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\varphi)}{k} = -\ln(2 \sin(\varphi/2)) \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Im}(F(1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{k} = \frac{\pi - \varphi}{2}. \quad (1.6)$$

Sei nun h_m eine Verallgemeinerung von F

$$h_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^m}$$

mit $m \in \mathbb{N}$. Für $m > 1$ ist jeder Summand beschränkt und die Reihe der Normen (es wird die Supremumsnorm verwendet) konvergiert, da gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^m} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \right\|.$$

h_m ist daher für $m > 1$ normal konvergent. Für $m > 2$ ist h_m auf $(0; 1)$ differenzierbar. Sei nun $m > 2$:

$$h'_m = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^m} = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^{m-1}} = ih_{m-1}$$

h_2 ist stetig auf \mathbb{R} und in $(0; 1)$ differenzierbar, da h_1 auf jedem kompakten Teilintervall gleichmäßig konvergiert. Für h_m gilt allgemein

$$\int_0^{2\pi} h_m(x) dx = \frac{1}{i} (h_{m+1}(2\pi) - h_{m+1}(0)) = 0. \tag{1.7}$$

Es werden nun ausgehend von diesen Überlegungen Funktionen b_m wie folgt definiert:

$$b_m(x) = 2(-1)^m \frac{m!}{(2\pi)^m} \operatorname{Im} (i^{m-1} h_m(2\pi x))$$

Berechnet man nun b_1 unter Verwendung von $h_1(x) = F(1)|_{\varphi=x}$ und (1.6), so erhält man

$$b_1(x) = \frac{-2}{2\pi} \operatorname{Im} (h_1(2\pi x)) = -\frac{1}{\pi} \frac{\pi - 2\pi x}{2} = x - \frac{1}{2}.$$

Es handelt sich dabei um das 1. Bernoulli-Polynom.

Die Differenzierbarkeit von b_m ergibt sich unmittelbar aus jener von h_m , es gilt daher

$$\begin{aligned} b'_m(x) &= 2(-1)^m \frac{m!}{(2\pi)^m} \operatorname{Im} (i^m h_{m-1}(2\pi x) 2\pi) \\ &= 2(-1)^m \frac{m!}{(2\pi)^{m-1}} \operatorname{Im} (i^{m-2} (-1) h_{m-1}(2\pi x)) \\ &= m \left(2(-1)^{m+1} \frac{(m-1)!}{(2\pi)^{m-1}} \operatorname{Im} (i^{m-2} (-1) h_{m-1}(2\pi x)) \right) \\ &= m \left(2(-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(2\pi)^{m-1}} \operatorname{Im} (i^{m-2} (-1) h_{m-1}(2\pi x)) \right) \\ &= m b_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen (1.7)

$$\int_0^1 b_m(x) dx = \frac{1}{k} (b_m(1) - b_m(0)) = 0.$$

Aufgrund der Charakteristika der Bernoulli-Polynome (entnommen aus [16, S. 291]) stimmen die b_m auf $[0; 1]$ mit den Bernoulli-Polynomen B_m überein. Wegen

$$h_m(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} = \zeta(m)$$

gilt für $m \geq 2$

$$B_m(0) = 2(-1)^m \frac{m!}{(2\pi)^m} \operatorname{Im} (i^{m-1} \zeta(m)).$$

$B_m(0) = B_m$ sind die sogenannten Bernoullizahlen. Für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ gilt $\zeta(m) \in \mathbb{R}$. Ist nun m ungerade, so gilt $i^{m-1} \in \mathbb{R}$, daraus folgt

$$\operatorname{Im}(i^{m-1}\zeta(m)) = 0 \quad \text{für } m \text{ ungerade.}$$

Sei nun m gerade, also $m = 2n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= 2(-1)^{2n} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \operatorname{Im}(i^{2n-1}\zeta(2n)) \\ &= 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \operatorname{Im}(i(-1)^{n-1}\zeta(2n)) \\ &= 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} (-1)^{n-1} \zeta(2n) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \tag{1.8}$$

Es gilt (entnommen aus [16, S. 289])

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

daraus erhält man mit (1.8)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

1.3.2 Fourierreihen

Einige Werte der Riemannsches Zetafunktion können unter Zuhilfenahme von Fourier-Reihen einfach berechnet werden.

Eine periodische Funktion mit der Periode T kann mit Hilfe der sogenannten Analysegleichung

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} dx \tag{1.9}$$

in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, die c_k werden Fourier-Koeffizienten genannt. Die Funktion f ergibt sich dann als Fourier-Reihe aufgeschrieben zu

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{T} x}. \tag{1.10}$$

Die Funktionen $e^{ik \frac{2\pi}{T} x}$ spannen einen Funktionenraum, genauer einen Hilbertraum, auf mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

und der dadurch induzierten Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{f(x)} dx},$$

wobei \bar{f} die zu f konjugiert komplexe Größe bezeichnet. Es gelten die sogenannten Orthogonalitätsrelationen zwischen den Basisfunktionen

$$\langle e^{ik\frac{2\pi}{T}x}, e^{il\frac{2\pi}{T}x} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\frac{2\pi}{T}x} e^{-il\frac{2\pi}{T}x} dx = \delta_{kl},$$

δ_{kl} ist dabei das Kronecker-Symbol. Die Funktionen $e^{ik\frac{2\pi}{T}x}$ bilden daher ein Orthonormalsystem. Die Koeffizienten der Fourier-Reihe berechnen sich also durch Projektion der zu entwickelnden Funktion f auf die Basisfunktionen.

Für Fourier-Reihen gilt die Parseval-Gleichung, die in ähnlicher Form allgemein in Hilberträumen gültig ist:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (1.11)$$

Diese Fourier-Reihen-Darstellung gilt für T -periodische, komplexwertige Funktionen f . Ist f reellwertig, so kann diese Darstellung modifiziert werden. Es gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{T}x} dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(x) \cos\left(-k\frac{2\pi}{T}x\right) dx + i \int_0^T f(x) \sin\left(-k\frac{2\pi}{T}x\right) dx \right).$$

Ist f reellwertig, so entspricht diese Aufspaltung einer Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Reelle Zahlen sind invariant gegenüber komplexer Konjugation, daher gilt für reellwertiges f

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{T}x}} dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(x) \cos\left(-k\frac{2\pi}{T}x\right) dx - i \int_0^T f(x) \sin\left(-k\frac{2\pi}{T}x\right) dx \right) = \overline{c_k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} + \overline{c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x}} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\left(c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x}\right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(c_k) \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Im}(c_k) \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) \quad (1.12)$$

mit

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k).$$

Die Koeffizienten a_k und b_k berechnen sich zu

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) dx.$$

Die Parseval-Gleichung (1.11) lautet mit den Koeffizienten a_k und b_k

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2). \quad (1.13)$$

Bisher wurde als Integrationsintervall $[0; T]$ gewählt, aufgrund der Periodizität von f ist aber jedes Intervall der Länge T zulässig. Laut Gleichung (1.6) gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Vergleicht man nun die linke Seite dieser Gleichung mit der allgemeinen Darstellung von Fourierreihen reeller Funktionen (1.12), so erhält man für die Koeffizienten

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k}, \quad T = 2\pi.$$

Einsetzen in die Parseval-Gleichung (1.13) ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\pi^2 - 2\pi x + x^2) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{1}{3} x^3\right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(2\pi^3 - 4\pi x^3 + \frac{8}{3} \pi^3\right) \\ &= \pi^2 \left(\frac{3}{6} - \frac{6}{6} + \frac{4}{6}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Es gibt jedoch auch eine andere auf der Theorie der Fourier-Reihenentwicklung basierende Methode um dieses Ergebnis herzuleiten. Dabei wird so vorgegangen wie in Bsp. A5.10 aus dem Übungsskriptum zu [20]. Außerdem lässt sich diese Methode noch verallgemeinern, man erhält schließlich eine einfache Berechnungsmethode für alle $\zeta(2n), n \in \mathbb{N}$.

Sei f eine 2π -periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi; \pi]$ durch

$$f(x) = x^2$$

definiert ist. Die mit Hilfe von Gleichung (1.9) berechneten Fourierkoeffizienten lauten

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^2}{3}$$

und

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{ikx} dx.$$

Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{ikx} &= \begin{bmatrix} u' = e^{ikx} & v = x' \\ u = \frac{1}{ik} e^{ikx} & v' = 2x \end{bmatrix} = \frac{x^2}{ik} e^{ikx} - \frac{1}{ik} \int 2x e^{ikx} dx \\ &= \begin{bmatrix} g' = e^{ikx} & h = 2x \\ g = \frac{1}{ik} e^{ikx} & h' = 2 \end{bmatrix} = \frac{x^2}{ik} e^{ikx} + \frac{1}{k^2} 2x e^{ikx} - \frac{2}{k^2} e^{ikx} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2}{ik} e^{ikx} + \frac{1}{k^2} 2x e^{ikx} - \frac{2}{k^2} e^{ikx} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{ik} (-1)^k + \frac{2\pi}{k^2} (-1)^k - \frac{2}{k^2} (-1)^k - \frac{\pi^2}{ik} (-1)^k + \frac{2\pi}{k^2} (-1)^k + \frac{2}{k^2} (-1)^k \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k \\ &= \frac{2}{k^2} (-1)^k \end{aligned}$$

Daraus folgt für $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k \cos(kx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx) \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (-1)^k \cos(kx) = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right).$$

Für $x = \pi$ ergibt sich speziell

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{1}{4} \frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

wegen

$$(-1)^k \cos(k\pi) = (-1)^k (-1)^k = (-1)^{2k} = 1.$$

Wendet man nun die selbe Methode auf 2π -periodische Funktion g an, die für $-\pi \leq x \leq \pi$ durch

$$g(x) = x^4$$

definiert ist, so erhält man für die Koeffizienten der Fourierreihe

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}$$

und

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 e^{ikx} dx = \frac{4\pi k (\pi^2 k^2 - 6) \cos(\pi k) + (\pi^4 k^4 - 12\pi^2 k^2 + 24) \sin(\pi k)}{\pi k^5}.$$

Da k ganzzahlig ist, gilt $\cos(\pi k) = (-1)^k$ und $\sin(\pi k) = 0$, daraus ergibt sich

$$c_k = \frac{4\pi k (\pi^2 k^2 - 6) (-1)^k}{\pi k^5} = \frac{4 (\pi^2 k^2 - 6) (-1)^k}{k^4}.$$

Damit erhält man für $-\pi \leq x \leq \pi$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (-1)^k \cos(kx) - 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} (-1)^k \cos(kx)$$

und speziell mit $x = \pi$ und unter Verwendung von $\zeta(2) = \pi^2/6$

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + \frac{4\pi^4}{3} - 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Umformen ergibt schließlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \zeta(4) = \frac{1}{48} \left(\frac{4\pi^4}{3} - \frac{4\pi^4}{5} \right) = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi}{60} = \frac{5\pi^4}{180} - \frac{3\pi^4}{180} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als könnte mit dieser Methode auch $\zeta(3)$ berechnet werden. Sei nun h die 2π -periodische Funktion, die auf $[-\pi; \pi]$ durch

$$h(x) = x^3$$

definiert ist. Berechnet man nun die Fourierkoeffizienten, so erhält man

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 dx = 0$$

und

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^3}{ik} e^{ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{ikx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^3}{ik} e^{ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{ik} \frac{2}{k^2} (-1)^k \right) \\ &= \frac{\pi^2}{ik} e^{ik\pi} - \frac{3}{ik} \frac{2}{k^2} (-1)^k \\ &= \frac{(-1)^k}{ik} \left(\pi^2 - \frac{6}{k^2} \right) \\ &= i \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} (\pi^2 k^2 - 6). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\begin{aligned} x^3 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \\ &= 0 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} (\pi^2 k^2 - 6) \sin(kx) \\ &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin(kx) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{k} \sin(kx). \end{aligned}$$

Jetzt muss durch geeignete Wahl von x der Ausdruck für $\zeta(3)$ in der Gleichung erzeugt werden. Gesucht ist also $x \in \mathbb{R}$ sodass gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3),$$

also

$$\sin(kx) = (-1)^{k+1}.$$

Es gilt

$$\sin(1 \cdot x) = 1 \quad \implies \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l_1, \quad l_1 \in \mathbb{N}$$

und

$$\sin(2 \cdot x) = -1 \quad \implies \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l_2, \quad l_2 \in \mathbb{N}.$$

Zieht man jetzt die 2. Gleichung zwei Mal von der 1. Gleichung ab, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3\pi}{2} + 2\pi l_2 - 4\pi l_1 \\ 3 &= 4(l_2 - 2l_1) \end{aligned}$$

also ein Widerspruch, da $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ gefordert wurde.

