Ausgewählte Kapitel aus der Operatortheorie

Skriptum zur Vorlesung von Michael Kaltenbäck

Maximilian Kleinert
Florian Kren

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Relationen

1.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Ist X ein normierter Raum, dann benutzen wir für Elemente aus dem kartesischen Produkt $X^2 = X \times X$ die Schreibweise $(f; g) \in X \times X$, wobei $f, g \in X$. Oft ist es übersichtlicher diese Elemente in der Form $\binom{f}{g} \in X^2$ anzuschreiben.

1.1.1 Definition. T heißt lineare Relation auf dem normierten Raum X, falls $T \leq X \times X$. Ist $T \leq X \times X$ abgeschlossen, so spricht man von einer abgeschlossenen linearen Relation. Weiters bezeichne $\overline{T}$ den Abschluß von $T \leq X \times X$.

1.1.2 Definition. Analog zu linearen Abbildungen bzw. Operatoren definiert man

(i) den *Domain* $\mathcal{D}(T) := \{x \in X : \exists\, y \in X : (x; y) \in T\}$

(ii) den *Range* $\mathcal{R}(T) := \{y \in X : \exists\, x \in X : (x; y) \in T\}$

(iii) den *Kern* $\ker(T) := \{x \in X : (x; 0) \in T\}$

(iv) den Teilraum $T_0 := \ker(T) \times \{0\}$.

Außerdem werden

(v) der *Multi-Valued-Part* $\mathrm{mul}(T) := \{x \in X : (0; x) \in T\}$ und

(vi) der Teilraum $T_\infty := \{(0; x) \in X \times X : x \in \mathrm{mul}(T)\} = \{0\} \times \mathrm{mul}(T)$

definiert.

1.1.3 Bemerkung. Ist $T \leq X \times X$ abgeschlossen, so sind T_∞, T_0, $\mathrm{mul}(T)$ und $\ker(T)$ abgeschlossene Teilräume. T_∞ schreibe man dafür als $T_\infty = T \cap (\{0\} \times X)$ und erinnere sich daran, dass $\{0\} \times X \cong X$ sowohl topologisch als auch algebraisch.

Folgendes Lemma legt nahe, lineare Relationen als mehrwertige Funktionen zu sehen.

1.1.4 Lemma. *Ist $(f; g) \in T$, so gilt $\{h \in X : (f; h) \in T\} = g + \mathrm{mul}(T)$*

Beweis. Sind $(f; g)$ und $(f; h) \in T$, so ist $(f - f; h - g) = (0; h - g) \in T$ und daher $h - g \in \mathrm{mul}(T)$. ❑

1.1.5 Bemerkung. Man kann jeden linearen Operator mit einer linearen Relation identifizieren. Umgekehrt ist eine lineare Realtion T mit $\mathrm{mul}(T) = \{0\}$ ein Operator.

1.1.6 Definition. Sind S, $T \leq X \times X$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so definiert man

(i) $T+S := \{(f;g) \in X \times X : \exists\, h,k \in X : g = h+k,\ (f;h) \in T,\ (f;k) \in S\}$

(ii) $\alpha T := \{(f;\alpha g) \in X \times X :\ (f;g) \in T\}$

(iii) $T^{-1} := \{(g;f) \in X \times X :\ (f;g) \in T\}$ und

(iv) $ST := \{(f;k) \in X \times X :\ \exists\, g \in X :\ (f;g) \in T \wedge (g;k) \in S\}$

1.1.7 Bemerkung. Mit diesen Festlegungen ist unter $T+\alpha$ die Menge $T+\alpha I = \{(f;g+\alpha f) \in X \times X :\ (f;g) \in T\}$ zu verstehen.

1.1.8 Lemma. *Sind $R, S, T \leq X \times X$, dann gilt*

(i) $\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{R}(R)$ *und* $\mathcal{R}(R^{-1}) = \mathcal{D}(R)$

(ii) $\mathcal{D}(R) = X \Leftrightarrow I \subseteq R^{-1}R$ *und* $\mathcal{R}(R) = X \Leftrightarrow I \subseteq RR^{-1}$

(iii) $\mathrm{mul}(R) = \{0\} \Leftrightarrow I \supseteq RR^{-1}$ *und* $\ker(R) = \{0\} \Leftrightarrow I \supseteq R^{-1}R$

(iv) $\mathrm{mul}(ST) \supseteq \mathrm{mul}(S)$ *und* $\ker(ST) \supseteq \ker(T)$

(v) *Aus* $R \subseteq S$ *folgt*

1) $R+T \subseteq S+T$

2) $RT \subseteq ST$

3) $TR \subseteq TS$

4) $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

(vi) $RS + RT \subseteq R(S+T)$, *und aus* $\mathcal{D}(R) = X$ *folgt* $RS + RT = R(S+T)$

(vii) $(S+T)R \subseteq SR + TR$, *und aus* $\mathrm{mul}(R) = \{0\}$ *folgt* $(S+T)R = SR+TR$

Beweis. Die Eigenschaften (i) - (v) sind recht offensichtlich, (vii) zeigt man ähnlich zu (vi)

ad (vi) : Ist $(f;k) \in RS + RT$, dann gilt

$$\begin{aligned}(f;k_1) \in RS, (f;k_2) \in RT &\Rightarrow \exists\, g_1 :\ (f;g_1) \in S, (g_1;k_1) \in R \wedge \\ &\quad\ \exists\, g_2 :\ (f;g_2) \in T, (g_2;k_2) \in R \\ &\Rightarrow (g_1+g_2;k_1+k_2) \in R \text{ und } (f;g_1+g_2) \in S+T \\ &\Rightarrow (f;k) \in R(S+T)\end{aligned}$$

Sei nun $\mathcal{D}(R) = X$ und $(f;k) \in R(S+T)$. Dann existiert ein g mit

$$(f;g) \in S+T \wedge (g;k) \in R \Rightarrow g = g_1 + g_2, (f;g_1) \in S, (f;g_2) \in T$$

Da jetzt $\mathcal{D}(R) = X$ gilt, existieren k_1, k_2 mit

$$(g_1;k_1) \in R \text{ und } (g_2;k_2) \in R. \tag{1.1}$$

Also ist einerseits $(f;k_1) \in RS$ und $(f;k_2) \in RT$, woraus

$$(f;k_1+k_2) \in RS+RT \tag{1.2}$$

folgt, andererseits ist wegen (1.1)

$$(g_1;k_1)+(g_2;k_2)=(g;k_1+k_2) \in R.$$

Dies ermöglicht die Zerlegung

$$(0;k-k_1-k_2)=(g;k)-(g;k_1+k_2) \in R,$$

daher ist $(0;k-k_1-k_2)$ aus R_∞. Also gilt $k-k_1-k_2 \in \operatorname{mul}(R)$ und wegen (iv) ist $k-k_1-k_2 \in \operatorname{mul}(RS)$. Damit ist $(0;k-k_1-k_2) \in RS$. Analog argumentiert man $(0;k-k_1-k_2) \in RT$ und erhält

$$(0;k-k_1-k_2) \in RS+RT.$$

Dies addiert man nun zu (1.2) und sieht $(f;k) \in RS+RT$. ❑

1.1.9 Lemma. *Sei $S \leq X \times X$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und B ein beschränkter linearer Operator von $X \to X$. Ist S abgeschlossen so folgt, dass αS und $S+B$ ebenfalls abgeschlossen sind. Weiters gilt $\overline{\alpha S}=\alpha\overline{S}$ sowie $\overline{S+B}=\overline{S}+B$.*

Beweis. Man betrachte die Abbildungen

$$\tau_\alpha : \begin{cases} X^2 \to X^2 \\ (f;g) \mapsto (f;\alpha g) \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \tau_B : \begin{cases} X^2 \to X^2 \\ (f;g) \mapsto (f;g+Bf). \end{cases}$$

Beide Abbildungen sind linear, bijektiv und bistetig, also Homöomorphismen. Daher folgt $\tau_\alpha(\overline{S})=\overline{\tau_\alpha(S)}$ sowie $\tau_B(\overline{S})=\overline{\tau_B(S)}$ und damit die Behauptung. ❑

1.2 Adjungierte

Im Folgenden werden ausschließlich lineare Relationen auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachtet. Falls nicht anders erwähnt bezeichne $(.,.)$ das zu dem Hilbertraum gehörige innere Produkt. Auf dem kartesischen Produkt $\mathcal{H}^2=\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ wird auf natürliche Weise ein inneres Produkt, das sogenannte Summenskalarprodukt, erklärt durch

$$\big((f;g),(a;b)\big) := (f,a)+(g,b), \quad (f;g),(a;b) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}.$$

Weiters bezeichnet $L(\mathcal{H})$ die Menge aller beschränkten Linearen Operatoren von $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

1.2.1 Definition. Es seien S und T lineare Relationen auf $\mathcal{H}$. Man definiert die *orthogonale Relation* durch

$$T^\perp := \left\{(f;g) \in \mathcal{H}^2 : \ \big((f;g),(a;b)\big)=0 \ \forall (a;b) \in T\right\},$$

sowie die *adjungierte Relation* durch

$$T^* = \left\{(f;g) \in \mathcal{H}^2 : \ (g,h)=(f,k) \ \forall (h;k) \in T\right\}.$$

Weiters sei $S \ominus T := S \cap T^\perp$ und mit J bezeichne man stets folgende Abbildung

$$J : \begin{cases} \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2 \\ (f;g) \mapsto (-g;f). \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2.2 Bemerkung. Im Falle eines beschränkten linearen Operators stimmt diese Definition der adjungierten mit der des adjungierten Operators überein: Sei $B \in L(\mathcal{H})$, so ist auch $B^* \in L(\mathcal{H})$ und es gilt $(Bx, y) = (x, B^*y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Es ist zu zeigen, dass $\Gamma(B^*) = B^*$, wobei die rechte Seite wie in obiger Definition als Relation aufgefasst wird. Sei $(f; B^*f) = (f; g) \in \Gamma(B^*)$ und $(h; Bh) = (h; k) \in B$, dann gilt

$$(g, h) = (B^*f, h) = (f, Bh) = (f, k) \quad \forall (h; k) \in B,$$

also folgt $\Gamma(B^*) \subseteq B^*$.
Sei umgekehrt $(f; g) \in B^*$, dann gilt nach Definition $(g, h) = (f, k)$ für alle $(h; k) \in B$ und, da B ein Operator ist, folgt weiter

$$(g, h) = (f, k) = (f, Bh) = (B^*f, h) \quad \forall h \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{H}.$$

Daraus ergibt sich $B^*f = g$ und somit $(f; g) = (f; B^*f) \in \Gamma(B^*)$.

1.2.3 Lemma. *Es gilt:*

(i) *Die Abbildung J ist linear, bijektiv und bistetig.*

(ii) $T^* = (JT)^\perp = JT^\perp$.

(iii) $T^{**} = \overline{T}$.

(iv) $J(T^{-1}) = (JT)^{-1}$.

(v) $(T^\perp)^{-1} = (T^{-1})^\perp$.

(vi) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Beweis.

ad (i) : Offensichtlich ist J linear und es gilt $J \circ J = J^2 = -I$, also ist J bijektiv. Klarerweise sind J und $J^{-1} = -J$ stetig.

ad (ii) : Sei $(f; g) \in T^*$, dann gilt $(h, g) = (k, f)\ \forall (h; k) \in T$. Dies ist äquivalent zu $\big((k; -h), (f, g)\big) = 0\ \forall (h; k) \in T \Leftrightarrow \big((a; b), (f, g)\big) = 0\ \forall (a; b) \in JT$. Dies ist genau dann der Fall wenn $(f; g) \in (JT)^\perp$. Also folgt $T^* = (JT)^\perp$.
Die Gleichheit $(JT)^\perp = JT^\perp$ sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} JT^\perp &= \{(-g; f) \in \mathcal{H}^2 : \big((a; b), (f; g)\big) = 0\ \forall (a; b) \in T\} = \\ &= \{(f; g) \in \mathcal{H}^2 : \big((a; b), (g; -f)\big) = 0\ \forall (a; b) \in T\} = \\ &= \{(f; g) \in \mathcal{H}^2 : \big((h; k), (f; g)\big) = 0\ \forall (h; k) \in JT\} = (JT)^\perp. \end{aligned}$$

ad (iii) : Eine lineare Relation T ist nach Definition ein linearer Teilraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ und daher gilt $-IT = T$. Wegen (i) folgt

$$T^{**} = (T^*)^* = (JT^*)^\perp = \big(J(JT^\perp)\big)^\perp = \big(T^\perp\big)^\perp = \overline{T}.$$

ad (iv) : Da lineare Relationen lineare Teilräume von $\mathcal{H}$ sind, gilt

$$J(T^{-1}) = \{(-x; y) \in \mathcal{H}^2 :\ (x; y) \in T\} = \{(x; -y) \in \mathcal{H}^2 :\ (x; y) \in T\} = (JT)^{-1}.$$

ad (v) : Sei $(f;g) \in (T^\perp)^{-1}$. Das ist genau dann der Fall wenn $(g;f) \in T^\perp$, d.h. $\big((g;f),(a;b)\big) = 0$ für alle $(a;b) \in T$. Dies ist äquivalent zu $\big((f;g),(c;d)\big) = 0$ für alle $(c;d) \in T^{-1}$. Also gilt $(f;g) \in (T^{-1})^\perp$.

ad (vi) : Wegen (v) ergibt sich mit (ii) sowie (iv) unmittelbar

$$(T^*)^{-1} = (JT^\perp)^{-1} = J(T^\perp)^{-1} = J(T^{-1})^\perp = (JT^{-1})^\perp = (T^{-1})^*. \qquad ❑$$

1.2.4 Bemerkung. Mit Punkt (ii) des vorigen Lemmas folgt unmittelbar, dass die Adjungierte T^* immer abgeschlossen ist.

1.2.5 Lemma. *Seien $S, T \leq \mathcal{H}^2$, dann gilt:*

(i) $S \subseteq T \;\Rightarrow\; T^* \subseteq S^*$.

(ii) $\ker(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$, $\mathrm{mul}(T^*) = \mathcal{D}(T)^\perp$.

Beweis.

ad (i) : Für $(f;g) \in T^*$ gilt $(g,h) = (f,k)$ für alle $(h;k) \in T$. Wegen $S \subseteq T$ folgt daher $(g,h) = (f,k)$ für alle $(h;k) \in S$. Das bedeutet $(f;g) \in S^*$, also $T^* \subseteq S^*$.

ad (ii) : Es gilt

$$x \perp \mathcal{D}(T) \;\Leftrightarrow\; (x,a) = 0 \quad \forall a \in \mathcal{D}(T) \;\Leftrightarrow\; \big((-x;0),(a;b)\big) = 0 \quad \forall (a;b) \in T.$$

Wegen Lemma 1.2.3 (ii) ist dies äquivalent zu $(0;x) \in T^*$, d.h. $x \in \mathrm{mul}(T^*)$. Mit Lemma 1.2.3 (vi) sowie Lemma 1.1.8 (i) erhält man daraus die Gleichung $\ker(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$. ❑

1.3 Zerlegung einer linearen Relation

1.3.1 Definition. Ist T eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann definiert man $T_s := T \ominus T_\infty$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der abgeschlossene lineare Teilraum T von $\mathcal{H}$ zerlegt wird in $T = T_s \oplus T_\infty$, dabei ist hier die Summe von Teilräumen gemeint.

1.3.2 Bemerkung. Wie folgendes Lemma nahelegt bezeichnet man T_s auch als Operator Anteil von T und T_∞ als den „reinen“ Relationen Anteil von T.

1.3.3 Lemma. *Sei T eine abgeschlossene lineare Relation, dann gilt:*

(i) T_s ist Operator.

(ii) $\mathcal{D}(T_s) = \mathcal{D}(T)$ *ist dicht in* $\mathrm{mul}(T^*)^\perp$.

(iii) $\mathcal{R}(T_s) \subseteq \mathrm{mul}(T)^\perp$.

(iv) $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T_s) \oplus \mathrm{mul}(T)$.

Beweis.

ad (i) : Sei $(0;x) \in T_s \subseteq T$. Nach Definition gilt auch $(0;x) \in T_\infty$ und somit folgt wegen $T = T_s \oplus T_\infty$, $(x,x) = 0$ und daher $x = 0$, d.h. T_s ist ein Operator.

ad (ii) : Offensichtlich gilt $\mathcal{D}(T_s) \subseteq \mathcal{D}(T)$. Die umgekehrte Inklusion sieht man wie folgt: Sei $x \in \mathcal{D}(T)$, dann gibt es ein $y \in \mathcal{H}$ mit $(x; y) \in T$. Da T eine abgeschlossene lineare Relation ist, ist auch $\mathrm{mul}(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Somit gilt $\mathcal{H} = \mathrm{mul}(T) \oplus \mathrm{mul}(T)^\perp$, d.h. y läßt sich schreiben als $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in \mathrm{mul}(T)$ und $y_2 \in \mathrm{mul}(T)^\perp$. Wegen

$$(x; y_1) = -\underbrace{(0; y_2)}_{\in T_\infty} + \underbrace{(x; y)}_{\in T_s},$$

und $(x; y_1) \perp (0; y_2)$ folgt $(x; y_1) \in T_s$, also $x \in \mathcal{D}(T_s)$. Wegen 1.2.5 (ii) gilt $\mathrm{mul}(T^*)^\perp = (\mathcal{D}(T)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{D}(T)}$.

ad (iii) : Sei $g \in \mathcal{R}(T_s)$, $g \neq 0$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, sodass $(f; g) \in T_s$, da T_s ein Operator ist. Wegen $(f; g) \in T_s \perp T_\infty$ folgt $g \perp \mathrm{mul}(T)$.

ad (iv) : Wegen $T_s \subseteq T$ sowie $T_\infty \subseteq T$ gilt klarerweise $\mathcal{R}(T) \supseteq \mathcal{R}(T_s) \oplus \mathrm{mul}(T)$. Ist umgekehrt $y \in \mathcal{R}(T)$, dann gibt es ein $x \in \mathcal{H}$, sodass $(x; y) \in T$. Wegen $T = T_s \oplus T_\infty$ folgt $(x; y) = (x; y_1) + (0; y_2)$ mit $(x; y_1) \in T_s$, $(0; y_2) \in T_\infty$ und daher $y = y_1 + y_2 \in \mathcal{R}(T_s) \oplus \mathrm{mul}(T)$. ❑

Beispiel. Betrachtet man den Raum $\big(\mathbb{C}^2, (\cdot,\cdot)\big)$, wobei $(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^2$ bezeichnet, und die lineare Abbildung $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die inverse lineare Relation ist gegeben durch $A^{-1} = \{(Ax; x) : \ x \in \mathbb{C}^2\}$ und der Muli-Valued-Part durch $\mathrm{mul}(A^{-1}) = \{\lambda\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : \ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Daraus ergibt sich

$$(A^{-1})_\infty = \{0\} \times \mathrm{mul}(A^{-1}) = \big\{(0; \lambda\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) : \ \lambda \in \mathbb{C}\big\}$$

und man erhält für $(A^{-1})_s$

$$\begin{aligned}(A^{-1})_s = A^{-1} \ominus (A^{-1})_\infty &= \big\{(Ax; x) : \ x \in \mathbb{C}^2, \big((Ax; x), (0; \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))\big) = 0\big\} = \\ = \left\{(Ax; x) : x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}\right\} &= \left\{\lambda\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) : \lambda \in \mathbb{C}\right\} = I_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende symbolische Zerlegung für A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Korollar. *Sei T eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann ist T surjektiv, genau dann wenn $\mathcal{R}(T_s) = \mathrm{mul}(T)^\perp$. Weiters gilt $\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossen, genau dann wenn $\mathcal{R}(T_s)$ abgeschlossen ist.*

1.3.5 Definition. Eine lineare Relation $T \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$.

1.3.6 Bemerkung. Wegen 1.2.3 (ii) ist eine selbstadjungierte lineare Relation immer abgeschlossen.

1.3.7 Korollar. *Sei T eine selbstadjungierte lineare Relation auf $\mathcal{H}$ und betrachte man die Zerlegung $T = T_s \oplus T_\infty$, dann ist $T_s : \mathrm{mul}(T)^\perp \to \mathrm{mul}(T)^\perp$ ein selbstadjungierter, dicht definierter Operator.*

Sei umgekehrt $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ und $A : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_2$ ein selbstadjungierter Operator. Dann ist durch $\big(\{0\} \times \mathcal{G}_1\big) \oplus A$ eine selbstadjungierte lineare Relation auf $\mathcal{H}$ gegeben.