Versucht man diese Methode anzuwenden, um $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ auszuwerten, so schlägt dies aufgrund der $\sin(kx)$ -Terme fehl. x^{2n+1} ist eine ungerade Funktion, daher besteht die Fourierreihe ausschließlich aus solchen $\sin(kx)$ -Termen. Bei der Berechnung der Fourierreihe von x^{2n} , $n \in \mathbb{N}$ hingegen sind alle $\sin(kx)$ -Terme gleich Null, da es sich hier um gerade Funktionen handelt. Die $\cos(kx)$ -Terme stellen wegen $\cos(k\pi) = (-1)^k$ kein Problem dar.

Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass mit dieser Methode $\zeta(2n)$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ berechnet werden kann. Es existiert tatsächlich eine allgemeine Methode zur Berechnung von $\zeta(2n)$, dazu wird die in [26] angegebene Darstellung der Fourierreihe der auf dem Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ durch x^{2n} definierten 2π -periodische Funktion

$$x^{2n} = \frac{\pi^{2n}}{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi^{2n}}{2n+1} {}_1F_2 \left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}k\pi^2 \right) \cos(kx)$$

verwendet, wobei ${}_1F_2(a, b, c, z)$ eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist. Für ein bestimmtes n setzt man ausgehend von dieser Darstellung $x = \pi$ und formt auf $\zeta(2n)$ um. In [26] sind außerdem weitere Methoden zur Berechnung von $\zeta(2)$ angegeben.

Kapitel 2

Bedeutung der Zetafunktion in der Mathematik und in der Physik

Die Riemannsche Zetafunktion findet häufig in der Zahlentheorie Verwendung, da sie bei der Analyse der Verteilung von Primzahlen nützlich ist. Auch in der Quantenmechanik spielt die Funktion eine Rolle, beispielsweise bei der quantenmechanischen Analyse des harmonischen Oszillators.

2.1 Zahlentheorie

Es wird die Reihendarstellung der Riemannschen Zetafunktion verwendet, die für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ definiert ist. Die Verbindung zur Zahlentheorie wird durch Umformung dieser Reihendarstellung deutlich. Es wird dabei wie in [9, 19] beschrieben vorgegangen.

Sei \mathbb{P} die Menge aller Primzahlen. Bekanntlich lässt sich jede natürliche Zahl n_0 eindeutig in Primfaktoren zerlegen, d.h. jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ist als

$$n_0 = \prod_{p_i \in \mathbb{P}} p_i^{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0$$

mit eindeutig bestimmten k_i angebar. Sei nun p_k eine Primzahl. Aus der Gültigkeit der Summationsformel für die geometrische Reihe folgt

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms}.$$

Die Formel kann angewendet werden, da wegen $p_k > 1$ und $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt $|p_k^{-s}| < 1$. Wird nun das Produkt der Terme der $(1 - p_k^{-s})^{-1}$, $1 \leq k \leq N$ gebildet und für jeden Term die eben gezeigte Beziehung angewendet, so folgt aus dem Distributivitätsgesetz

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{j=1}^{\infty} n_{N,j}^{-s},$$

wobei die $n_{N,j}$ jene ganzen Zahlen sind, die als Produkt von den Primzahlen p_k , $1 \leq k \leq N$ dargestellt werden können. Mit $N \rightarrow \infty$ erhält man nun aufgrund Tatsache, dass jede natürliche Zahl eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \quad (2.1)$$

Diese für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ gültige Beziehung wurde von Euler entdeckt und von Riemann in [21] erwähnt.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion es einem ermöglichen, den Primzahlsatz nachzuweisen. Dieser Satz trifft eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Funktion

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P}, p \leq x\}.$$

Sie gibt die Anzahl der Primzahlen an, die kleiner gleich x sind.

Dazu wird die logarithmische Ableitung der Zetafunktion betrachtet. Es wird dabei wie in [12] vorgegangen. Aus (2.1) folgt

$$\log(\zeta(s)) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - p^{-s})$$

Durch gliedweises Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\log(\zeta(s))) &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \frac{d}{ds} (1 - e^{-s \log(p)}) \\ &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \log(p) p^{-s} \\ &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu s} \log(p) \quad (\text{geometrische Reihe}) \\ &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \end{aligned}$$

Es gilt $|p^{-\nu s}| = p^{-\nu \operatorname{Re}(s)}$ und $\nu \geq 1, \operatorname{Re}(s) > 1$, die Reihe ist daher absolut konvergent. Man kann sie daher auch anschreiben als

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \quad \text{mit} \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{falls } n = p^\nu, p \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$\Lambda(n)$ wird Mangoldt'sche Funktion genannt. Zusätzlich benötigt werden die durch

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

definierte Tschebyscheff-Funktion sowie die Tschebyscheff'sche Thetafunktion

$$\Theta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p).$$

Man will nun zeigen, dass $\Psi(x) = \Theta(x) + O(\log(x)\sqrt{x})$ gilt. Schätzt man die Terme $\log(p)$ durch $\log(x)$ ab, braucht man nur noch die Anzahl M der Zahlenpaare (ν, p) abschätzen, sodass gilt $2 \leq \nu$ und $p^\nu \leq x$:

$$p^\nu \leq x \quad \implies \quad p \leq \sqrt[\nu]{x} \quad \implies \quad \nu \leq \frac{\log(x)}{\log(p)} \leq \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

und daher, unter Berücksichtigung von $\pi(x) \leq x$,

$$\begin{aligned} M &\leq \sum_{2 \leq \nu \leq \frac{\log(x)}{\log(2)}} \sqrt[\nu]{x} = \sqrt{x} + \sum_{3 \leq \nu \leq \frac{\log(x)}{\log(2)}} \sqrt[\nu]{x} \\ &\leq \sqrt{x} + \frac{\log(x)}{\log(2)} \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Es gilt $\log(x) = O(x^\varepsilon) \forall \varepsilon > 0$, daraus folgt

$$\frac{\log(x)}{\log(2)} \sqrt[3]{x} = O(\sqrt{x}),$$

was direkt auf die zu beweisende Behauptung führt.

Für den Beweis des Primzahlsatzes wird folgender Satz, entnommen aus [12, S. 448], benötigt:

Satz (Taubersatz). *Gegeben sei eine Folge $a_1, a_2, a_3 \dots$ nichtnegativer reeller Zahlen, so dass die Dirichletreihe*

$$D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 1$ konvergiert. Es gelte:

- I. Die Funktion $s \mapsto (s-1)D(s)$ lässt sich auf eine offene Menge, welche die abgeschlossene Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq 1\}$ enthält, analytisch fortsetzen, D hat bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\rho = \operatorname{Res}(D; 1).$$

- II. Es mögen folgende Abschätzungen gelten: Es existieren Konstanten C, κ mit der Eigenschaft

$$|D(s)| \leq C|t|^\kappa \quad \text{und} \quad |D'(s)| \leq C|t|^\kappa \quad \text{für} \quad \sigma > 1, |t| \geq 1.$$

Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} a_n = \rho x(1 + r(x))$$

$$\text{mit } r(x) = O(1/\sqrt[N]{\log(x)}), \quad N = N(\kappa) \in \mathbb{N} \text{ geeignet}$$

(Man kann beispielsweise $N(\kappa) = 2^{[\kappa]+2}$ wählen)

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist es, zu zeigen, dass die Dirichletreihe

$$D(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$$

die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Die Riemannsche Zetafunktion lässt sich auf eine offene Umgebung der Halbebene $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 1\}$ fortsetzen (siehe Abschnitt 1.2.2) und besitzt keine Nullstelle für $\operatorname{Re}(s) > 1$ (ergibt sich aus der Eulerschen Produktdarstellung). Es muss noch gezeigt werden, dass $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$ ebenfalls keine Nullstelle besitzt. Außerdem müssen die Riemannsche Zetafunktion und die erste sowie die zweite Ableitung abgeschätzt werden. Aus diesen Ergebnissen gehen dann auf die entsprechenden Eigenschaften von $D(s)$ hervor, die vom Satz gefordert werden.

Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $\operatorname{Re}(s) = 1$

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$. Es gilt

$$(a + \bar{a})^4 = a^4 + \bar{a}^4 + 4(a^2 + \bar{a}^2) + 6$$

und wegen $\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$:

$$\begin{aligned} 16(\operatorname{Re}(a + \bar{a}))^4 &= 2 \operatorname{Re}(a^4) + 8 \operatorname{Re}(a^2) + 6 \\ 8(\operatorname{Re}(a))^4 &= \operatorname{Re}(a^4) + 4 \operatorname{Re}(a^2) + 3 \geq 0. \end{aligned}$$

Mit $a = n^{-it/2}$ erhält man

$$\operatorname{Re}(n^{-2it}) + 4 \operatorname{Re}(n^{-it}) + 3 \geq 0.$$

Multiplikation mit $n^{-\sigma}$ und mit reellen, nichtnegativen b_n und anschließendes Summieren über alle $n \in \mathbb{N}$ ergeben, unter Verwendung der Notation

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

$$\operatorname{Re}(D(\sigma + 2it)) + 4 \operatorname{Re}(D(\sigma + it)) + 3D(\sigma) \geq 0.$$

Sei nun $Z(s) := e^{D(s)}$. Wegen $|e^{D(s)}| = e^{\operatorname{Re}(D(s))}$ bzw. $|e^{D(s)}|^n = e^{n \operatorname{Re}(D(s))}$ folgt aus der vorigen Ungleichung

$$|Z(\sigma + it)|^4 |Z(\sigma + 2it)| |Z(\sigma)|^3 \geq 1. \tag{2.2}$$

Sei jetzt

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{falls } n = p^\nu, p \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Daraus ergibt sich

$$D(s) = \sum_p \sum_\nu \frac{1}{\nu} p^{-\nu s}.$$

Es gilt

$$\log(1+x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1},$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} D(s) &= \sum_p -\log(1-p^{-s}) \\ e^{D(s)} &= \prod_p (1-p^{-s})^{-1} = Z(s) = \zeta(s). \end{aligned}$$

Einsetzen in (2.2) und durch $(\sigma - 1)$ dividieren ergibt

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(2\sigma + it)| (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^3 \geq (\sigma - 1)^{-1}.$$

Sei nun $t \neq 0$ und $\zeta(1 + it) = 0$.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(2\sigma + it)| (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^3 := L$$

$\zeta(\sigma)$ besitzt einen Pol 1. Ordnung bei $\sigma = 1$ und $\operatorname{Res}(\zeta(\sigma); 1) = 1$, daher gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^3 = 1.$$

Man erhält

$$L = |\zeta'(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + it)| < \infty.$$

Führt man jetzt den Grenzübergang für die linke Seite der Ungleichung durch, so führt dies wegen $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} (\sigma - 1)^{-1} = \infty$ zu einem Widerspruch, somit kann $\zeta(s)$ keine Nullstelle auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$ besitzen.

Man hat gezeigt, dass $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) \geq 1$, somit erfüllt $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ Punkt I. des Taubersatzes. Es brauchen also nur noch die vom Satz geforderten Abschätzungen gezeigt zu werden.

Abschätzung nach oben

Für $\sigma \geq 2$ gilt

$$|\zeta(2)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Für den Bereich $1 < \sigma < 2$ wird die in Abschnitt 1.2.2 hergeleitete Fortsetzung der Zetafunktion in die Halbebene $\text{Re}(s) > 0$ verwendet. In diesem Zusammenhang wurde bereits die Funktion

$$H(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

benötigt. Für $\text{Re}(s) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - sF(s) \quad \text{mit} \quad F(s) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx. \end{aligned}$$

$\zeta(s)$ ist offensichtlich beschränkt für $1 < \text{Re}(s) < 2$ (die Abschätzung wird ja für $|\text{Im}(s)| = |t| \geq 1$ gemacht, deswegen ist auch der Term $\frac{1}{s-1}$ beschränkt).

Die Beschränktheit von $|\zeta'(s)|$ lässt sich, da die ζ -Reihe gliedweise differenziert werden darf, für $\sigma \geq 2$ analog zu jener von $\zeta(s)$ in diesem Gebiet zeigen.

Für den Bereich $1 < \text{Re}(s) < 2$ wird wiederum die für $\text{Re}(s) > 0$ gültige Darstellung der Zetafunktion verwendet. Um die Beschränktheit der Ableitung zu untersuchen, genügt es den Term $sF(s)$ und seine Ableitungen zu untersuchen. Aufgrund der Produktregel entstehen durch das Ableiten Linearkombinationen von Termen der Form $F^{(\alpha)}(s)$ und $sF^{(\beta)}(s)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \\ \frac{d^m}{ds^m} F(s) &= \int_1^{\infty} (-\log(x))^m \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \end{aligned}$$

Es gilt $|\log(x)| \leq C'_m x^{\frac{1}{2m}}$ mit $|t| \geq 1$, C'_m geeignet. Zusammen mit $|H(x)| \leq 1$ ergibt dies

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^m}{ds^m} F(s) \right| &= \left| F^{(m)}(s) \right| \leq \int_1^{\infty} (C'_m)^m x^{1/2} x^{-1-1} dx \\ &\leq (C'_m)^m \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Abschätzung nach unten

Auch hier ist die Abschätzung für $\sigma > 2$ einfach:

$$\begin{aligned} |1 - \zeta(s)| + |\zeta(s)| &\geq |1 - \zeta(s) + \zeta(s)| = 1 && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ |\zeta(s)| &\geq 1 - |1 - \zeta(s)| \\ &= 1 - |\zeta(s) - 1| \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + 1 \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{6} > 0. \end{aligned}$$

Es muss noch der Bereich $1 < \sigma < 2$ betrachtet werden:

Es wurde bereits die Ungleichung (2.2)

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^3 \geq (\sigma - 1)^{-1}$$

für $\sigma > 1$ gezeigt, um zu beweisen, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der durch $\operatorname{Re}(s) = 1$ definierten Geraden besitzt. Durch Umformen der Ungleichung erhält man

$$|\zeta(s)| \geq (\sigma - 1)^{3/4} |\zeta(\sigma + 2it)|^{-1/4} (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^{-3/4}.$$

$\zeta(\sigma)(\sigma - 1)$ ist wegen $\zeta(\sigma) = \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} > 0$ und $\sigma - 1 > 0$ auf $(1, \infty)$ positiv. Außerdem gilt $\lim_{\sigma \rightarrow 1} (\sigma - 1)\zeta(\sigma) = 1$ (folgt unmittelbar aus (1.1)). Somit ist der Ausdruck auf $[1, 2]$ stetig und positiv, daher besitzt er aufgrund des Satzes von Weierstraß eine positive untere Schranke.

Außerdem wurde bereits gezeigt, dass

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq C_0 |t|, \quad |t| \geq 1.$$

Dadurch erhält man

$$|\zeta(s)| \geq A(\sigma - 1)^{3/4} |t|^{-1/4} \quad 1 < \sigma < 2, |t| \geq 1$$

mit einer geeigneten Konstante A .

Sei nun $0 < \varepsilon < 1$, ε hinreichend klein, und $\sigma(t) = 1 + \varepsilon|t|^{-5}$. Für $|t| \geq 1$ gilt $\sigma(t) \in (1; 2)$. Es wird nun eine Fallunterscheidung für $\sigma \geq \sigma(t)$ und $\sigma \leq \sigma(t)$ durchgeführt:

- $\sigma \geq \sigma(t)$

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq A(\varepsilon|t|^{-5})^{3/4} = A\varepsilon^{3/4}|t|^{-4}$$

- $\sigma \leq \sigma(t)$

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma + it) &= \zeta(\sigma(t) + it) - \zeta(\sigma(t) + it) + \zeta(\sigma + it) \\ &= \zeta(\sigma + it) - \int_{\sigma}^{\sigma(t)} \zeta'(x + it) dx \end{aligned}$$

Daraus folgt $|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(\sigma(t) + it)| - \left| \int_{\sigma}^{\sigma(t)} \zeta'(x + it) dx \right|$ (Dreiecksungleichung). Es wurde bereits gezeigt, dass $|\zeta'(s)|$ nach oben beschränkt ist. Sei B eine obere Schranke. Man erhält

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\geq |\zeta(\sigma(t) + it)| - B(\sigma(t) - 1)|t| \\ &\geq A(\sigma(t) - 1)^{3/4} |t|^{-1/4} - B(\sigma(t) - 1)|t| \\ &= (A\varepsilon^{3/4} - B\varepsilon)|t|^{-4}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\delta := A\varepsilon^{3/4} - B\varepsilon > 0$, so erhält man die gewünschte Abschätzung, nämlich $|\zeta(s)| \geq \delta|t|^{-4}$.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird nun gezeigt, dass $D(s)$ auch die Voraussetzungen von Punkt II. des Satzes erfüllt:

- $|D(s)| \leq C|t|^\kappa$ für $\sigma > 1, |t| \geq 1$

$$|D(s)| = \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|$$

Es gilt $|\zeta'(s)| \leq C_1$ und $|\zeta(s)| \geq C_2|t|^{-4}$, C_1, C_2 positiv, daraus folgt

$$|D(s)| \leq \left| \frac{C_1}{C_2|t|^{-4}} \right| = \frac{C_1}{C_2}|t|^4.$$

- $|D'(s)| \leq C|t|^\kappa$ für $\sigma > 1, |t| \geq 1$

$$\begin{aligned} |D'(s)| &= \left| \frac{\zeta''(s)\zeta(s) - (\zeta'(s))^2}{\zeta(s)^2} \right| \\ &= \frac{|\zeta''(s)\zeta(s) - (\zeta'(s))^2|}{|\zeta(s)^2|} \\ &\leq \frac{|(C_2')^2 C_0|t|}{\delta^2|t|^{-8}} \\ &= C|t|^9 \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind also mit $\kappa = 9$ erfüllt, es kann also $N = 2^{[9]+2} = 2^{11} = 2048$ gewählt werden.

Es muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass $D(s)$ an der Stelle $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung hat, danach muss noch das Residuum an dieser Stelle werden. Für $\zeta(s)$ wird wieder die Darstellung aus Abschnitt 1.2.2 verwendet, nämlich

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx.$$

Für die erste Ableitung erhält man

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} - \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx - s \int_1^\infty \frac{-\log(x)}{x^{s+1}} H(x) dx.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} D(s) &= \frac{\frac{1}{(s-1)^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx - s \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^{s+1}} H(x) dx}{\frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx} \\ &= \frac{\frac{1}{(s-1)^2} + (s-1) \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx - s(s-1) \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^{s+1}} H(x) dx}{\frac{1}{2}(s-1) + 1 - s(s-1) \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx} \end{aligned}$$

bzw.

$$(s-1)D(s) = \frac{1 + (s-1)^2 \left[\int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx - s \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^{s+1}} H(x) dx \right]}{1 + (s-1) \left[\frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx \right]}.$$

Man erhält schließlich

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)D(s) = 1 = \text{Res}(D; 1) := \rho.$$

Aus dem Taubersatz angewendet auf $D(s)$ folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) &= x(1 + r(x)) = \Psi(x) \quad \text{mit } r(x) = O(1/\sqrt[3]{\log(x)}) \\ &= x + O(x/\sqrt[3]{\log(x)}) \\ &= x + o(x). \end{aligned}$$

Es wurde bereits gezeigt, dass

$$\Psi(x) = \Theta(x) + O(\log(x)\sqrt{x}).$$

Wegen $\log(x)\sqrt{x} = o(x)$ gilt

$$\Theta(x) = x + o(x).$$

Dazu äquivalent ist

$$\Theta(x) = x(1 + r(x)) \quad \text{mit } \lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0. \tag{2.3}$$

Es gilt

$$\Theta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p) \leq \pi(x) \log(x),$$

da $\log(p) \leq \log(x)$ für $p \leq x$, und deswegen

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log(x)}(1 + r(x)). \tag{2.4}$$

Es muss $\pi(x)$ noch nach oben abgeschätzt werden:

Sei $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$. Wegen $\pi(x^q) \leq x^q$ gilt für $x > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p) &\geq \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ x^q \leq p \leq x}} \log(p) \\ &\geq \log(x^q) \cdot \#\{p \in \mathbb{P}, x^q \leq p \leq x\} \\ &= q \log(x)(\pi(x) - \pi(x^q)) \\ &\geq q \log(x)(\pi(x) - x^q). \end{aligned}$$

Aus

$$q \log(x)(\pi(x) - x^q) \leq \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p) = \Theta(x)$$

folgt mit Gl. (2.3)

$$\begin{aligned} (\pi(x) - x^q)q \log(x) &\leq x(1 + r(x)) \\ \pi(x) &\leq \frac{x}{\log(x)}(1 + r(x))q^{-1} + x^q \end{aligned}$$

Bisher wurde gefordert $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$. Es wird jetzt $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}$ mit $x \geq 2$ festgelegt.

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq \frac{x}{\log(x)} \left[(1 + r(x)) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\log(x)}} \right)^{-1} + \log(x)x^{1-1/\sqrt{\log(x)-1}} \right] \\ &\leq \frac{x}{\log(x)}(1 + R(x)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$R(x) = -1 + (1 + r(x) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}\right)^{-1} + \log(x)x^{-1/\sqrt{\log(x)}}.$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$, daher folgt aus Gl. (2.4) und Gl. (2.5) mit dem Einschließungsprinzip der

Satz (Primzahlsatz).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi(x) \Big/ \frac{x}{\log(x)} \right) = 1.$$

Die Funktion $\frac{x}{\log(x)}$ ist eine asymptotische Approximation von $\pi(x)$. Eine bessere Approximation ist durch den Integrallogarithmus

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

gegeben. Wegen

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt = \frac{t}{\log(t)} \Big|_2^x + \int_2^x \frac{1}{\log(t)^2} dt$$

erhält man

$$\frac{x}{\log(x)} \asymp \text{Li}(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

das heißt die beiden Funktionen sind asymptotisch äquivalent für $x \rightarrow \infty$. Es gilt

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-C\sqrt{\log(x)}))$$

mit einer positiven Konstante C . Vermutet wird noch eine bessere Restgliedabschätzung, die äquivalent mit der Riemannschen Vermutung ist. Diese wird in den Abschnitten 3.3 und 4.1 genauer betrachtet.