Beweis. Nach Lemma 1.3.3 (i) ist T_s ein Operator und wegen Lemma 1.3.3 (ii), (iii) ist $\mathcal{D}(T_s)$ dicht in $\mathrm{mul}(T^*)^\perp = \mathrm{mul}(T)^\perp$ und es gilt $\mathcal{R}(T_s) \leq \mathrm{mul}(T)^\perp$. Also ist $T_s : \mathrm{mul}(T)^\perp \to \mathrm{mul}(T)^\perp$ ein dicht definierter Operator.
Sei T_s^* die adjungierte Relation in $\mathrm{mul}(T)^\perp$ und $(x; y) \in T_s^*$, d.h. $x, y \in \mathrm{mul}(T)^\perp$ mit der Eigenschaft

$$(x, b_1) = (y, a) \quad \text{für alle} \quad (a; b_1) \in T_s.$$

Ist $(a; b) \in T$, dann gilt $(a; b) = (a; b_1) + (0; b_2)$ mit $b_1 \in \mathrm{mul}(T)^\perp$, $b_2 \in \mathrm{mul}(T)$ und $(a; b_1) \in T_s$. Also folgt $(x, b) = (x, b_1) = (y, a)$ für alle $(a; b) \in T$. Somit erhält man $(x; y) \in T^* = T$ und wegen $y \in \mathrm{mul}(T)^\perp$ folgt daher $(x; y) \in T_s$, d.h. $T_s^* \subseteq T_s$. Ist $(x; y) \in T_s$, dann gilt auch $(x; y) \in T = T^*$, also

$$(x, b) = (y, a) \quad \text{für alle} \quad (a; b) \in T \supseteq T_s$$

und deshalb folgt $(x; y) \in T_s^*$, d.h. $T_s^* \subseteq T_s$.
Die Umkehrung der Aussage zeigt man analog. ❑

1.3.8 Bemerkung. Für einen dicht definierten selbstadjungierten Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ existiert bekanntlich eine Familie orthogonaler Projektionen $E(\Delta)$ mit $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, der Menge aller Borelmengen auf $\mathbb{R}$, sodass $E(\mathbb{R}) = I$ und

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{x,y} \quad \text{wobei} \quad \mu_{x,y}(\Delta) := (E(\Delta)x, y).$$

Ist T eine selbstadjungierte Relation auf $\mathcal{H}$ und betrachtet man die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathrm{mul}(T)^\perp \oplus \mathrm{mul}(T)$, dann ist nach Korollar 1.3.7 T_s ein selbstadjungierter dicht definierter Operator auf $\mathrm{mul}(T)^\perp$, und demnach existiert ein Familie orthogonaler Projektionen $\widehat{E}(\Delta) : \mathrm{mul}(T)^\perp \to \mathrm{mul}(T)^\perp$. Bezeichne $P_{\mathrm{mul}(T)^\perp}$ die orthogonale Projektion auf den Teilraum $\mathrm{mul}(T)^\perp$ und setzt man $E(\Delta) := \widehat{E}(\Delta) \circ P_{\mathrm{mul}(T)^\perp}$, dann gilt $E(\mathbb{R}) = P_{\mathrm{mul}(T)^\perp}$. Definiert man zusätzlich $E(\{\infty\}) := P_{\mathrm{mul}(T)}$, dabei bezeichne $P_{\mathrm{mul}(T)}$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{mul}(T)$, dann gilt $E(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = I$. Somit erhält man eine Familie von orthogonalen Projektionen $E(\Delta)$ für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$.

1.4 Resolventen von linearen Relationen

1.4.1 Lemma. *Ist T eine abgeschlossene lineare Relation in $\mathcal{H}$, so ist $\mathcal{R}(T)$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{R}(T^*)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Angenommen $\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossen. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(T^*)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in \mathcal{H}$, dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T^*)$ mit $(u_n; v_n) \in T^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Daher gilt $(b, u_n) = (a, v_n)$ für alle $(a; b) \in T$. Durch $\phi_n : b \mapsto (b, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, werden lineare stetige Funktionale auf $\mathcal{R}(T)$ definiert. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und daher ist die Menge

$$\{\phi_n(b) : \ n \in \mathbb{N}\} = \{(a, v_n) : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$$

beschränkt für alle $b \in \mathcal{R}(T)$, d.h. die Familie $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise beschränkt auf $\mathcal{R}(T)$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass $\|\phi_n\| \leq C$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(T)$ läßt sich der Raum

$\mathcal{H}$ schreiben als $\mathcal{H} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^{\perp}$. Bezeichne man mit P die orthogonale Projektion auf $\mathcal{R}(T)$. Dann gilt wegen $b \in \mathcal{R}(T)$

$$\phi_n(b) = (b, u_n) = (b, Pu_n), \quad \forall b \in \mathcal{R}(T),$$

und mit dem Satz von Riesz-Fischer folgt $\|Pu_n\| = \|\phi_n\| \leq C$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist in reflexiven Banachräumen die abgeschlossene Einheitskugel und somit auch $B_C := \{x \in \mathcal{H} : \ (x,x)^{1/2} \leq C\}$ kompakt in der schwachen Topologie. Daher gibt es ein schwach konvergentes Teilnetz $(Pu_{n(j)})_{j\in J}$ das schwach gegen $\tilde{u} \in \mathcal{R}(T)$ konvergiert. Man erhält somit für $(a;b) \in T$

$$(\tilde{u}, b) = \lim_{j\in J}(Pu_{n(j)}, b) = \lim_{j\in J}(u_{n(j)}, b) = \lim_{j\in J}(v_{n(j)}, a) = (v, a).$$

Das bedeuted gerade, dass $(\tilde{u}; v) \in T^*$, und somit folgt $v \in \mathcal{R}(T^*)$. Also ist $\mathcal{R}(T^*)$ abgeschlossen. ❑

1.4.2 Bemerkung. Ist T eine abeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$ und $\ker(T) = \{0\}$, so vereinfacht sich der Beweis folgendermaßen. Wegen den zusätzlichen Voraussetzungen ist $T^{-1} \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sogar ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter linearer und beschränkter Operator. Wegen Lemma 1.2.3 (vi) gilt weiter $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. $(T^{-1})^*$ ist als Adjungierte eines überall definierten linearen stetigen Operators ebenfalls überall definiert und beschränkt. Also ist $\mathcal{D}((T^*)^{-1}) = \mathcal{R}(T^*)$ gleich $\mathcal{H}$ und somit abgeschlossen, d.h. $\mathcal{D}((T^*)^{-1}) = \mathcal{H}$. Also folgt $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{H}$ und daher ist $\mathcal{R}(T^*)$ abgeschlossen.

1.4.3 Definition. Ist $T \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine lineare Relation, so ist

(*i*) $\rho(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T-\lambda)^{-1} \in L(\mathcal{H})\big\}$
die *Resolventenmenge*,

(*ii*) $\tilde{\rho}(T) = \rho(T) \cup \begin{cases} \{\infty\} & \text{falls } T \in L(\mathcal{H}) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$
die *verallgemeinerte Resolventenmenge*,

(*iii*) $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$
das *Spektrum*,

(*iv*) $\tilde{\sigma}(T) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash \tilde{\rho}(T)$
das *verallgemeinerte Spektrum*,

(*v*) $r(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T-\lambda)^{-1} \in L(\mathcal{R}(T-\lambda), \mathcal{H})\big\}$
die *Menge der regulären Punkte* und

(*vi*) $\tilde{r}(T) = r(T) \cup \begin{cases} \{\infty\} & \text{falls } T: \ \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H} \text{ beschränkt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$
die *verallgemeinerte Menge der regulären Punkte.*

Dabei nennt man die Elemente von $r(T)$ bzw. $\tilde{r}(T)$ auch *Punkte regulären Typs.*

1.4.4 Lemma. *Ist T eine lineare Relation in $\mathcal{H}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Definiert man $R(\lambda) := (T-\lambda)^{-1}$, dann gilt für $\mu \in \mathbb{C}$*

$$R(\mu) \subseteq R(\lambda)(I + (\mu - \lambda)R(\mu)) \tag{1.4}$$

und Gleichheit, wenn $\ker(I + (\mu - \lambda)R(\mu)) = \{0\}$.

Beweis. Für $(h; k) \in R(\mu)$ ist $(k; h) \in (T - \mu)$, und damit $(k; h + \mu k) \in T$. Das heißt aber nichts anderes, als dass $(k; h + (\mu - \lambda)k) \in (T - \lambda)$, und daher $(h + (\mu - \lambda)k; k) \in R(\lambda)$.

Andereseits gilt für $(h; k) \in R(\mu)$, dass $(h; h + (\mu - \lambda)k) \in (I + (\mu - \lambda)R(\mu))$ ist und daher $(h; k) \in R(\lambda)(I + (\mu - \lambda)R(\mu))$. Also folgt (1.4).
Um nun Gleichheit zu zeigen, wähle $(h; k) \in R(\lambda)(I + (\mu - \lambda)R(\mu))$. Dann existiert ein l, sodaß

$$(h; l) \in (I + (\mu - \lambda)R(\mu)) \tag{1.5}$$

und $(l; k) \in R(\lambda)$ ist. Nach Definition von $R(\lambda)$ bedeutet dies, dass $(k; l+\lambda k) \in T$ und $(l + (\lambda - \mu)k; k) \in R(\mu)$ gilt. Damit erhält man $(l + (\lambda - \mu)k; (\mu - \lambda)k) \in (\mu - \lambda)R(\mu)$ und daraus

$$(l + (\lambda - \mu)k; l) \in (I + (\mu - \lambda)R(\mu)). \tag{1.6}$$

Zieht man nun (1.6) von (1.5) ab, so sieht man wegen $\ker(I+(\mu-\lambda)R(\mu)) = \{0\}$, dass $l + (\lambda - \mu)k = h$. Deswegen ist $(h; k) \in R(\mu)$ und der Beweis abgeschlossen. ❑

Damit erhält man ein aus der Funktionalanalysis bekanntes Ergebnis, die sog. *erste Resolventengleichung*:

1.4.5 Korollar. *Ist T eine lineare Relation in $\mathcal{H}$ und sind λ, $\mu \in \rho(T)$, dann gilt*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu),$$

insbesondere kommutieren alle $R(\lambda)$ für $\lambda \in \rho(T)$.

Beweis. In Lemma 1.4.4 wurde (1.4) gezeigt. Nun sind λ, $\mu \in \rho(T)$, also sind definitionsgemäß $R(\lambda)$ und $R(\mu) \in L(\mathcal{H})$. Da links und rechts in (1.4) Operatoren mit Definitionsbereich $\mathcal{H}$ stehen, muß in (1.4) Gleichheit gelten, und nach Umformung von (1.4) erhält man das Ergebnis. ❑

Man erhält nun auch eine weitere, aus der Funktionalanalysis bekannte Eigenschaft der (verallgemeinerten) Resolventenmenge, die auch für die (verallgemeinerte) Menge der regulären Punkte gilt.

1.4.6 Lemma. *Ist T eine lineare Relation in $\mathcal{H}$, dann gilt:*

(i) $\rho(T)$ und $\tilde{\rho}(T)$ sind offen in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(ii) $r(T)$ und $\tilde{r}(T)$ sind offen in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(iii) Die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda)$ von $\rho(T)$ nach $L(\mathcal{H})$ ist stetig.

Beweis. ad (i) : Sei $\mu \in \rho(T)$ und λ so gewählt, dass $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|}$. Nun ist der Operator $(I + (\mu - \lambda)R(\mu))$ bijektiv und bistetig (die Inverse ist die aus der Funktionalanalysis bekannte *Neumann'sche Reihe* $\sum_{n\geq 0}(\lambda - \mu)^n R(\mu)^n$). Auf Grund dessen erhält man, wenn man erst $R(\lambda)$ als $R(\lambda) \cdot I$ schreibt, die Identität

$$R(\lambda) = R(\lambda)\,[I + (\mu - \lambda)R(\mu)]\,[I + (\mu - \lambda)R(\mu)]^{-1}.$$

Mit Lemma 1.4.4 erhältman

$$R(\lambda) = R(\mu)\,[I + (\mu - \lambda)R(\mu)]^{-1}, \tag{1.7}$$

und damit ist $\mathcal{R}(\lambda)$ aus $L(\mathcal{H})$. Also $\lambda \in \rho(T)$, und somit ist $\rho(T)$ offen in $\mathbb{C}$.