2.2 Quantenmechanik

Dieser Abschnitt soll zeigen, wie die quantenmechanische Untersuchung des chaotischen Oszillators auf die Riemannsche Zetafunktion führt. Zunächst wird die Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator angesetzt und der Hamilton-Operator ermittelt. Dieser wird dann in die für den klassischen harmonischen Oszillator gültige Hamilton-Funktion transformiert. Daraus ergibt sich dann die Hamilton-Funktion für den klassischen chaotischen Oszillator, der zugehörige Hamilton-Operator wird durch Rücktransformation ermittelt. Die Vorgehensweise orientiert sich an [14], die im Zusammenhang mit dem Hamilton-Operator bzw der Hamilton-Funktion verwendeten Methoden sind aus [8] entnommen worden.

Als harmonischer Oszillator wird das System bestehend aus einem Teilchen der Masse m in einem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

bezeichnet, wobei ω die Kreisfrequenz darstellt. Die Schrödingergleichung lautet in diesem Fall

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t).$$

Es wird der Ansatz $\Psi(x) = \varphi(x) e^{-i\omega t}$ gewählt, also ein zeitharmonischer Vorgang betrachtet. Einsetzen und Umformen ergibt

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \varphi(x) = \hbar \omega \varphi(x).$$

Diese Gleichung lässt sich mit $E = \hbar\omega$ und $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ auch als

$$H\varphi(x) = E\varphi(x) \quad (2.6)$$

anschreiben, wobei E die Energie und H der Hamilton-Operator des Systems darstellen. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Eigenwertgleichung, jedem Eigenwert entspricht ein erlaubtes Energieniveau.

Dieser Hamilton-Operator wird nun transformiert, um die Hamilton-Funktion \hat{H} des klassischen harmonischen Oszillators zu erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{p} &= -i\hbar\nabla \\ \hat{x} &= x, \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Diese Darstellung soll durch die Koordinatentransformation $(\hat{p}, \hat{x}) \mapsto (P, X)$

$$P = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}}, \quad X = \omega x \sqrt{\frac{m}{2}}$$

vereinfacht werden. Damit es sich um eine kanonische Transformation handelt, muss die Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial \hat{x}} \frac{\partial P}{\partial \hat{p}} - \frac{\partial X}{\partial \hat{p}} \frac{\partial P}{\partial \hat{x}} = k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

erfüllt sein. k entspricht dabei einem Skalierungsfaktor. Speziell für diese Transformation ergibt sich

$$\frac{\partial X}{\partial \hat{x}} \frac{\partial P}{\partial \hat{p}} - \frac{\partial X}{\partial \hat{p}} \frac{\partial P}{\partial \hat{x}} = \omega \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{2m}} - 0 = \frac{\omega}{2} \neq 0.$$

Der Skalierungsfaktor k wird vorerst außer Acht gelassen. Man erhält

$$\hat{H} = P^2 + X^2$$

Die Hamilton-Funktion des chaotischen Oszillators ergibt sich durch die Substitution $X \mapsto iX$, daraus folgt

$$\hat{H} = P^2 - X^2.$$

Um diese Darstellung zu vereinfachen, wird wiederum eine Koordinatentransformation verwendet, und zwar

$$\tilde{p} = P + X, \quad \tilde{x} = P - X.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial P} - \frac{\partial \tilde{x}}{\partial P} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} = 1 \cdot 1 - (1 \cdot (-1)) = 2.$$

Der Skalierungsfaktor wird wiederum vernachlässigt. In den neuen Koordinaten hat die Hamilton-Funktion des chaotischen Oszillators dann die Form

$$\hat{H} = \tilde{p}\tilde{x}.$$

Einsetzen in die klassischen Hamilton-Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \tilde{p}} = \tilde{x} \\ \frac{d\tilde{p}}{dt} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{p}, \end{aligned}$$

daraus folgt durch Integration über die Zeit

$$\tilde{x}(t) = x_0 e^t \tag{2.7a}$$

$$\tilde{p}(t) = p_0 e^{-t}. \tag{2.7b}$$

Im Phasenraum (\tilde{x}, \tilde{p}) entsprechen diese Funktionen instabilen Trajektorien, was bei einem chaotischen System zu erwarten war. Dies ist auch aus dem Richtungsfeld Abb. 2.1 ersichtlich.

Um die Anzahl der Energieniveaus mit einer Energie kleiner als ein bestimmter Wert E endlich werden zu lassen, muss das System regularisiert werden. Dazu fordert man

$$x > x_{min} \quad \text{und} \quad p > p_{min}.$$

Die Anzahl der Energieniveaus mit Energien kleiner als E ergibt sich zu

$$N(E) = A(E)/h + \dots,$$

wobei die Terme höherer Ordnung weggelassen wurden. $A(E)$ entspricht der Fläche im Phasenraum (x, p) , die von den Kurven $x = x_{min}, p = p_{min}$ und $px = E$ eingeschlossen wird (siehe Abb. 2.2). Um den Hamilton-Operator des zugehörigen quantenmechanischen Systems zu erhalten, muss die Hamilton-Funktion symmetrisiert werden:

$$H := \frac{1}{2}(\tilde{p}\tilde{x} + \tilde{x}\tilde{p})$$

Für diesen Hamilton-Operator ist die zuvor aus der Schrödingergleichung hergeleitete Eigenwertgleichung (2.6) gültig. Zur Vereinfachung wird ab hier die Notation angepasst: $\tilde{x} \mapsto x, \tilde{p} \mapsto p$. Außerdem wird außerdem vereinfachend angenommen, dass $2\pi\hbar = 2\pi$, es werden also alle Zahlenwerte als Vielfache der Fläche der sogenannten Plankschen Zelle ausgedrückt.

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x) = \frac{A}{x^{1/2-iE}},$$

wobei A eine Konstante darstellt und die Energie E für bestimmte Orbitale jeweils konstant ist. $\varphi(x)$ ist dabei die Orts-Eigenfunktion. Die Impuls-Eigenfunktion ϕ entspricht der Fourier-Transformierten von φ :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ipx} dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^{1/2-iE}} dx.$$

Das Integral weist eine Singularität bei $x = 0$ auf. Man fordert $x \rightarrow |x|$, daraus folgt

$$\phi(p) = \frac{A 2^{iE}}{|p|^{1/2+iE}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{iE}{2}\right)}.$$

Für die Gammafunktion kann genauso wie für die Zetafunktion das Schwarzsche Spielungsprinzip (siehe Abschnitt 3.3.1) im Bereich $0 < \text{Re}(s) < 1$ angewendet werden, es gilt also $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ und damit $\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{iE}{2}\right) = \overline{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}\right)}$. Außerdem erhält man für eine komplexe Zahl $z \neq 0$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z| e^{i \arg(z)}}{|z| e^{-i \arg(z)}} = e^{2i \arg(z)}.$$

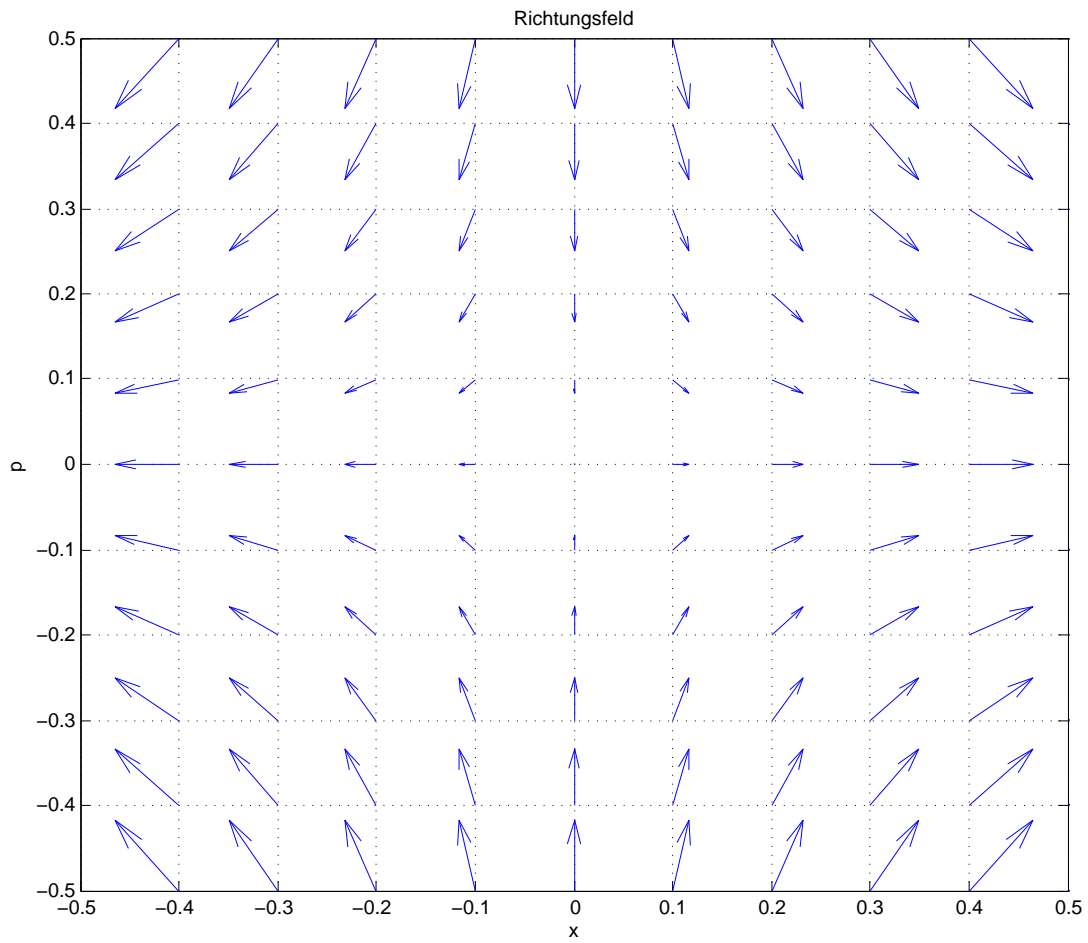


Abbildung 2.1: Richtungsfeld des Differentialgleichungssystems (2.7). Es sind die Hyperbeln um den Ursprung zu erkennen, sie zeigen an, dass der Ursprung im Phasenraum eine instabile Ruhelage darstellt.

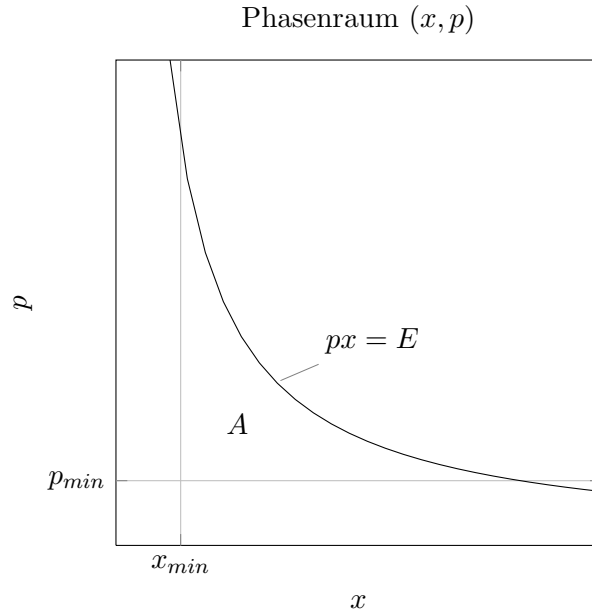


Abbildung 2.2: Phasenraumdarstellung von $H = px$ inklusive Regularisierung. Die Fläche A ist ein Maß für die Anzahl der Energieniveaus mit Energien kleiner als E .