Um zu zeigen, dass auch $\tilde{\rho}(T)$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist, nehme man an, ∞ sei in $\tilde{\rho}(T)$, also $T \in L(\mathcal{H})$. Ist $\lambda \neq \infty$ aus der Umgebung $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > \|T\|\} \cup \{\infty\}$ von ∞, so gilt wegen $(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1}$, dass

$$R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}T^n \in L(\mathcal{H}).$$

Also $\lambda \in \tilde{\rho}(T)$.

ad (ii) : Ist nun $\mu \in r(T)$, so ist definitionsgemäß

$$R(\mu) = (T-\mu)^{-1} : \ \mathcal{R}(T-\mu) \to \mathcal{H}$$

ein beschränkter linearer Operator. Wähle wieder ein λ so, dass $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|}$. Können wir nun zeigen, dass

$$(I + (\mu - \lambda)R(\mu)) : \ \mathcal{R}(T-\mu) \to \mathcal{R}(T-\lambda) \tag{1.8}$$

bijektiv und beschränkt invertierbar ist, so können wir, analog zum Beweis von (i), $R(\lambda)$ wieder als $R(\lambda) = R(\lambda) \cdot I|_{\mathcal{R}(T-\lambda)}$ schreiben und erhalten wieder unter Anwendung von Lemma 1.4.4

$$R(\lambda) = R(\mu)\left[I + (\mu - \lambda)R(\mu)\right]^{-1},$$

was $\lambda \in r(T)$ impliziert.

Dafür beachte man, dass $(f;g) \in T$ äquivalent zu $(g-\mu f; f) \in (T-\mu)^{-1}$ ist, was nach einfacher Rechnung wiederrum äquivalent zu $(g-\mu f; (\mu-\lambda)f + g - \mu f) = (g-\mu f; g-\lambda f) \in (I + (\mu-\lambda)R(\mu))$ ist. Damit ist $\mathcal{R}(I+(\mu-\lambda)R(\mu)) = \mathcal{R}(T-\lambda)$ und der Beweis des ersten Teils ist abgeschlossen. Ist $x \in \mathcal{R}(T-\mu)$, so gilt

$$\|\big(I + (\mu-\lambda)R(\mu)\big)x\| \geq \|x\| - |\mu - \lambda|\|R(\mu)\|\|x\| = \delta\|x\|, \quad \text{mit } \delta > 0.$$

Daraus folgt, dass $(I+(\mu-\lambda)R(\mu))$ injektiv und am Bild beschränkt invertierbar ist.

Um nun auch zu zeigen, daß $\tilde{r}(T)$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist, geht man analog zum Beweis, daß $\tilde{\rho}(T)$ offen in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ist, vor: Ist $\infty \in \tilde{r}(T)$, so ist T ein beschränkter Operator. Wählt man wieder ein μ mit $|\mu| > \|T\|$, so erhält man über die umgekehrte Dreiecksungleichung $\|(T-\mu)x\| \geq (|\mu| - \|T\|)\|x\| = \delta\|x\|$, wobei $\delta > 0$ gilt. Daraus ergibt sich dann direkt die beschränkte Invertierbarkeit von $(T-\mu)$ und daher ist $\mu \in \tilde{r}(T)$.

ad (iii) : Aus Gleichung (1.7) folgt unmittelbar, dass die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda)$ stetig auf $\rho(T)$ ist. ❑

1.4.7 Bemerkung. Ist T ein Operator, dann gilt $\lambda \in r(T)$ genau dann, wenn es eine Konstante $C_\lambda > 0$ gibt, sodass gilt

$$\|(T-\lambda)x\| \geq C_\lambda \|x\|, \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T).$$

1.4.8 Bemerkung. Eine beschränkte lineare Abbildung $B: \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist als Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{D}$ abgeschlossen ist. Um dies einzusehen betrachte man jene Abbildung von $\mathcal{D} \to B$, die jedem $x \in \mathcal{D}$ das Paar $(x; Bx)$ zuordnet. Diese Abbildung ist offensichtlich bistetig, und damit ist B genau dann vollständig, wenn $\mathcal{D}$ vollständig ist.

Auf die vorliegende Situation angewandt erhält man, dass, wenn $\lambda \in r(T)$ ist, T genau dann abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{R}(T-\lambda)$ abgeschlossen ist, denn $R(\lambda)$ ist für $\lambda \in r(T)$ eine beschränkte Abbildung von $\mathcal{R}(T-\lambda) \subseteq \mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Daraus erhält man folgendes Korollar:

1.4.9 Korollar. *Ist T abgeschlossen, so ist λ genau dann aus $r(T)$, wenn $\mathcal{R}(T-\lambda)$ abgeschlossen und $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ ist.*

Beweis. Der Schluß von Links nach Rechts wurde in der vorangehenden Bemerkung abgehandelt. Um jetzt die Umkehrung einzusehen, bemerke man, dass $R(\lambda): \mathcal{R}(T-\lambda) \to \mathcal{H}$ nach Voraussetzung ein linearer Operator ist, der nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig und damit beschränkt ist. ❑

1.4.10 Bemerkung. Aus dem letzten Beweis sieht man sofort, dass sich die Aussage von Korollar 1.4.9 dahingehend ausdehnen lässt, daß λ genau dann aus der Resolvente $\rho(T)$ ist, wenn $\mathcal{R}(T-\lambda) = \mathcal{H}$ und $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ ist.

Mit Hilfe von Lemma (1.4.4) konnten wir zeigen, daß für λ, μ aus der Resolvente $\rho(T)$ die erste Resolventengleichung

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)$$

gilt. Geht man nun umgekehrt davon aus, dass man eine Operatorfunktion R hat, die die erste Resolventengleichung erfüllt, so erhält man folgende Proposition:

1.4.11 Proposition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $R: \Omega \to L(\mathcal{H})$ erfülle die erste Resolventengleichung. Dann existiert genau eine lineare Relation $T \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, sodass $\Omega \subseteq \rho(T)$ und $R(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \Omega$.*

Beweis. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei angenommen, dass T_1 und T_2

$$(T_1 - \lambda)^{-1} = R(\lambda) = (T_2 - \lambda)^{-1}$$

erfüllen. Dann ist aber $T_1 - \lambda = R(\lambda)^{-1} = T_2 - \lambda$, und man sieht $T_1 = T_2 = R(\lambda)^{-1} + \lambda$. Dieses Ergebnis nimmt man als Anlaß her, um für $\lambda \in \Omega$ die lineare Relation T mit $T = R(\lambda)^{-1} + \lambda$ zu definieren, nur muß die Unabhängigkeit dieser Definition von λ gewährleistet sein. Man muß also den Schluß

$$(f; g) \in R(\lambda)^{-1} + \lambda \Rightarrow (f; g) \in R(\mu)^{-1} + \mu \quad (\lambda, \mu \in \Omega)$$

ziehen können. Ist $(f; g) \in R(\lambda)^{-1} + \lambda$, so folgt $(f; g - \lambda f) \in R(\lambda)^{-1}$, also $R(\lambda)(g - \lambda f) = f$. Daher ist $(\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda)(g - \lambda f) = (\lambda - \mu)R(\mu)f$ und man erhält aus der Resolventengleichung

$$[R(\lambda) - R(\mu)]\,(g - \lambda f) = (\lambda - \mu)R(\mu)f.$$

Wertet man beide Seiten aus, so ist

$$f - R(\mu)g + \lambda R(\mu)f = \lambda R(\mu)f - \mu R(\mu)f,$$

woraus aber $f = R(\mu)(g - \mu f)$ folgt, weshalb auch $(g - \mu f; f) \in R(\mu)$ ist. Nun ist der Beweis abgeschlossen, denn daraus folgt $(f; g) \in R(\mu)^{-1} + \mu$. ❑

1.5 Die Cayley Transformierte

1.5.1 Definition. Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, dann ist durch

$$MT := \{(\alpha f + \beta g; \gamma f + \delta g) : \ (f;g) \in T\} \tag{1.9}$$

wieder eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$ definiert.

1.5.2 Bemerkung. Betrachtet man für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ den Operator von $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ mit folgender Blockoperatordarstellung

$$\begin{pmatrix} \alpha I & \beta I \\ \gamma I & \delta I \end{pmatrix},$$

so ist er eine beschränkte lineare Abbildung, die T gerade in MT überführt. Wir können also M als lineare und beschränkte Abbildung von $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ betrachten. Klarerweise gilt $(\lambda M)T = MT$, wenn $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$.
In diesem Sinne ist die Adjungierte $M^* : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ bezügliche des Summenskalarproduktes auf $\mathcal{H}^2$ gegeben durch $M^* = \left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{smallmatrix}\right)$.

1.5.3 Bemerkung. Offensichtlich gelten für eine lineare Relation T und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgende grundlegende Eigenschaften:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T, \quad \lambda T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T = T, \quad JT = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T,$$
$$(T - \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} T, \quad (T-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T,$$

wobei J die durch Gleichung (1.3) definierte Abbildung bezeichnet.

1.5.4 Bemerkung. Für $T, S \leq \mathcal{H}^2$ und $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt stets

$$T \leq S \ \Rightarrow \ MT \leq MS.$$

1.5.5 Lemma. *Seien $M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann gilt $M(N(T)) = (MN)(T)$, dabei bezeichne MN das gewöhnliche Matrixprodukt. Ist insbesondere* $\det M \neq 0$*, so gilt $M^{-1}(MT) = T$.*

Beweis. Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ und $N = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, so gilt zunächst

$$\begin{aligned} M(N(T)) &= M(\{(af + bg; cf + dg) : \ (f;g) \in T\}) = \\ &= \Big\{\Big(\alpha(af + bg) + \beta(cf + dg); \gamma(af + bg) + \delta(cf + dg)\Big) : (f;g) \in T\Big\}. \end{aligned}$$

Wegen $MN = \left(\begin{smallmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$(MN)(T) = \Big\{\Big((\alpha a + \beta c)f + (\alpha b + \beta d)g; (\gamma a + \delta c)f + (\gamma b + \delta d)g\Big) : (f;g) \in T\Big\}.$$

Also $M(N(T)) = (MN)(T)$, womit das Lemma bewiesen wäre. ❑

1.5.6 Lemma. *Für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ gilt:*

(i) $\mathcal{D}(MT) = \mathcal{R}(T + \frac{\alpha}{\beta})$ für $\beta \neq 0$ und $\mathcal{D}(MT) = \mathcal{D}(T)$ falls $\beta = 0$.

(ii) $\mathcal{R}(MT) = \mathcal{R}(T + \frac{\gamma}{\delta})$ *für* $\delta \neq 0$ *und* $\mathcal{R}(MT) = \mathcal{D}(T)$ *falls* $\delta = 0$.