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \phi(p) &= \frac{A 2^{iE}}{|p|^{1/2+iE}} e^{2i \arg(\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}))} \\
 &= \frac{A 2^{1/2+iE}}{\sqrt{2}|p|^{1/2+iE}} e^{2i \arg(\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}))} \\
 &= \frac{A \pi^{-iE}}{\sqrt{2\pi} \left|\frac{p}{2\pi}\right|^{1/2+iE}} e^{2i \arg(\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}))} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} \left|\frac{p}{2\pi}\right|^{1/2+iE}} e^{2i(\arg(\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2})) - \frac{E}{2} \log(\pi))} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} \left|\frac{p}{2\pi}\right|^{1/2+iE}} e^{2i\theta(E)}
 \end{aligned}$$

mit $\theta(E) := \arg(\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2})) - \frac{E}{2} \log(\pi)$.

Es soll nun gezeigt werden, dass $\theta(E)$ dem Argument von $\zeta(\frac{1}{2} + iE)$ entspricht. Dazu wird die Funktionalgleichung der Zetafunktion in alternativer Darstellung (3.3) verwendet:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{(s+1)/2} \zeta(1-s)$$

Einsetzen von $s = \frac{1}{2} + iE$ ergibt

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}\right) \pi^{-1/4 - iE/2} \zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{iE}{2}\right) \pi^{3/4 + iE/2} \zeta\left(\frac{1}{2} - iE\right) \\
 \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2}\right) \pi^{-1 - iE} \zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{iE}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} - iE\right).
 \end{aligned}$$

Berechnet man nun auf beiden Seiten der Gleichung das Argument, so ergibt sich unter Berücksichtigung

sichtigung von $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ und $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ für $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$

$$\begin{aligned} 2 \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} - iE \right) \right) &= 2 \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2} \right) \right) + \arg \left(\pi^{-1/4 - iE} \right) \\ \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} - iE \right) \right) &= \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \arg \left(e^{(-1/4 - iE) \log(\pi)} \right) \\ \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} - iE \right) \right) &= \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2} \right) \right) - \frac{E}{2} \log(\pi) = \theta(E). \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt also eine Beziehung zwischen dem quantenmechanischen chaotischen Oszillator und der Riemannschen Zetafunktion .

Kapitel 3

Nullstellen der Zetafunktion

Um Nullstellen zu finden, empfiehlt es sich, bestimmte Bereiche der komplexen Zahlenebene getrennt anzuschauen. In Abschnitt 2.1 wurde für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ die Beziehung

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

(Gleichung (2.1)) hergeleitet. Jeder Faktor dieses Produktes ist ungleich 0, woraus folgt, dass $\zeta(s)$ in der durch $\operatorname{Re}(s) > 1$ definierten Halbebene keine Nullstellen besitzt. Im Folgenden werden die durch $-\infty < \operatorname{Re}(s) < 0$ und $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ definierten Bereiche betrachtet. Vorher wird aber noch auf die Bedeutung der Nullstellen eingegangen.

3.1 Bedeutung der Nullstellen der Zetafunktion

In Abschnitt 2.1 wurde für den Beweis des Primzahlsatzes die Tatsache benötigt, dass die Riemannsche Zetafunktion auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$ keine Nullstellen besitzt. In den Abschnitten 4.1 und 4.2 werden zur sogenannten Riemannschen Vermutung (siehe Abschnitt 3.3) äquivalente Aussagen betrachtet. Die Riemannsche Vermutung trifft eine Aussage über die Nullstellen in einem bestimmten Gebiet.

Die Lage der Nullstellen der Zetafunktion hat vor allem eine große Bedeutung in der Zahlentheorie, darüber hinaus handelt es sich dabei um ein seit über 150 Jahren ungelöstes Problem, was auch zum Teil erklärt, warum so viele Arbeiten zu diesem Thema verfasst wurden (zum Beispiel [4, 5, 6, 11, 14]).

3.2 „Triviale“ Nullstellen

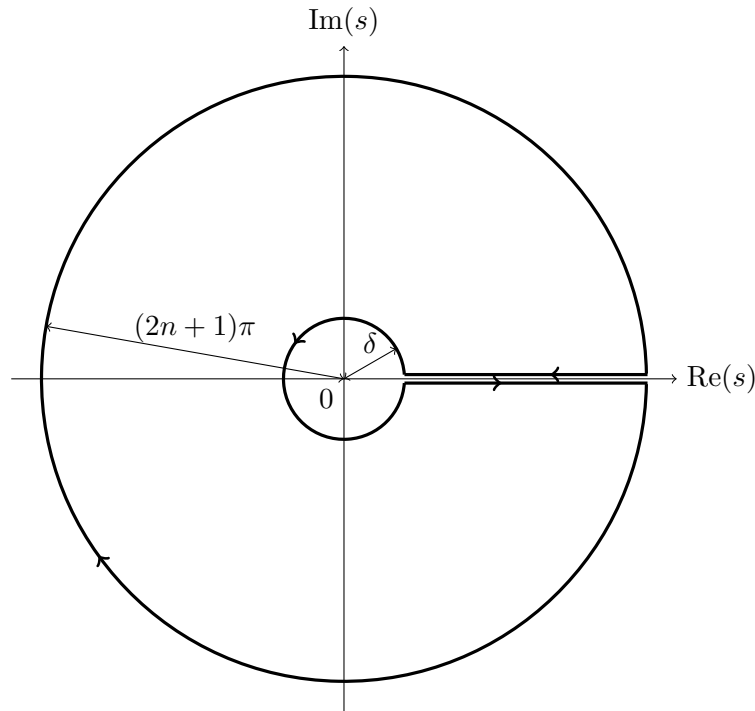
Nullstellen im Bereich $-\infty < \operatorname{Re}(s) < 0$ werden als „triviale“ Nullstellen der Zetafunktion bezeichnet.

Für die folgenden Ausführungen wird die Funktionalgleichung der Zetafunktion benötigt, diese wird wie in [19] beschrieben hergeleitet.

Man will

$$J(s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} (e^w - 1)^{-1} \frac{(-w)^s}{w} dw \quad (3.1)$$

berechnen, wobei γ den in Abb. 3.1 bezeichneten Weg in der Gaußschen Zahlenebene bezeichnet. Der innere Kreis hat als Radius $\delta > \pi$, der äußere $(2n + 1)\pi$. Weitert man gedanklich den Integrationsweg entlang der reellen Achse auf, so kann das Integral mit Hilfe des Residuensatzes


 Abbildung 3.1: Integrationsweg γ zu Gleichung (3.1).

berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} (e^w - 1)^{-1} \frac{(-w)^s}{w} dw &= \sum_{k=-n, \dots, -1, 1, \dots, n} \operatorname{Res} \left((e^w - 1)^{-1} \frac{(-w)^s}{w}, w = 2\pi i k \right) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left((2\pi i k)^{s-1} + (-2\pi i k)^{s-1} \right) \\
 &= (2\pi)^{s-1} \left(i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \\
 &= \frac{1}{i} (2\pi)^{s-1} \left(e^{s \log(i)} - e^{s \log(-i)} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \\
 &= \frac{1}{i} (2\pi)^{s-1} \left(e^{is \frac{\pi}{2}} - e^{-is \frac{\pi}{2}} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \\
 &= 2(2\pi)^{s-1} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1}
 \end{aligned}$$

Führt man nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so wird γ zum in Abschnitt 1.2.3 (siehe Abbildung 1.1) gewählten Integrationsweg, die Integranden von $I(s)$ und $J(s)$ sind ident, nur der Vorfaktor ist verschieden, man erhält also $I(s) = 2\pi i J(s)$ für $n \rightarrow \infty$. Ebenfalls in Abschnitt 1.2.3 wurde die Beziehung

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s).$$

hergeleitet. Daraus erhält man

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (3.2)$$

Dies entspricht der gesuchten Funktionalgleichung. Bei der Herleitung wurde $\operatorname{Re}(s) < 0$ gefordert, der erhaltene Ausdruck ist allerdings auf ganz \mathbb{C} meromorph und daher aufgrund der Eindeutigkeit der meromorphen Fortsetzung (bewiesen in Abschnitt 1.2.1) auf ganz \mathbb{C} gültig.

Es erweist sich manchmal als günstig, die Funktionalgleichung in der Form

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{(s+1)/2} \zeta(1-s) \quad (3.3)$$

anzugeben.

Dass beide Formen tatsächlich äquivalent sind, wird mit Hilfe von [11, S. 7.5] gezeigt. Aus (3.3) folgt unmittelbar

$$\zeta(1-s) = \sqrt{\pi} \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{-1} \zeta(s).$$

Es gilt

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi s/2)} \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s} \sqrt{\pi} \Gamma(s),$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= \sqrt{\pi} \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi} \zeta(s) \\ &= \pi \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \frac{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi} \zeta(s) \\ &= \pi^{-s} 2^{1-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s). \end{aligned}$$

Mit der Substitution $s \mapsto 1-s$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \pi^{s-1} 2^s \cos\left(-\frac{\pi s}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \\ &= 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Sei nun $\operatorname{Re}(s) < 0$. Da die Riemannsche Zetafunktion in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ keine Nullstellen besitzt (siehe Abschnitt 3.1), gilt

$$\zeta(1-s) \neq 0 \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) < 0.$$

Die Gammafunktion besitzt auch keine Nullstellen mit positivem Realteil, daraus folgt $\Gamma(1-s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) < 0$. Sei nun $\zeta(s) = 0$ mit $\operatorname{Re}(s) < 0$. Einsetzen in die Funktionalgleichung ergibt

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar $s = -2k$, $k \in \mathbb{N}$. Die Riemannsche Zetafunktion verschwindet also für alle negativen geraden Zahlen.

3.3 Nullstellen im „kritischen Bereich“

Als „kritischer Bereich“ wird der durch $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ bezeichnet. Die Nullstellensuche gestaltet sich hier als schwierig, es ist noch nicht gelungen, diese analytisch zu bestimmen. Riemann machte dazu die als *Riemannsche Vermutung* bekannte Äußerung:

Behauptung (Riemannsche Vermutung). Sämtliche Nullstellen von $\zeta(s)$ im Bereich $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ haben als Realteil $\frac{1}{2}$.

Der Nachweis der Gültigkeit dieser Behauptung wurde von Hilbert im Jahr 1900 als eines von 23 zu lösenden mathematischen Problemen bezeichnet (siehe [13]), im Jahr 2000 wurde es in die vom *Clay Mathematics Institute (CMI)* in Cambridge (Massachusetts) erstellte Liste der ungelösten Probleme der Mathematik aufgenommen (siehe [6]). Diese Probleme sind als „Millenium-Probleme“ bekannt.

Bis heute gibt es keinen Beweis der Riemannschen Vermutung, allerdings ist es gelungen, gewisse Eigenschaften der Verteilung von Nullstellen im „kritischen Bereich“ zu zeigen.

3.3.1 Symmetrie bezüglich der reellen Achse

Um diese Symmetrie zu zeigen, wird das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (entnommen aus [15, S. 25], Notation angepasst) verwendet:

Satz (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). Sei U eine in der Teilraumtopologie der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{s : \operatorname{Im}(s) > 0\}$ offene Menge. Auf U sei eine stetige Funktion f definiert, die auf $\dot{U} := \{s \in U : \operatorname{Im}(s) > 0\}$ holomorph ist und auf $U \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt. Dann ist die auf $U \cup \bar{U}$ durch

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & \text{für } s \in U \\ \overline{f(\bar{s})} & \text{für } s \in \bar{U} \end{cases}$$

wohldefinierte Funktion holomorph.

„ $\bar{}$ “ bei \bar{U} steht hier nicht etwa für die abgeschlossene Hülle, sondern für elementweise komplexe Konjugation, es gilt also $\bar{U} = \{\bar{s} : s \in U\}$. Für die Riemannsche Zetafunktion wird die für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gültige Darstellung aus Abschnitt 1.2.2 verwendet, betrachtet wird der Bereich $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} H(x) dx.$$

Für $s \in \mathbb{R}, 0 < s < 1$ ist $\zeta(s)$ offensichtlich reell, außerdem ist auf $U := \{\zeta(s) \text{ auf } 0 < \operatorname{Re}(s) < 1, \operatorname{Im}(s) > 0\}$ stetig, daher existiert die holomorphe Funktion

$$\widetilde{\zeta}(s) = \begin{cases} \zeta(s) & \text{für } s \in U \\ \overline{\zeta(\bar{s})} & \text{für } s \in \bar{U} \end{cases}.$$

Diese Funktion ist aufgrund des Identitätssatzes identisch mit der Riemannschen Zetafunktion. Da komplexe Konjugation einer Zahl einer Spiegelung an der reellen Achse entspricht, folgt daraus wegen

$$\zeta(s_0) = 0 \quad \implies \quad \zeta(\bar{s}_0) = \overline{\zeta(s_0)} = \bar{0} = 0,$$

dass die Nullstellen im „kritischen Bereich“ symmetrisch zur reellen Achse liegen.

3.3.2 Symmetrie bezüglich $s = \frac{1}{2}$

Sei nun $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$. In diesem Bereich gilt $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \neq 0$ und $\Gamma(1-s) \neq 0$, daher folgt durch Einsetzen von $\zeta(s_0) = 0$ in die Funktionalgleichung (3.2)

$$\zeta(1-s_0) = 0.$$

Der Mittelpunkt der Strecke zwischen diesen beiden Nullstellen in der Gaußschen Zahlenebene berechnet sich zu

$$\frac{s_0 + (1-s_0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Symmetrie der Nullstellen bezüglich $s = \frac{1}{2}$.

In Abschnitt 2.1 wurde für den Beweis des Primzahlsatzes bereits gezeigt, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$ besitzt. Die eben gezeigte Symmetrie erlaubt es einem zu zeigen, dass dadurch $\zeta(s)$ auch keine Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 0$ besitzen kann. Die Symmetrie selbst gilt zwar nur für $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ dies reicht aber trotzdem, um die Behauptung zu zeigen, es kann nämlich analog zur Vorgehensweise in 2.1 mit Grenzwerten argumentiert werden.

Die Symmetrieeigenschaften ermöglichen es also, sich bei der Untersuchung des „kritischen Bereichs“ auf den Bereich $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(s) < 1, \operatorname{Im}(s) \geq 0$ zu beschränken. Findet man eine Nullstelle in diesem Bereich bei s_0 , so sind $\overline{s_0}$ und $(1 - s_0)$ sowie $\overline{(1 - s_0)}$ ebenfalls (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen. Abbildung 3.2 zeigt einen Plot von $1/|\zeta(s)|$ im kritischen Bereich. Nullstellen der Zetafunktionen sind Polstellen dieser Funktion.

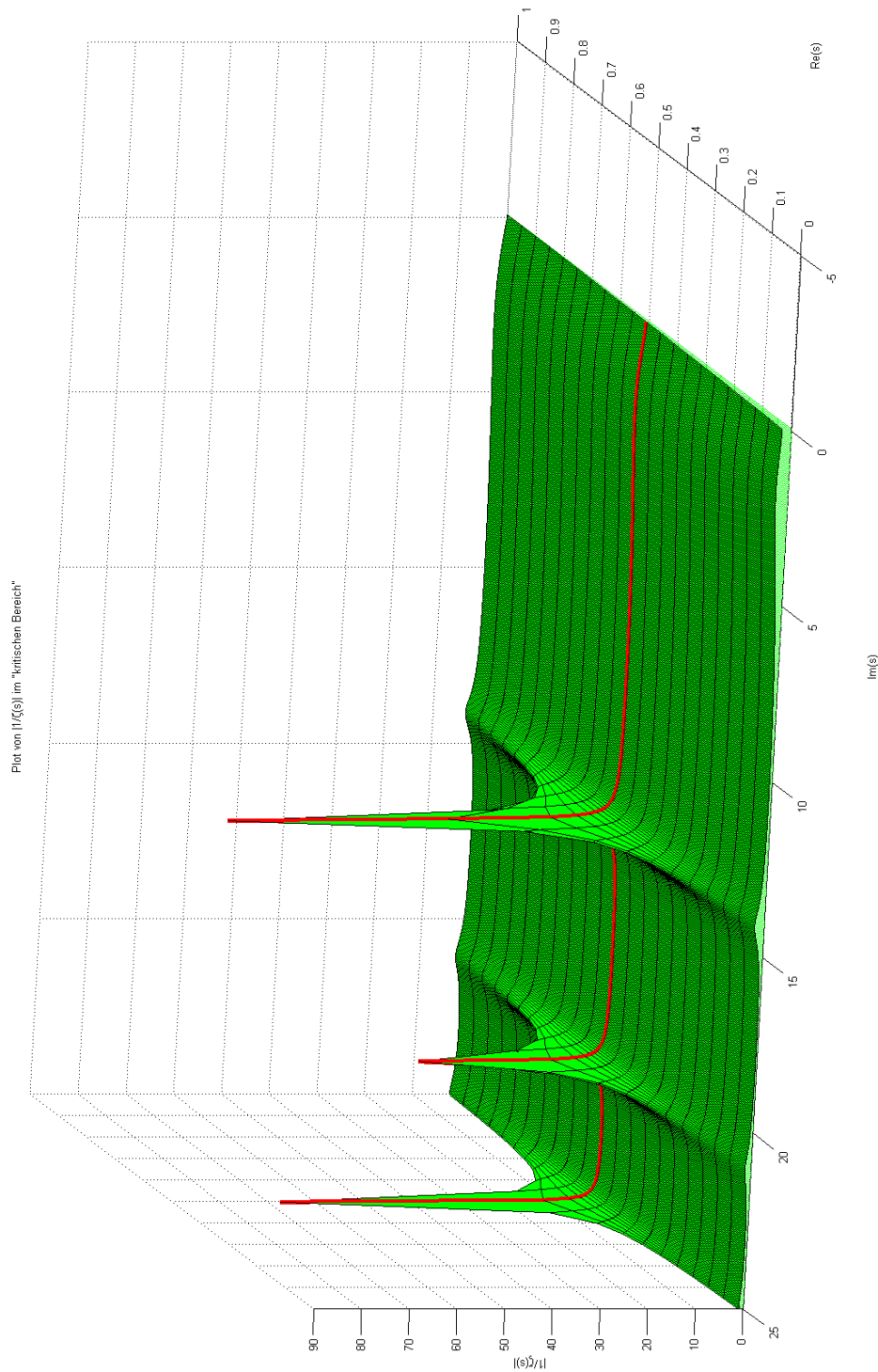


Abbildung 3.2: $\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right|$ für $0 < \text{Re}(s) < 1$, $0 < \text{Im}(s) < 25$ Jede Spitze entspricht einer Polstelle und damit einer Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion. Das Verhalten der Funktion im Bereich $0 < \text{Re}(s) < 1$, $-25 < \text{Im}(s) < 0$ ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abschnitt 3.3.1. Die Werte auf der Geraden $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ sind rot markiert.

Kapitel 4

Die Riemannsche Vermutung

Wie schon erwähnt gibt es bis heute keinen anerkannten Beweis, es existieren allerdings unterschiedliche Ansätze. Neben einem direkten, analytischen Beweis gibt es auch die Möglichkeit, die Riemannsche Vermutung durch den Beweis äquivalenter Aussagen zu zeigen. In einem ersten Abschnitt werden zunächst einige mathematische Aussagen vorgestellt und deren Äquivalenz zur Riemannschen Vermutung bewiesen. Anschließend wird die Vermutung von Hilbert und Pólya vorgestellt, die eine Verbindung zwischen der Riemannschen Vermutung und Eigenschaften eines bestimmten quantenmechanischen Systems herstellt.

4.1 Äquivalente Aussagen

Die Vorgehensweise orientiert sich an den Ausführungen in [11, Kap. 10].

Für die folgenden Ausführungen wird eine als Abelsche partielle Summation ¹ bekannte Technik (siehe [1, S. 77]) verwendet.

Satz (Abelsche partielle Summation). *Sei a_n eine Folge komplexer Zahlen und $\varphi(x)$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion mit x reell. Sei*

$$A(x) := \sum_{0 < n \leq x} a_n.$$

Es gilt

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x) \varphi(x) - \int_1^x A(u) \varphi'(u) du.$$

Dies lässt sich mit $y \in \mathbb{R}^+, y \leq x$ verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} \sum_{y \leq n \leq x} a_n \varphi(n) &= \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) - \sum_{1 \leq n \leq y} a_n \varphi(n) \\ &= A(x) \varphi(x) - A(y) \varphi(y) - \int_y^x A(u) \varphi'(u) du. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen lauten wie folgt

Satz. *Sei $\frac{1}{2} \leq \vartheta < 1$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$

(ii) $\Theta(x) = x + O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$

¹Der selbe Name wird auch für eine andere Methode zur Summation von Reihen verwendet.

- (iii) $\Psi(x) = x + O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$
- (iv) $M(x) = O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$
- (v) $\zeta(s) \neq 0$ für alle s mit $\vartheta < \operatorname{Re}(s)$

$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n)$ ist die sogenannte Mertens-Summe und $\mu(n)$ die durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 1 & \text{falls } n \text{ Produkt einer geraden Anzahl von} \\ & \text{Primzahlen ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ Produkt einer ungeraden Anzahl} \\ & \text{von Primzahlen ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Möbius-Funktion.

Aussage (v) mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ entspricht der Riemannschen Vermutung, da aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Zetafunktion (siehe 3.3.2) im „kritischen Bereich“ aus $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ folgt $\zeta(s) \neq 0$ für $0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2} \cup \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

- (i) \iff (ii) \iff (iii)

In Abschnitt 2.1 wurde bereits $\Psi(x) = \Theta(x) + O(\sqrt{x} \log(x))$ gezeigt, daraus folgt (ii) \iff (iii).

Es gilt

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} 1 = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{\log(p)}{\log(p)} = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p) \frac{1}{\log(p)}.$$

Mit abelscher partieller Summation folgt daraus

$$\pi(x) = \frac{\Theta(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\Theta(u)}{u \log(u)} du.$$

Setzt man $\Theta(x) = x + R(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{du}{u \log(u)^2} + \frac{R(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{R(u)}{u \log(u)^2} du \\ &= \operatorname{Li}(x) + \frac{R(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{R(u)}{u \log(u)^2} du + O(1), \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{Li}(x) = \frac{x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{du}{u \log(u)^2} + O(1)$ (siehe Abschnitt 2.1) verwendet wurde.

Daraus folgt $\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ falls $R(x) = O(x^{\vartheta+\varepsilon})$, daher gilt (ii) \implies (i).

Sei nun

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$\Theta(x) - x = \sum_{2 \leq n < x} \log(n) \left(a_n - \frac{+1}{\log(n)} \right) + O(1)$$

Daraus folgt mit abelscher partieller Summation und $R(x) = \pi(x) - \text{Li}(x)$

$$\Theta(x) - x = \log(x) (R(x) + O(1)) - \int_2^x \frac{R(u) + O(1)}{u} du + O(1).$$

Mit $R(x) = O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ ergibt sich

$$\Theta(x) - x = \log(x)O(x^{\vartheta+\varepsilon}) + O(x^{\vartheta+\varepsilon}) + O(1) = O(x^{\vartheta+2\varepsilon}),$$

daraus folgt (i) \implies (ii), die Äquivalenz der Aussagen (i) – (iii) wurde also bewiesen.