(iii) $\mathrm{mul}(MT) = \begin{cases} \det M \ker(T + \frac{\alpha}{\beta}) & \beta \neq 0 \\ \det M \,\mathrm{mul}(T) & \beta = 0, \alpha \neq 0 \\ \mathcal{R}(\delta T + \gamma I) & \alpha = \beta = 0. \end{cases}$

(iv) $\ker(MT) = \begin{cases} \det M \ker(T + \frac{\beta}{\alpha}) & \alpha \neq 0 \\ \det M \,\mathrm{mul}(T) & \alpha = 0, \beta \neq 0 \\ \mathcal{R}(\gamma T + \delta I) & \alpha = \beta = 0. \end{cases}$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus Gleichung (1.9).

ad (iii) : Es gilt

$$\mathrm{mul}(MT) = \{\gamma f + \delta g : (f; g) \in T,\ \alpha f + \beta g = 0\}.$$

Für $\beta \neq 0$ ergibt sich weiter

$$\mathrm{mul}(MT) = \{\gamma f - \delta \frac{\alpha}{\beta} f : f \in \ker(T + \frac{\alpha}{\beta})\} = \det M \ker(T + \frac{\alpha}{\beta})$$

und für $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ erhält man

$$\mathrm{mul}(MT) = \{\delta g : (0; g) \in T\} = \det M \,\mathrm{mul}(T).$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{mul}(MT) = \mathcal{R}(\delta T + \gamma)$ falls $\alpha = \beta = 0$.

ad (iv) : Diese Aussage folgt dirket aus (iii), denn es gilt

$$\ker(MT) = \mathrm{mul}((MT)^{-1}) = \mathrm{mul}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) MT) = \mathrm{mul}(\left(\begin{smallmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{smallmatrix}\right) T).$$ ❑

1.5.7 Korollar. *Ist M regulär, dann gilt: T ist abgeschlossen genau dann, wenn $M(T)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.5.2 ist $M : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ stetig. Wegen $\det M \neq 0$ existiert $M^{-1} : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ und ist ebenfalls stetig. Daher ist $M : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ ein Homöomorphismus und somit folgt die Behauptung. ❑

1.5.8 Bemerkung. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ wird durch

$$\phi_M(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

eine *Möbius Transformation* ([Con1]) definiert. Die Abbildung ϕ_M ist eine Bijektion von $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich. Dabei ist $\phi_M(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$ und $\phi_M(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$. (Die Fälle $\alpha = \gamma = 0$ oder $\gamma = \delta = 0$ sowie $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ können wegen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ nicht auftreten.) Sei weiters $N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, dann gilt

$$\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN} \quad \text{und} \quad \phi_M^{-1} = \phi_{M^{-1}}.$$

1.5.9 Proposition. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit* $\det M \neq 0$ *und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gibt es geeignete Konstanten $r, t, s \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, sodass*

$$(MT - \lambda)^{-1} = \begin{cases} t(T-r)^{-1} + sI & \lambda \neq \frac{\delta}{\beta} \\ tT + sI & \lambda = \frac{\delta}{\beta}, \end{cases}$$

wobei $\lambda = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(r) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)M\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(r)$. Weiters gilt

$$MT = \begin{cases} t\big(T + \frac{\alpha}{\beta}\big)^{-1} + sI & \beta \neq 0 \\ tT + sI & \beta = 0. \end{cases}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{\delta}{\beta}\}$, dann ist $\delta - \beta\lambda \neq 0$ und es gilt

$$(MT-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} MT = \begin{pmatrix} -\alpha\lambda + \gamma & -\beta\lambda + \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} T =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\lambda+\gamma}{-\beta\lambda+\delta} & 1 \\ \frac{\alpha}{-\beta\lambda+\delta} & \frac{\beta}{-\beta\lambda+\delta} \end{pmatrix} T,$$

Nun definiert man $r := \phi^{-1}_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(\lambda)$, also $\lambda = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(r) = \frac{\delta r + \gamma}{\beta r + \alpha}$. Dann gilt offensichtlich $-\beta\phi_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(r) + \delta = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta r + \alpha}$ und damit erhält man weiter

$$(MT-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\frac{\delta r+\gamma}{\beta r+\alpha}+\gamma}{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta r+\alpha}} & 1 \\ \frac{\alpha(\beta r+\alpha)}{\alpha\delta-\beta\gamma} & \frac{\beta(\beta r+\alpha)}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ \frac{\alpha(\beta r+\alpha)}{\alpha\delta-\beta\gamma} & \frac{\beta(\beta r+\alpha)}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{pmatrix} T =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta r+\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma} & \frac{(\beta r+\alpha)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T = \frac{(\beta r + \alpha)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}(T-r)^{-1} + \frac{\beta r + \alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} I.$$

Wegen $\phi_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(-\frac{\alpha}{\beta}) = \infty \notin \mathbb{C}$ muss stets $r \neq -\frac{\alpha}{\beta}$ gelten, also $(\beta r + \alpha) \neq 0$. Definiert man $t := \frac{(\beta r+\alpha)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}$ und $s := \frac{\beta r+\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, so folgt die gewünschte Darstellung. Für $\lambda = \frac{\delta}{\beta}$, $\beta \neq 0$, erhält man

$$(MT-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha\frac{\delta}{\beta} + \gamma & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\alpha\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma} & \frac{-\beta^2}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{pmatrix} T =$$
$$= \frac{-\beta^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} T + \frac{-\alpha\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} I$$

und es gilt $t := \frac{-\beta^2}{\alpha\delta-\beta\gamma} \neq 0$, da $\beta \neq 0$.
Es bleibt noch die zweite Identität zu zeigen. Für $\beta \neq 0$ gilt

$$MT = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} & 1 \\ \frac{\gamma}{\beta} & \frac{\delta}{\beta} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\beta} & \frac{-(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T =$$
$$= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta^2}\big(T + \frac{\alpha}{\beta}\big)^{-1} + \frac{\delta}{\beta} I,$$

und da $\det M \neq 0$ ist auch $t := -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta^2} \neq 0$. Für den Fall $\beta = 0$ ergibt sich, da wegen $\det M \neq 0$ stets $\alpha \neq 0$ und $\delta \neq 0$ gelten muss,

$$MT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha} & \frac{\delta}{\alpha} \end{pmatrix} T = \frac{\delta}{\alpha} T + \frac{\gamma}{\alpha} I.$$

Wegen $t := \frac{\delta}{\alpha} \neq 0$ hat man auch in diesem Fall geeignete Konstanten gefunden und somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

1.5.10 Korollar. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det M \neq 0$ und $N = \left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) M \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt*

$$\tilde{\rho}(MT) = \phi_N(\tilde{\rho}(T)) \quad \textit{sowie} \quad \tilde{r}(MT) = \phi_N(\tilde{r}(T)).$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gibt es nach Proposition 1.5.9 geeignete Konstanten $r, t, s \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, sodass

$$(MT - \lambda)^{-1} = \begin{cases} t(T-r)^{-1} + sI & \lambda \neq \frac{\delta}{\beta} \\ tT + sI & \lambda = \frac{\delta}{\beta}, \end{cases}$$

wobei $\lambda = \phi_N(r) = \frac{\delta r + \gamma}{\beta r + \alpha}$. Die linke Seite ist ein beschränkter linearer Operator genau dann, wenn die rechte Seite ein beschränkter linearer Operator ist. Daher ist $\lambda = \phi_N(r) \in \rho(MT) \backslash \{\frac{\delta}{\beta}\}$ genau dann, wenn $r \in \rho(T)$. Wegen $\lambda = \phi_N(r) = \frac{\delta}{\beta} \Leftrightarrow r = \infty$ gilt nach obiger Identität auch $\frac{\delta}{\beta} \in \rho(MT)$ genau dann, wenn T ein beschränkter linearer Operator ist, d.h. $r = \infty \in \tilde{\rho}(T)$.
Ebenfalls nach Proposition 1.5.9 gilt

$$MT = \begin{cases} t\left(T + \frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} + sI & \beta \neq 0 \\ tT + sI & \beta = 0. \end{cases}$$

Sei $\beta \neq 0$. Dann ist $\lambda = \infty = \phi_N(\frac{-\alpha}{\beta}) \in \tilde{\rho}(MT)$, d.h. MT ist ein beschränkter linearer Operator, genau dann, wenn $r = -\frac{\alpha}{\beta} \in \rho(T)$. Für $\beta = 0$ ergibt sich, dass $\lambda = \infty = \phi_N(\infty) \in \tilde{\rho}(MT) \Leftrightarrow r = \infty \in \tilde{\rho}(T)$. Insgesamt hat man somit gezeigt, dass $\tilde{\rho}(MT) = \phi_N(\tilde{\rho}(T))$ gilt.
Analog zeigt man die Beziehung $\tilde{r}(MT) = \phi_N(\tilde{r}(T))$. ❑

1.5.11 Korollar. *Sei $T \leq \mathcal{H}^2$, $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det M \neq 0$ und λ, r wie in 1.5.9, dann gilt*

$$\mathcal{R}(MT - \lambda) = \mathcal{R}(T - r).$$

Dabei ist $\mathcal{R}(T - \infty) := \mathcal{D}(T)$.

Beweis. Folgt aus Korollar 1.5.10. ❑

1.5.12 Definition. Für $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sind durch

$$\mathcal{C}_\mu : \begin{cases} \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2 \\ (f;g) \mapsto (g - \mu f; g - \overline{\mu} f) \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_\mu : \begin{cases} \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2 \\ (f;g) \mapsto (g - f; \mu g - \overline{\mu} f) \end{cases}$$

lineare Abbildungen auf $\mathcal{H}^2$ gegeben. Ist T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, so heißt $\mathcal{C}_\mu(T)$ die *Cayley Transformierte* von T und $\mathcal{F}_\mu(T)$ die *inverse Cayley Transformierte* von T.

1.5.13 Bemerkung. Die Abbildungen $\mathcal{C}_\mu : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ sowie $\mathcal{F}_\mu : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ sind beschränkte lineare Operatoren, denn es gilt (vgl. Bemerkung 1.5.2)

$$\mathcal{C}_\mu = \begin{pmatrix} -\mu I & I \\ -\overline{\mu} I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}_\mu = \begin{pmatrix} -I & I \\ -\overline{\mu} I & \mu I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\overline{\mu} & \mu \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\mu - \overline{\mu}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\overline{\mu} & \mu \end{pmatrix}$$

folgt aus Lemma 1.5.5 unmittelbar $\mathcal{F}_\mu(\mathcal{C}_\mu(T)) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{F}_\mu(T)) = T$.

1.5.14 Lemma. *Seien T, S lineare Relationen auf $\mathcal{H}$ und $\mu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt:*

(i) *Ist $T \leq S$, so folgt $\mathcal{C}_\mu(T) \leq \mathcal{C}_\mu(S)$ und $\mathcal{F}_\mu(T) \leq \mathcal{F}_\mu(S)$.*

(ii) *T ist abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{C}_\mu(T)$ bzw. $\mathcal{F}_\mu(T)$ abgeschlossen ist.*

(iii) $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(\mathcal{C}_\mu(T) - 1) = \mathcal{R}(\mathcal{F}_\mu(T) - \mu)$.

(iv) $\operatorname{mul}(T) = \ker(\mathcal{C}_\mu(T) - 1) = \ker(\mathcal{F}_\mu(T) - \mu)$ *sowie* $\operatorname{mul}(\mathcal{C}_\mu(T)) = \ker(T - \mu)$, $\operatorname{mul}(\mathcal{F}_\mu(T)) = \ker(T - 1)$.

(v) $\mathcal{C}_\mu(T)^{-1} = \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T)$ *und* $\mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T) = \mathcal{F}_\mu(T^{-1})$.

(vi) $\mathcal{C}_\mu(T) = I + (\mu - \overline{\mu})(T - \mu)^{-1}$.