- (iii) \implies (v)

Sei $F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$. Die Dirichletreihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konvergiert für $\text{Re}(s) > 1$. Es soll gezeigt werden, dass die Reihe unter der Voraussetzung (iii) sogar für $\text{Re}(s) > \vartheta$ konvergiert.

Es gilt

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) = \Psi(x) - [x] = O(x^{\vartheta+\varepsilon})$$

für alle $\varepsilon > 0$ laut (iii). Mit abelscher partieller Summation erhält man

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^{\infty} \frac{A(u)}{u^{s+1}} du.$$

Für $\text{Re}(s) > \vartheta$ stellt die rechte Seite eine holomorphe Funktion von s dar, daraus folgt die Konvergenz der Reihe für $\text{Re}(s) > \vartheta$.

- (iv) \implies (v)

Hier kann analog zum Beweis von (iii) \implies (v) vorgegangen werden, wobei in diesem Fall die Funktion $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ untersucht werden muss.

- (v) \implies (iii)

Es wird folgender Satz, entnommen aus [11, S. 10.7] verwendet

Satz. Sei $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichletreihe, die für $\text{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert und die sich in die Halbebene $\text{Re}(s) > \vartheta$, $\frac{1}{2} \leq \vartheta < 1$ holomorph fortsetzen lässt. Für jedes $\vartheta_1 > \vartheta$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gelte

$$F(s) = O(|t|^\varepsilon) \quad (t = \text{Im}(s))$$

gleichmäßig in $\text{Re}(s) \geq \vartheta_1$. Dann folgt

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n = O(x^{\vartheta'}) \quad \text{für alle } \vartheta' > \vartheta.$$

Insbesondere konvergiert dann die Dirichletreihe von $F(s)$ für $\text{Re}(s) > \vartheta$.

Es soll gezeigt werden, dass $F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Wegen $|\zeta(s)| \leq C|t|$, also $|\zeta(s)| = O(|t|)$ gilt $|\log(\zeta(s))| = O(\log|t|)$ gleichmäßig für $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq \vartheta_1|t| \geq t_0$. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $\delta = \vartheta - \vartheta_1$, sodass die Kreisscheibe $K_\delta(a)$ vollständig in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq \vartheta_1$ liegt. Mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel erhält man

$$F'(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta(a)} \frac{F(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung der Parametrisierung $z = a + \delta e^{ib}$, $b \in [0; 2\pi]$ für $\partial K_\delta(a)$

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta(a)} \frac{\log(\zeta(z))}{(z-a)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\log(\zeta(a + \delta e^{ib}))|}{\delta^2} |i\delta e^{ib}| db = O(\log|t|)$$

gleichmäßig für $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq \vartheta'$, $|t| \geq t'_0$.

Außerdem gilt laut [11, S. 9.5] für jedes $\vartheta_1 > \vartheta$ und jedes $\varepsilon > 0$ sowie $|t| \geq t_0$

$$|\zeta(s)| = O(|t|^\varepsilon)$$

gleichmäßig in $\operatorname{Re}(s) \geq \vartheta_1$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Wegen $F(s) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)-1}{n^s}$ folgt daraus

$$A(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) - 1 = \Psi(x) - [x] = O(x^{\vartheta'})$$

für alle $\vartheta > \vartheta$.

- (v) \implies (iv)

Die Behauptung kann analog zur vorhergehenden gezeigt werden, indem der Satz auf die Funktion

$$F(s) := \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

angewendet wird. Laut [11, S. 9.5] gilt für jedes $\vartheta_1 > \vartheta$ und jedes $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = O(|t|^\varepsilon)$$

für $|t| \geq t_0$ gleichmäßig in $\operatorname{Re}(s) \geq \vartheta_1$.

Damit ist die Äquivalenz der Aussagen (i) – (v) bewiesen.

4.2 Die Vermutung von Hilbert und Pólya

Es wurden umfangreiche Untersuchungen zur Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Bereich durchgeführt (siehe [5, S. 237]), alle bisher in diesem Bereich ermittelten Nullstellen befinden sich auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$, was von der Riemannschen Vermutung vorhergesagt wurde. Die numerische Suche nach Nullstellen kann jedoch nicht zu einem Beweis der Riemannschen Vermutung führen, sondern höchstens zu einer Widerlegung (falls Nullstellen im kritischen Bereich mit Realteil ungleich $\frac{1}{2}$ gefunden werden) oder einer Plausibilisierung

selbiger (indem gezeigt wird, dass alle Nullstellen in gewissen Teilbereichen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen, was schon gelungen ist, siehe [6, S. 113]).

Ausgehend von den numerischen Berechnungen einer sehr großen Anzahl von Nullstellen wurde versucht, Aussagen über deren Verteilung zu machen, insbesondere diese Verteilung mit anderen bekannten Verteilungen zu vergleichen (siehe [5, S. 245]) Diese Überlegungen führen zur Vermutung von Hilbert und Pólya, laut der die Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Bereich den Eigenwerten eines selbstadjungierten (Hamilton-)Operators, der in einem Hilbertraum definiert ist, entsprechen (siehe [6, S. 122]). In der Arbeit [4] bzw. [5] wird von der Hamilton-Funktion $H = px$ ausgegangen, das quantenmechanische Analogon wird auf diese Eigenschaften hin untersucht. In Abschnitt 2.2 wurde bereits gezeigt, dass diese Hamilton-Funktion bei der Behandlung des chaotischen Oszillators auftritt. Die Untersuchung der Verteilung der Nullstellen hat gezeigt, dass sie der Verteilung von Eigenwerten chaotischer Systeme entspricht ([5, S. 245]). Es wurde in diesem Abschnitt außerdem bereits eine Verbindung zwischen dem chaotischen Oszillator und der Riemannschen Zetafunktion aufgezeigt.

Der Begriff des adjungierten Operators ist wie folgt definiert: Sei L ein Operator, der auf einem mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgestatteten Raum definiert ist. Der zu L adjungierte Operator L^* ist wie folgt definiert:

Seien f und g Elemente dieses Raumes. Es gilt (entnommen aus [10, S. 205])

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle.$$

Ein Operator wird selbstadjungiert genannt, wenn gilt

$$L = L^*.$$

Kapitel 5

Abwandlungen der Riemannschen Zetafunktion

Es existiert eine Vielzahl von Abwandlungen bzw. Verallgemeinerungen der Riemannschen Zetafunktion. Als Zetafunktion werden heutzutage hauptsächlich jene Funktionen bezeichnet, die (siehe [23])

- (i) meromorph auf ganz \mathbb{C} fortsetzbar sind,
- (ii) als Dirichletreihe dargestellt werden können,
- (iii) eine Eulersche Produktdarstellung besitzen und
- (iv) eine Funktionalgleichung erfüllen.

Eine (höchstwahrscheinlich nicht vollständige) Liste mit über 100 Zetafunktionen befindet sich in [23].

Diese Vielfalt an Zetafunktionen veranlasste A. Selberg (1917-2007) zu der Äußerung (zitiert nach [2])

Some decades ago I made - somewhat in jest - the suggestion that one should get accepted a non-proliferation treaty of zeta functions. There was becoming such an overwhelming variety of such objects.

Es werden in den folgenden Abschnitten überblicksmäßig drei mit der Riemannschen Zetafunktion verwandte Funktionen vorgestellt, nämlich die Hurwitzsche Zetafunktion, die Epsteinische Zetafunktion und der Polylogarithmus. Es wird auch kurz auf die jeweiligen Anwendungen dieser Funktionen eingegangen.

5.1 Die Hurwitzsche Zetafunktion

Die Hurwitzsche Zetafunktion ist definiert als (entnommen aus [22])

$$\zeta_H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (s, a) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Die Riemannsche Zetafunktion ist ein Spezialfall der Hurwitzschen Zetafunktion, es gilt

$$\zeta_H(s, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Es existiert eine Integraldarstellung des Produktes des Hurwitzschen Zetafunktion und der Gammafunktion, nämlich

$$\Gamma(s)\zeta_H(s, a) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^{at}(1-e^{-t})} dt \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1 \text{ und } \operatorname{Re}(a) > 0.$$

Für $a = 1$ ergibt sich

$$\Gamma(s)\zeta_H(s, 1) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t(1-e^{-t})} dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

was genau der bereits hergeleiteten Darstellung von $\Gamma(s)\zeta(s)$ (siehe (1.2)) entspricht.

Die Hurwitzsche Zetafunktion erfüllt außerdem die Funktionalgleichung

$$\zeta_H\left(s, \frac{p}{q}\right) = 2\Gamma(1-s)(2\pi q)^{s-1} \sum_{n=1}^q \sin\left(\frac{\pi s}{2} + \frac{2\pi np}{q}\right) \zeta_H\left(1-s, \frac{n}{q}\right)$$

für $p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q$. Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion (3.2) erhält man daraus mit $p = q = 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\zeta_H(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1},$$

wobei B_n die Bernoulli-Polynome sind.

5.2 Die Epsteinsche Zetafunktion

Die Epsteinsche Zetafunktion ist definiert als (entnommen aus [24])

$$Z_n : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (\mathbf{S}, \rho) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}} \frac{1}{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^\rho},$$

wobei \mathbf{S} eine symmetrische positiv definite Matrix ist. $\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a}$ ist also eine positiv definite quadratische Form. Die Epsteinsche Zetafunktion tritt in der Chemie und in der Physik bei der Berechnung von Gittersummen auf (siehe [18]).

Betrachtet man beispielsweise einen Ionenkristall mit periodischer Struktur, so stellt sich die Frage, welches elektrostatische Potential die Ionen (durch ihre Ladung) an einem bestimmten Punkt hervorrufen. Es wird vereinfachend angenommen, dass es sich bei dem Gitter Λ um ein kubisches Gitter mit den Gittervektoren $\mathbf{a}_i, 1 \leq i \leq 3$ handelt. Jeder Gitterpunkt kann also mit Hilfe eines Zahlentripels (l, m, n) referenziert werden, der Ortsvektor eines solchen Punktes ist also

$$\mathbf{r}_{l,m,n} = l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + n\mathbf{a}_3.$$

Modelliert man nun die Ionen als an den Gitterpunkten befindliche Punktladungen $\pm q$, die abwechselnd angeordnet sind, so führt die Berechnung des Potentials an einer Stelle \mathbf{r}' (oder anders angeschrieben (l', m', n')) auf die Berechnung der Summe

$$\sum_{(l,m,n) \in \mathbb{Z}^3 \setminus (l',m',n')} \frac{(-1)^{l+m+n}}{\sqrt{(l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2}} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \mathbf{r}'} \frac{(-1)^{\mathbf{b}^T(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{((\mathbf{r}-\mathbf{r}')^T \mathbf{S} (\mathbf{r}-\mathbf{r}'))^{\frac{1}{2}}} \quad (5.1)$$

mit $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$ und $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$. Mit der Notation $\mathbf{d} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ wird der Ausdruck zu

$$\sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^3 \setminus (0,0,0)} \frac{(-1)^{\mathbf{b}^T \mathbf{d}}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{S} \mathbf{d})^{\frac{1}{2}}}.$$

Dies ähnelt der Reihendarstellung der Epsteinschen Zetafunktion, nur der Term im Zähler stört noch. Stellt man sich jetzt das Gitter Λ als zwei ineinanderverschobene, jeweils aus Ionen mit der Ladung $+q$ und $-q$ bestehende periodische Gitter Λ_1 und Λ_2 vor, so können unter Ausnützung des Superpositionsprinzips die Wirkungen der positiv geladenen und der negativ geladenen Ionen getrennt berechnet und anschließend aufsummiert werden. Die Gitter Λ_1 und Λ_2 besitzen jeweils drei Basisvektoren, die es erlauben, die Gitterpunkte auch in diesem Koordinatensystem mit einem Zahlentripel zu referenzieren.

Allerdings ist der Gitterpunkt, an dessen Stelle das elektrostatische Potential berechnet werden soll, nur in einem der Gitter Λ_1 und Λ_2 enthalten, daher kann nur eine der beiden Gittesummen als

$$\sum_{\mathbf{d}_{\Lambda_i} \in \mathbb{Z}^3 \setminus (0,0,0)} \frac{1}{(\mathbf{d}_{\Lambda_i}^T \mathbf{S} \mathbf{d}_{\Lambda_i})^{\frac{1}{2}}} = 2Z_3 \left(\mathbf{S}, \frac{1}{2} \right)$$

angeschrieben werden (der eventuell vorhandene Vorfaktor -1 wird hier weggelassen, da es nur um die Form den Ausdrucks geht), im anderen Gitter kann der Aufpunkt nicht mit ganzzahligen Koordinaten angesprochen werden. Die Schreibweise \mathbf{d}_{Λ_i} soll verdeutlichen, dass \mathbf{d} in den Koordinaten des betreffenden Gitters (Λ_1 oder Λ_2) ausgedrückt werden muss.

Die Epsteinsche Zetafunktion wird manchmal auch allgemeiner als

$$Z_n(\mathbf{S}, \rho) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \setminus (0, \dots, 0)} \frac{e^{-2\pi i \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}}{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^\rho}$$

mit $b \in \mathbb{Z}^n$ definiert. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass der Ausdruck (5.1) in diese Form gebracht werden kann.

Diese Darstellung ist nützlich, wenn gewisse Wellenausbreitungsvorgänge untersucht werden sollen. Der Exponentialterm im Zähler gibt dabei die Phase der einzelnen Summanden als Funktion des Abstands zwischen Quellpunkt und Aufpunkt an, der Term im Nenner beschreibt die Dämpfung des Betrages der Wellenfunktion.. Ein Beispiel für solche Vorgänge ist die Beugung von Wellen an einem periodischen Gitter.

5.3 Der Polylogarithmus

Der Polylogarithmus ist definiert als¹ (entnommen aus [25])

$$\text{Li}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}.$$

Der Polylogarithmus ist eine Verallgemeinerung der Riemannsches Zetafunktion, es gilt

$$\text{Li}_s(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s).$$

¹Eine ähnliche Notation wird für den Integrallogarithmus verwendet (siehe Abschnitt 2.1), es besteht daher Verwechslungsgefahr.

Der Polylogarithmus wird bei der Integration von Fermi-Dirac-Verteilungen benötigt, es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{k^s}{e^{k-\mu} + 1} dk = -\Gamma(s+1) \operatorname{Li}_{1+s}(-e^\mu).$$

Bei der Integration von Bose-Einstein-Verteilungen erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{k^s}{e^{k-\mu} - 1} dk = \Gamma(s+1) \operatorname{Li}_{1+s}(e^\mu).$$

Der Polylogarithmus wird auch verwendet, um Darstellungen bestimmter Konstanten herzuleiten, die es erlauben, eine beliebige Ziffer dieser Zahlen zu berechnen, ohne die vorhergehenden bestimmten zu müssen (siehe [3, 7]). Dies wird am Beispiel von π verdeutlicht:

Sei $w := \frac{1+i}{2}$ und $h := \frac{i}{\sqrt{2}}$. Es gilt

$$w = \frac{1+w^3}{1-w^2} = \frac{1+w^5}{(1-w^2)^2} \quad \text{und} \quad h = \frac{1-h^3}{(1-h)^2}.$$

Mit $\operatorname{Li}_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\log(1-z)$ erhält man die Identitäten

$$\operatorname{Li}_1(w) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i\pi}{4} \tag{5.2a}$$

$$\operatorname{Li}_1(-w^3) - \operatorname{Li}_1(w^2) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{i\pi}{4} \tag{5.2b}$$

$$\operatorname{Li}_1(-w^5) - 2\operatorname{Li}_1(w^2) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{i\pi}{4} \tag{5.2c}$$

$$\operatorname{Li}_1(h^3) - 2\operatorname{Li}_1(h) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{i\pi}{2} \tag{5.2d}$$

Nimmt man beispielsweise Gl. (5.2a), multipliziert sie mit $8(1-w) = 4(1-i)$ und betrachtet auf beiden Seiten nur den Realteil, so erhält man

$$\begin{aligned} \pi &= 8 \operatorname{Re}((1-w) \operatorname{Li}_1(w)) - 2 \operatorname{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Gl. (5.3) wird nach ihren Entdeckern Bailey-Borwein-Plouffe-Formel genannt. Sie ermöglicht es, einen Algorithmus zur Berechnung einer beliebigen Ziffer in der hexadezimalen Darstellung von π zu entwickeln. Es wurden ähnliche Formeln für die Konstanten $\log(2)$, π^2 , $\log(2)^2$, π^3 , $\log(2)^3$, $\zeta(3)$, π^4 , $\log(2)^4$, $\log(2)^5$, $\zeta(5)$ hergeleitet.

Schlussbetrachtungen

Die Riemannsche Zetafunktion ist zunächst nur auf der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ definiert, lässt sich jedoch meromorph auf ganz \mathbb{C} fortsetzen. Sie ist hilfreich bei der Untersuchung von Fragestellungen aus der Zahlentheorie, außerdem existiert auch eine Verbindung zur Quantenmechanik.

Besonders die Nullstellen der Zetafunktion im Bereich $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ sind heutzutage von Interesse, da deren Verteilung sowohl in der Mathematik als auch in der Physik weitreichende Konsequenzen hat. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass in diesem Bereich alle Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen, diese Behauptung konnte jedoch bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden. Die Suche nach Nullstellen wird erleichtert durch das Vorhandensein von Symmetrieeigenschaften, die die zu untersuchende Fläche reduzieren.

Im Laufe der Zeit wurden viele Abwandlungen und Verallgemeinerungen der Riemannschen Zetafunktion definiert, die in verschiedensten Teilgebieten der Mathematik und der Physik verwendet werden. Die Riemannsche Zetafunktion kann also als „Mutter“ einer ganzen Klasse von Funktionen betrachtet werden. Zetafunktionen besitzen größtenteils ähnliche Eigenschaften wie die Riemannsche Zetafunktion (beispielsweise die Existenz einer Darstellung als Dirichletreihe, die Existenz einer Funktionalgleichung), die Untersuchung der Riemannschen Zetafunktion ist also auch für das Verständnis dieser neueren Zetafunktionen wichtig. Dies erklärt auch teilweise, warum die Riemannsche Zetafunktion nach wie vor von zahlreichen Mathematikern und Physikern untersucht wird.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Integrationsweg γ zu Gleichung (1.3).	8
2.1	Richtungsfeld des Differentialgleichungssystems (2.7). Es sind die Hyperbeln um den Ursprung zu erkennen, sie zeigen an, dass der Ursprung im Phasenraum eine instabile Ruhelage darstellt.	32
2.2	Phasenraumdarstellung von $H = px$ inklusive Regularisierung. Die Fläche A ist ein Maß für die Anzahl der Energieniveaus mit Energien kleiner als E	33
3.1	Integrationsweg γ zu Gleichung (3.1).	36
3.2	$\left \frac{1}{\zeta(s)} \right $ für $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, $0 < \operatorname{Im}(s) < 25$ Jede Spitze entspricht einer Polstelle und damit einer Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion. Das Verhalten der Funktion im Bereich $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, $-25 < \operatorname{Im}(s) < 0$ ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abschnitt 3.3.1. Die Werte auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ sind rot markiert.	40

Literaturverzeichnis

- [1] T. M. APOSTOL *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976
- [2] J. BAEZ *This Week's Finds in Mathematical Physics (Week 216)*, U. C. Riverside, 23. Mai 2005, <http://math.ucr.edu/home/baez/week216.html>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [3] D. BAILEY, P. BORWEIN und S. PLOUFFE *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, 1997, <http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/digits.pdf>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [4] M. V. BERRY und J. P. KEATING *$H = xp$ and the Riemann Zeros*, http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry306.pdf, zuletzt aufgerufen am 8. September 2012
- [5] M. V. BERRY und J. P. KEATING *The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics*, SIAM Review Vol. 41 No. 2, S.236-266, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999, http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry307.pdf, zuletzt aufgerufen am 8. September 2012
- [6] E. BOMBIERI *The Riemann Hypothesis*, erschienen in *The Millenium Prize Problems*, S. 107-128, Clay Mathematics Institute & American Mathematical Society, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2006, <http://www.claymath.org/library/monographs/MPP.pdf>, zuletzt aufgerufen am 31. August 2012
- [7] D. J. BROADHURST *Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of $\zeta(3)$ and $\zeta(5)$* , Open University Milton Keynes MK7 6AA, Physics Department, 16. März 1998, http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9803/9803067v1.pdf, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [8] M. G. CALKIN *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, World Scientific Publishing, 1996
- [9] J.B. CONWAY *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Springer-Verlag, 1978
- [10] H. M. EDWARDS *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 1974
- [11] O. FORSTER *Die Riemannsche Zetafunktion - Eine Einführung in die analytische Zahlentheorie*, LMU München, 2008
- [12] E. FREITAG und R. BUSAM *Funktionentheorie 1*, 4. Auflage, Springer-Verlag
- [13] D. HILBERT *Mathematische Probleme*, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Commisionsverlag der Dieterich'schen Universität, 1900
- [14] I. HRNČIĆ *Riemann Zeta Function Zeros Spectrum*, erschienen im *Electronic Journal of Theoretical Physics (EJTP)*, Ausgabe 20 (2009)

- [15] K. JÄNICH *Funktionentheorie - Eine Einführung*, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2008
- [16] K. KÖNIGSBERGER *Analysis 1*, 6. Auflage, Springer-Verlag 2004
- [17] A. KÖRNER und S. KRAUSE *Komplexe Analysis*, TU Wien, 22. September 2011
- [18] C. M. LINTON *Lattice Sums for the Helmholtz Equation*, SIAM Review Vol. 52 No. 4, S. 630-674, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010, http://www-staff.lboro.ac.uk/~macml1/fulltext/Linton_SIAMR52.pdf, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [19] B. E. PETERSEN *Riemann Zeta Function*, Oregon State University, 1996
- [20] A. PRECHTL *Vorlesungen über Signale und Systeme 1*, TU Wien, 2010
- [21] B. RIEMANN *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859, transkribiert von D. R. WILKINS im Jahr 1998
- [22] J. SONDOW und E. W. WEISSTEIN, *Hurwitz Zeta Function*, aus *Mathworld-A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/HurwitzZetaFunction.html>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [23] M. R. WATKINS *A Directory of All Known Zeta Functions*, Exeter University, <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin//zeta/directoryofzetafunctions.htm>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [24] E. W. WEISSTEIN *Epstein Zeta Function*, aus *Mathworld-A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/EpsteinZetaFunction.html>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [25] E. W. WEISSTEIN *Polylogarithm*, aus *Mathworld-A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html>, zuletzt aufgerufen am 13. September 2012
- [26] E. W. WEISSTEIN *Riemann Zeta Function zeta(2)*, aus *Mathworld-A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeta2.html>, zuletzt aufgerufen am 6. April 2012

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, am

Armand Nabavi