Beweis.

ad (i) : Folgt aus Bemerkung 1.5.4.

ad (ii) : Folgt aus Korollar 1.5.7.

ad (iii) : Wegen $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{F}_\mu(T)) = T = \mathcal{F}_\mu(\mathcal{C}_\mu(T))$ folgt mit Lemma 1.5.6 (i)

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}\big(\mathcal{C}_\mu(\mathcal{F}_\mu(T))\big) = \mathcal{R}(\mathcal{F}_\mu(T) - \mu) = \mathcal{D}\big(\mathcal{F}_\mu(\mathcal{C}_\mu(T))\big) = \mathcal{R}(\mathcal{C}_\mu(T) - 1).$$

ad (iv) : Folgt aus Lemma 1.5.6 (iii),(iv).

ad (v) : Nach Bemerkung 1.5.3 gilt

$$\mathcal{C}_\mu(T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -\overline{\mu} & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} T = \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T)$$

und

$$\mathcal{F}_\mu(T^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\overline{\mu} & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\mu & -\overline{\mu} \end{pmatrix} T = \mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T).$$

ad (vi) : Mit den Rechenregeln aus Bemerkung 1.5.3 erhält man

$$I + (\mu - \overline{\mu})(T - \mu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu - \overline{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ \mu - \overline{\mu} & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{pmatrix} T = \mathcal{C}_\mu(T).$$

❑

1.5.15 Korollar. *Sei $T \leq \mathcal{H}^2$, dann gilt*

$$\tilde{\rho}(\mathcal{C}_\mu(T)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\overline{\mu} \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{\rho}(T)) \quad \textit{sowie} \quad \tilde{r}(\mathcal{C}_\mu(T)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\overline{\mu} \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{r}(T)),$$

und

$$\tilde{\rho}(\mathcal{F}_\mu(T)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \mu & -\overline{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{\rho}(T)) \quad \textit{sowie} \quad \tilde{r}(\mathcal{F}_\mu(T)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \mu & -\overline{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{r}(T)).$$

Beweis. Wegen $\mathcal{C}_\mu(T) = \left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{smallmatrix}\right)T$ wendet man Korollar 1.5.10 mit $M = \left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und somit $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\overline{\mu} \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)$ an. Um die zweite Aussage zu zeigen verwendet man $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -\overline{\mu} & -\mu \end{smallmatrix}\right)$ und daher $N = \left(\begin{smallmatrix} \mu & -\overline{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. ❑

1.5.16 Bemerkung. Eine andere Formulierung des letzten Korollars liefert

$$\lambda \in \tilde{\rho}(T) \Leftrightarrow \frac{\lambda - \overline{\mu}}{\lambda - \mu} \in \tilde{\rho}(\mathcal{C}_\mu(T)) \quad \text{sowie} \quad \lambda \in \tilde{r}(T) \Leftrightarrow \frac{\lambda - \overline{\mu}}{\lambda - \mu} \in \tilde{r}(\mathcal{C}_\mu(T)),$$

und

$$\lambda \in \tilde{\rho}(T) \Leftrightarrow \frac{\lambda\mu - \overline{\mu}}{\lambda - 1} \in \tilde{\rho}(\mathcal{F}_\mu(T)) \quad \text{sowie} \quad \lambda \in \tilde{r}(T) \Leftrightarrow \frac{\lambda\mu - \overline{\mu}}{\lambda - 1} \in \tilde{r}(\mathcal{F}_\mu(T)).$$

1.5.17 Korollar. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$ und $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt*

$$\mathcal{C}_\mu(T^*) = \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T)^* \quad \textit{und} \quad \mathcal{F}_\mu(T^*) = \mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T)^*.$$

Beweis. Wie man elementar sieht, gilt für einen bijektiven und bistetigen Operator $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und einen Teilraum $\mathcal{L} \leq \mathcal{H}$ stets $R(\mathcal{L}^\perp) = (R^{-*}\mathcal{L})^\perp$ gilt. Dabei steht R^{-*} abkürzend für $(R^{-1})^*$. Nach Lemma 1.2.3 (ii) und Bemerkung 1.5.3 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu(T^*) &= \left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)T^\perp = \left(\left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ -\overline{\mu} & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-*}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-*}T\right)^\perp = \\ &= \left(\frac{1}{\overline{\mu} - \mu}\left(\begin{smallmatrix} -1 & -\mu \\ 1 & \overline{\mu} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)T\right)^\perp = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & -\mu \\ 1 & \overline{\mu} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)T\right)^\perp = \\ &= \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \overline{\mu} & -1 \\ \mu & -1 \end{smallmatrix}\right)T\right)^\perp = \left(J\mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T)\right)^\perp = \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T)^*. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise zeigt man $\mathcal{F}_\mu(T^*) = \mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T)^*$. ❑

1.5.18 Definition. Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann heißt T

- ·) *symmetrisch*, falls $T \subseteq T^*$.
- ·) *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.
- ·) *isometrisch*, falls $T^{-1} \subseteq T^*$.
- ·) *unitär*, falls $T^{-1} = T^*$.

1.5.19 Lemma. *Sei $T \leq \mathcal{H}^2$, dann ist T eine isometrische Relation, genau dann wenn $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein isometrischer Operator ist, d.h. es gilt $(Tx, Ty) = (x, y)$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H}$.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei $(Tx;x) \in T^{-1}$ für $x \in \mathcal{D}(T)$. Da T ein isometrischer Operator ist gilt $(Tx,Ta) = (x,a)$ für alle $(a;Ta) \in T$, d.h. $(Tx,x) \in T^*$, also ist T eine isometrische Relation.
($\Rightarrow$) Für $(0;a) \in T$ folgt $(a;0) \in T^{-1} \subseteq T^*$ und man erhält weiter

$$0 = (0,x) = (a,y) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in T.$$

Setzt man für $(x;y) = (0;a) \in T$, so ergibt sich $(a,a) = 0$, d.h. $a = 0$, und somit ist T ein Operator.
Für $a,x \in \mathcal{D}(T)$ gilt $(Ta;a) \in T^{-1} \subseteq T^*$. Da $(x;Tx) \in T$ erhält man unmittelbar durch einsetzen in die Definiton der Adjungierten $(Ta,Tx) = (a,x)$ für alle $a,x \in \mathcal{D}(T)$, d.h. T ist ein isometrischer Operator. ❑

1.5.20 Korollar. *$T \leq \mathcal{H}^2$ ist eine unitäre Relation, genau dann wenn $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein bijektiver und isometrischer Operator ist.*

Beweis. Sei T eine unitäre Relation. Nach Lemma 1.5.19 ist T ein isometrischer Operator und daher stetig und injektiv. Somit ist auch T^{-1} ein injektiver Operator. Wegen $T^{-1} = T^*$ is T^{-1} abgeschlossen. Ein injektiver abgeschlossenere Operator mit stetiger Inverser hat abgeschlossenes Bild, also ist $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T^*)$ abgeschlossen. Nach Lemma 1.2.5 (ii) gilt

$$\mathcal{D}(T)^{\perp} = \mathrm{mul}(T^{-1}) = \ker(T) = \{0\}.$$

Daraus folgt $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, da $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen ist. Somit ist T ein stetiger überall definierter linearer Operator und daher abgeschlossen. Nach Lemma 1.4.1 folgt, dass $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist. Wegen

$$\mathcal{R}(T)^{\perp} = \ker(T^*) = \ker(T^{-1}) = \mathrm{mul}(T) = \{0\}$$

und da $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist gilt $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$.
Sei umgekehrt $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein bijektiver isometrischer Operator, d.h. $T^{-1} \subseteq T^*$. Da T bijektiv ist folgt $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$ und somit gilt $T^{-1} = T^*$. Also ist T unitär. ❑

1.5.21 Korollar. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$.*

(i) T ist isometrisch, genau dann wenn $\mathcal{F}_\mu(T)$ symmetrisch ist.
T ist symmetrisch, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(T)$ isometrisch ist.

(ii) T ist selbstadjungiert, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(T)$ unitär ist.
T ist unitär, genau dann wenn $\mathcal{F}_\mu(T)$ selbstadjungiert ist.

(iii) Sei S eine symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$ und $V = \mathcal{C}_\mu(S)$, dann gilt:
A ist eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $\mathcal{H}$, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(A)$ eine unitäre Erweiterung von V in $\mathcal{H}$ ist.
U ist eine unitäre Erweiterung von V in $\mathcal{H}$, genau dann wenn $\mathcal{F}_\mu(U)$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $\mathcal{H}$ ist.

(iv) Sei $\widetilde{\mathcal{H}}$ ebenfalls ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$, S eine symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$ und $V = \mathcal{C}_\mu(S)$, dann gilt:
$\tilde{A}$ ist eine selbstadjungierte Erweiterung (mit Austritt) von S in $\widetilde{\mathcal{H}}$, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(\tilde{A})$ eine unitäre Erweiterung (mit Austritt) von V in $\widetilde{\mathcal{H}}$ ist.

$\tilde{U}$ ist eine unitäre Erweiterung (mit Austritt) von V in $\widetilde{\mathcal{H}}$, genau dann wenn $\mathcal{F}_\mu(\tilde{U})$ eine selbstadjungierte Erweiterung (mit Austritt) von S in $\widetilde{\mathcal{H}}$ ist.

1.5.22 Bemerkung. Ist S eine symmetrische lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann nennt man $A \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $\mathcal{H}$, falls $S \subseteq A = A^*$ gilt. Sei weiters $\widetilde{\mathcal{H}}$ ein Hilbertraum der $\mathcal{H}$ als Teilraum enthält, so nennt man $\tilde{A} \leq \widetilde{\mathcal{H}} \times \widetilde{\mathcal{H}}$ eine selbstadjungierte Erweiterung mit Austritt in $\widetilde{\mathcal{H}}$, falls $S \subseteq \tilde{A} = \tilde{A}^*$. Analog erklärt man den Begriff einer unitären Erweiterung (mit Austritt) für isometrische Relationen.

Beweis (von Korollar 1.5.21).

ad (i) : T ist isometrisch, genau dann wenn $T^{-1} \subseteq T^* \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T^{-1}) \subseteq \mathcal{F}_{\overline{\mu}}(T^*)$. Nach Lemma 1.5.14 (v) und Korollar 1.5.17 ist dies äquivalent zu $\mathcal{F}_\mu(T) \subseteq \mathcal{F}_\mu(T)^*$, d.h. $\mathcal{F}_\mu(T)$ ist symmetrisch.
Ist T symmetrisch, d.h. $T \subseteq T^* \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T) \subseteq \mathcal{C}_{\overline{\mu}}(T^*) \Leftrightarrow \mathcal{C}_\mu(T)^{-1} \subseteq (\mathcal{C}_\mu(T))^*$ und somit ist $\mathcal{C}_\mu(T)$ isometrisch.

ad (ii) : Der Beweis verläuft analog zu (i).

ad (iii) : Nach (i) ist $V = \mathcal{C}_\mu(S)$ isometrisch. Sei A eine Erweiterung von S, dann gilt $S \subseteq A \Leftrightarrow V \subseteq \mathcal{C}_\mu(A)$, also ist $\mathcal{C}_\mu(A)$ eine Erweiterung von V. Wegen (ii) ist A selbstadjungiert, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(A)$ unitär ist.
Genauso zeigt man die zweite Aussage von Punkt (iii).

ad (iv) : Der Beweis verläuft analog zu (iii). ❑

1.5.23 Definition. Für $G^* = G = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert man eine hermitesche Form auf $\mathcal{H}^2$ durch

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right)_G := \left(G\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}^2,$$

wobei $\left(\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2)$ das übliche Summenskalarprodukt auf $\mathcal{H}^2$ bezeichnet.

1.5.24 Bemerkung. Sind $G^* = G = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben, so gilt

$$\left(M\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), M\left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right)_G = \left(M^*GM\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right)_{M^*GM},$$

wobei $M^* : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ gegeben ist durch $M^* = \left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{smallmatrix}\right)$, wenn man $\mathcal{H}^2$ mit dem Summenskalarprodukt versieht.

1.5.25 Definition. Für $\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}^2$ definiert man

$$\left\langle\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle := \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)},$$

$$\left[\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right] := \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} f_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right)\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)}.$$

1.5.26 Korollar. *Für $\mu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ gilt*

$$[\mathcal{C}_\mu., \mathcal{C}_\mu.] = 2\,\mathrm{Im}\,\mu \langle .,. \rangle, \quad \langle \mathcal{F}_\mu., \mathcal{F}_\mu. \rangle = \frac{1}{2\,\mathrm{Im}\,\mu}[.,.].$$

Beweis. Nach Bemerkung 1.5.24 gilt

$$[\mathcal{C}_\mu.,\mathcal{C}_\mu.] = \Big(\big(\begin{smallmatrix}-\mu & 1\\ -\overline{\mu} & 1\end{smallmatrix}\big)^*\big(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}-\mu & 1\\ -\overline{\mu} & 1\end{smallmatrix}\big).,.\Big) = \Big(\big(\begin{smallmatrix}-\overline{\mu} & -\mu\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}-\mu & 1\\ \overline{\mu} & -1\end{smallmatrix}\big).,.\Big) =$$
$$= \Big(\big(\begin{smallmatrix}0 & -\overline{\mu}\\ \overline{\mu}-\mu & 0\end{smallmatrix}\big).,.\Big) = \frac{\mu-\overline{\mu}}{i}\langle .,.\rangle = 2\,\mathrm{Im}\,\mu\langle .,.\rangle.$$

Die zweite Gleichung folgt aus $\mathcal{C}_\mu \circ \mathcal{F}_\mu = I$. ❑

1.5.27 Bemerkung. Ist T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann gilt $T^* = T^{\langle\perp\rangle}$. Diese Gleichheit beruht auf der Tatsache, dass $T^* = (JT)^\perp$ und $J = i\big(\begin{smallmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{smallmatrix}\big)$. Weiters gilt für $(f;g) \in \mathcal{H}^2$ stets

$$\langle (f;g),(f;g)\rangle = \Big(\big(\begin{smallmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}f\\ g\end{smallmatrix}\big),\big(\begin{smallmatrix}f\\ g\end{smallmatrix}\big)\Big) = \Big(\big(\begin{smallmatrix}ig\\ -if\end{smallmatrix}\big),\big(\begin{smallmatrix}f\\ g\end{smallmatrix}\big)\Big) = i(g,f) - i(f,g).$$

Also folgt $\langle (f;g),(f;g)\rangle = 2\,\mathrm{Im}(f,g)$. Für $[.,.]$ erhält man

$$[(f;g),(f;g)] = \Big(\big(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}f\\ g\end{smallmatrix}\big),\big(\begin{smallmatrix}f\\ g\end{smallmatrix}\big)\Big) = \|f\|^2 - \|g\|^2.$$

1.5.28 Definition. Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann heißt T *dissipativ* falls $\mathrm{Im}(g,f) \geq 0$, d.h. $\langle (f;g),(f;g)\rangle \leq 0$, für alle $(f;g) \in T$ gilt.

1.5.29 Bemerkung. Ist T ein linearer Operator so besagt diese Definition gerade, dass $\mathrm{Im}(Tf,f) \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$.

1.5.30 Proposition. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann ist T dissipativ genau dann, wenn $\mathcal{C}_\mu(T)$, für $\mu \in \mathbb{C}^-$, ein kontraktiver Operator ist.*

Beweis. Für $(f;g) \in T$ folgt aus Korollar 1.5.26

$$\big[\mathcal{C}_\mu((f;g)),\mathcal{C}_\mu((f;g))\big] = 2\,\mathrm{Im}\,\mu\langle (f;g),(f;g)\rangle.$$

Ist $(a;b) = \mathcal{C}_\mu((f;g))$, so ist T dissipativ, genau dann wenn $\|a\|^2 - \|b\|^2 \geq 0$ für alle $(a;b) \in \mathcal{C}_\mu(T)$. Also wenn $\|b\| \leq \|a\|$ für alle $(a;b) \in \mathcal{C}_\mu(T)$ gilt, und daher ist $\mathcal{C}_\mu(T)$ ein Operator. Weiters gilt $\|\mathcal{C}_\mu(T)a\| \leq \|a\|$, d.h. $\mathcal{C}_\mu(T)$ ist ein kontraktiver Operator. ❑

1.5.31 Bemerkung. Eine entsprechende Aussage gilt für maximial dissipative Realtionen, d.h. es gibt keine echt größere dissipative Relation. Eine lineare Realtion T auf $\mathcal{H}$ ist maximal dissipativ, genau dann wenn $\mathcal{C}_\mu(T)$, für $\mu \in \mathbb{C}^+$, ein überall definierter kontraktiver Operator ist.

1.5.32 Definition. Für $T \leq \mathcal{H}^2$ und $\lambda \in \tilde{r}(T)$ definiert man die sogenannten *Defekträume* durch

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{R}(T - \overline{\lambda})^\perp.$$

Dabei ist wieder $\mathcal{R}(T-\overline{\lambda})^\perp = \mathcal{D}(T)^\perp$ falls $\lambda = \infty$. Oft werden Defekträume von unterschiedlichen Relationen in Beziehung gesetzt und daher schreibt man auch $\mathcal{N}_\lambda(T)$.

1.5.33 Bemerkung. Ist T ein beschränkter linearer nicht notwendigerweise überall definierter Operator und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$, dann ist $\lambda \in \tilde{r}(T)$ (vgl. Beweisende von Lemma 1.4.6). Ist T sogar isometrisch, dann gilt $\|T\| = 1$ und somit

$\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}} \subseteq \tilde{r}(T)$. Da T^{-1} ebenfalls isometrisch ist gilt auch $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}} \subseteq \tilde{r}(T^{-1})$. Wegen $T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) T$ ergibt sich unter Verwendung von Korollar 1.5.10 weiter

$$\tilde{r}(T^{-1}) = \tilde{r}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) T) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{r}(T)) = \frac{1}{\tilde{r}(T)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \frac{1}{z} \in \tilde{r}(T)\}.$$

Demnach gilt für einen isometrischen Operator T stets $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T} \subseteq \tilde{r}(T)$.

1.5.34 Bemerkung. Sei S eine symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$. Nach Korollar 1.5.21 (i) ist die Cayley Transformierte $T := \mathcal{C}_\mu(S)$ isometrisch und nach der vorigen Bemerkung gilt

$$\left\{ \frac{z-\mu}{z-\overline{\mu}} : \ z \in \tilde{r}(S) \right\} = \tilde{r}(T) \supseteq \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}.$$

Mit Korollar 1.5.15 erhält man weiter

$$\tilde{r}(S) = \tilde{r}(\mathcal{F}_\mu(\mathcal{C}_\mu(S))) = \tilde{r}(\mathcal{F}_\mu(T)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \mu & -\overline{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)} \tilde{r}(T) \supseteq \phi_{\left(\begin{smallmatrix} \mu & -\overline{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

1.5.35 Proposition. *Sei S eine symmetrische lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann ist* $\dim \mathcal{N}_\lambda$ *konstant für $\lambda \in \mathbb{C}^+$ sowie für $\lambda \in \mathbb{C}^-$.*

Der Beweis beruht auf folgendem Resultat:

1.5.36 Lemma. *Es sei T ein beschränkter Operator in $\mathcal{H}$, dann gilt* $\dim \mathcal{N}_\lambda$ *ist lokal konstant auf $\tilde{r}(T)$, d.h. konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{r}(T)$.*

Um diese Aussage zu beweisen benötigt man den Begriff der *Öffnung* zweier Teilräume von $\mathcal{H}$.

1.5.37 Definition. Sind $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathcal{H}$ mit zugehörigen orthogonalen Projektionen P_1, P_2, so heißt die Zahl $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) := \|P_1 - P_2\|$ die *Öffnung* der Teilräume $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

1.5.38 Lemma. *Sind $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathcal{H}$. Dann gilt für die Öffnung:*

(i) $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \leq 1$.

(ii) Gibt es ein $x_0 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1^\perp$, $x_0 \neq 0$, so folgt $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 1$.

(iii) Aus $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < 1$ *folgt* $\dim(\mathcal{L}_1) = \dim(\mathcal{L}_2)$.

(iv) $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, *wobei*

$$\rho_1 := \sup_{x \in \mathcal{L}_2, \|x\|=1} \|(I - P_1)x\| \ \textit{und} \ \rho_2 := \sup_{x \in \mathcal{L}_1, \|x\|=1} \|(I - P_2)x\|.$$

Beweis.

ad (i) : Wegen $P_2 - P_1 = P_2(I - P_1) - (I - P_2)P_1$ folgt für $x \in \mathcal{H}$

$$\|(P_2 - P_1)x\|^2 = \|P_2(I - P_1)x\|^2 + \|(I - P_2)P_1 x\|^2 \leq \|(I - P_1)x\|^2 + \|P_1 x\|^2 = \|x\|^2.$$

ad (ii) : Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Gleichung $(P_2 - P_1)x_0 = P_2x_0 = x_0$ und Punkt (i).

ad (iii) : Ist $\dim \mathcal{L}_1 < \dim \mathcal{L}_2$, dann gilt sicher $\dim P_2\mathcal{L}_1 < \dim \mathcal{L}_1 < \dim \mathcal{L}_2$. Daher gibt es ein $x_0 \in \mathcal{L}_2$, $x_0 \neq 0$, sodass $x_0 \perp P_2\mathcal{L}_1$. Daraus folgt $x_0 \in \mathcal{L}_1^\perp$ und somit $x_0 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1^\perp$. Nach Aussage (ii) folgt $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 1$.

ad (iv) : Zunächst zeigt man $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \geq \max\{\rho_1, \rho_2\}$: Es gilt

$$\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)^2 = \sup_{\substack{y\in\mathcal{H}\\ y\neq 0}} \frac{\|(P_2 - P_1)y\|^2}{\|y\|^2} =$$

$$= \sup_{\substack{y\in\mathcal{H}\\ y\neq 0}} \frac{\|P_2(I - P_1)y\|^2 + \|(I - P_2)P_1y\|^2}{\|y\|^2} \geq \sup_{\substack{y\in\mathcal{L}_1\\ y\neq 0}} \frac{\|(I - P_2)y\|^2}{\|y\|^2} = \rho_1^2.$$

Genauso zeigt man $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)^2 \geq \rho_2^2$ und somit folgt $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \geq \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Nun zur umgekehrten Abschätzung: Für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|P_2(I-P_1)x\|^2 = \big(P_2(I - P_1)x, (I - P_1)x\big) = \big((I - P_1)P_2(I - P_1)x, (I - P_1)x\big) \leq$$

$$\leq \|(I - P_1)P_2(I - P_1)x\|\|(I - P_1)x\| \leq \rho_1\|P_2(I - P_1)x\|\|(I - P_1)x\|.$$

Daraus folgt $\|P_2(I-P_1)x\| \leq \rho_1\|(I-P_1)x\|$ und mit der gleichen Vorgehensweise erhält man die Abschätzung $\|(I - P_2)P_1x\| \leq \rho_2\|P_1x\|$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(P_2 - P_1)x\|^2 &= \|P_2(I - P_1)x\|^2 + \|(I - P_2)P_1x\|^2 \leq \\ &\leq \rho_1^2\|(I - P_1)x\|^2 + \rho_2^2\|P_1x\|^2 \leq \max\{\rho_1^2, \rho_2^2\}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Da $x \in \mathcal{H}$ beliebig war folgt $\Theta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \leq \max\{\rho_1, \rho_2\}$ und somit die Behauptung. ❑

Beweis (von Lemma 1.5.36). Für $\lambda \in r(T)$ bezeichnen wir mit P_λ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{R}(T - \lambda)^\perp$. Wir zeigen, dass zu jedem $z_0 \in r(T)$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\|P_z - P_{z_0}\| < 1$ für alle $|z - z_0| < \delta$. Dann folgt die Behauptung mit Lemma 1.5.38 (iii). Für $x \in \mathcal{D}(T)$ gibt es nach Bemerkung 1.4.7 eine positive Konstante C_{z_0}, sodass

$$C_{z_0}\|x\| \leq \|(T - z_0)x\| \leq \|(T - z)x\| + |z - z_0|\|x\|.$$

Daraus folgt die Beziehung

$$\|(T - z)x\| \geq \frac{2}{3}C_{z_0}\|x\|, \text{ für } |z - z_0| < \frac{1}{3}C_{z_0}.$$

Für $x_0 \in \mathcal{N}_z$, $\|x_0\| = 1$ und $|z - z_0| < \frac{1}{3}C_{z_0}$ ergibt sicher daher

$$\|(I - P_{z_0})x_0\| = \sup_{y\in\mathcal{D}(T)} \frac{\big|\big(x_0, (T - z_0)y\big)\big|}{\|(T - z_0)y\|} = \sup_{y\in\mathcal{D}(T)} \frac{\big|\big(x_0, (T - z + z - z_0)y\big)\big|}{\|(T - z_0)y\|} =$$

$$= \sup_{y\in\mathcal{D}(T)} \frac{|z - z_0||(x_0, y)|}{\|(T - z_0)\|} \leq \frac{1}{3}C_{z_0}C_{z_0}^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt $\rho_{z_0} \leq \frac{1}{3}$. Ebenso zeigt man, dass $\rho_z \leq \frac{1}{2}$ ist. Nach Lemma 1.5.38 (iv) gilt somit $\Theta(\mathcal{L}_z, \mathcal{L}_{z_0}) < 1$ und es folgt die Behauptung für $\lambda \in r(T)$.
Für $\infty \in \tilde{r}(T)$ wählt man zunächst $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > \|T\|$. Dann ist $\mu \in \tilde{r}(T)$. Setzt man $S := (T-\mu)^{-1}$ und definiert $M := \left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt nach Korollar 1.5.11

$$\mathcal{R}(S-\lambda) = \mathcal{R}(MT-\lambda) = R(T-r),$$

wobei $\lambda = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(r)$. Daher entspricht $r = \infty$ dem Fall $\lambda = 0$. Nach Korollar 1.5.10 gilt $\phi_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{r}(T)) = \tilde{r}(MT) = \tilde{r}(S)$. Da S ein beschränkter linearer Operator ist, existiert nach dem bereits gezeigten eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$, sodass $\dim(\mathcal{R}(S-\lambda))^\perp$ konstant ist für $\lambda \in U$. Also folgt die Existenz einer Umgebung $V \in \mathfrak{U}(\infty)$, sodass $\dim(\mathcal{R}(T-r))^\perp$ konstant ist für $r \in V$. ❑

Um die Übersichtlichkeit im folgenden Beweis zu wahren definiert man für $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ die Funktion

$$c_\mu(\lambda) := \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\overline{\mu} \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(\lambda) = \frac{\lambda - \overline{\mu}}{\lambda - \mu}.$$

Beweis (von Proposition 1.5.35). $T = \mathcal{C}_\mu(S)$ ist ein isometrischer Operator und nach Bemerkung 1.5.33 gilt $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{T} \subseteq \tilde{r}(T)$. Demnach zerfällt $\tilde{r}(T)$ höchstens in zwei Komponenten. Nach Lemma 1.5.36 ist $\dim \mathcal{N}_z(T)$ konstant für $z \in \mathbb{D}$ und entsprechend für $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{\mathbb{D}}$. Wegen Korollar 1.5.11 gilt

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}_\mu(S) - c_\mu(\lambda)) = \mathcal{R}(S-\lambda).$$

Ersetzt man λ durch $\overline{z}$ und geht zu den orthogonalen Komplementen über, so erhält man

$$\mathcal{N}_{\overline{c_\mu(\overline{z})}}(T) = \mathcal{R}(T - c_\mu(\overline{z}))^\perp = \mathcal{R}(S-\overline{z})^\perp = \mathcal{N}_z(S). \tag{1.10}$$

O.B.d.A. sei $\mu \in \mathbb{C}^+$, dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C}^+ \;&\Leftrightarrow\; |\overline{c_\mu(\overline{\lambda})}| < 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{c_\mu(\overline{\lambda})} \in \mathbb{D}, \\ \lambda \in \mathbb{C}^- \;&\Leftrightarrow\; |\overline{c_\mu(\overline{\lambda})}| > 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{c_\mu(\overline{\lambda})} \in \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{\mathbb{D}} \end{aligned}$$

und somit folgt wegen (1.10) die Behauptung. ❑

Kapitel 2

Erweiterungstheorie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Erweiterungen einer symmetrischen Relation $S \leq \mathcal{H}^2$. Weiters sei S stets abgeschlossen. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Eigenschaft der Symmetrie beim Abschließen erhalten bleibt. Für $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}$ sei $n_{\pm} := \dim \mathcal{R}(S - \overline{\lambda})^{\perp}$. Dabei ist die Hilbertraumdimension, also die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis, gemeint. Man bezeichnet das Paar (n_+, n_-) als den Defektindex von S.

Analytizität Banachraum-wertiger Funktionen

Wir wollen den Begriff der Analytizität für Banachraum- und im speziellen für operatorwertige Funktionen erklären und näher untersuchen.

2.0.1 Definition. Es sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : D \to X$ heißt *analytisch* falls für alle $z \in D$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in X,$$

wobei die Konvergenz bezüglich $\|.\|$ zu verstehen ist. Man nennt f *schwach analytisch*, falls für alle $x' \in X'$ die Funktion $x' \circ f$ analytisch in D ist.

2.0.2 Bemerkung. Ist $f : D \to X$ analytisch, dann ist f auch schwach analytisch. Wie wir später sehen werden (Korollar 2.0.6) gilt auch die Umkehrung.

2.0.3 Korollar. *Ist T eine lineare Relation in dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist die Abbildung $z \mapsto R(z)$ analytisch auf $\rho(T)$.*

Beweis. Sei $z \in \rho(T)$. Nach Lemma 1.4.6 (i) ist $\rho(T)$ offen und daher gibt es ein $h_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sodass $z + h \in \rho(T)$ für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \leq |h_0|$. Nach Korollar 1.4.5 gilt somit für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $0 < |h| \leq |h_0|$

$$\frac{R(z+h) - R(z)}{h} = \frac{R(z+h) - R(z)}{z + h - z} = R(z+h)R(z).$$

Nach Lemma 1.4.6 (iii) ist die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda)$ stetig auf $\rho(T)$ und daher ergibt sich

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(z+h) - R(z)}{h} = R(z)^2 \in L(\mathcal{H}),$$

also ist die Abbildung $z \mapsto R(z)$ analytisch auf $\rho(T)$. ❑

2.0.4 Proposition. *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to X$ analytisch, dann gilt die Cauchy'sche Integralformel*

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \in X,$$

wobei C eine einfach geschlossene Jordankurve ist, die ganz in D enthalten ist und ζ_0 innerhalb von C liegt.

Beweis. Sei $x' \in X'$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Dann ist die Abbildung $\zeta \mapsto x'(f(\zeta))$ analytisch, also gilt die Cauchysche Integralformel. Man erhält daher für alle $x' \in X'$

$$x'(f(\zeta_0)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{x'(f(\zeta))}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = x'\Big(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta\Big).$$

Das Kurvenintegral existiert als Grenzwert eines Banachraum-wertigen Netzes, wie man aus der Stetigkeit von f analog zum komplexwertigen Fall zeigen kann. Daraus ergibt sich

$$x'\Big(f(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta\Big) = 0, \quad \forall x' \in X',$$

und somit folgt die Behauptung. ❑

2.0.5 Lemma. *Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ Banachräume, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $x \in X$ und*

$$T : \begin{cases} D \to L(X, Y) \\ \zeta \mapsto T(\zeta) \end{cases} \quad \textit{sowie} \quad T_x : \begin{cases} D \to Y \\ \zeta \mapsto T(\zeta)x. \end{cases}$$

Dann ist T analytisch genau dann, wenn T_x für alle $x \in X$ analytisch ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn für $\zeta \in D$ der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{T(\zeta+h)-T(\zeta)}{h}$ bezüglich der Operatornorm existiert, dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(\zeta + h)x - T(\zeta)x}{h}$$

für alle $x \in X$, da für $\zeta \in D$ die Abbildung $T(\zeta) \mapsto T_x(\zeta)$ von $L(X, Y) \to Y$ stetig ist.
($\Leftarrow$) Nach Vorraussetzung ist T_x analytisch für alle $x \in X$, also gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$T(\zeta_0)x = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T(\zeta)x}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Es ist zu zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(\zeta_0 + h) - T(\zeta_0)}{h}$$

in $L(X,Y)$ existiert. Dies ist äquivalent zu der Cauchy Bedingung

$$\lim_{g,h\to 0} \frac{T(\zeta_0+h)-T(\zeta_0)}{h} - \frac{T(\zeta_0+g)-T(\zeta_0)}{g} = 0 \tag{2.1}$$

Für $h \neq g, h \neq 0, g \neq 0$ definiert man den Operator

$$\Gamma(g,h) := \frac{1}{h-g}\Big[\frac{T(\zeta_0+h)-T(\zeta_0)}{h} - \frac{T(\zeta_0+g)-T(\zeta_0)}{g}\Big] \in L(X,Y),$$

und erhält für alle $x \in X$

$$\|\Gamma(g,h)x\| = \left\| \frac{1}{h-g}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C T(\zeta)x\left(\frac{\frac{1}{\zeta-(\zeta_0+h)}-\frac{1}{\zeta-\zeta_0}}{h}+\frac{\frac{1}{\zeta-(\zeta_0+g)}-\frac{1}{\zeta-\zeta_0}}{g}\right)d\zeta\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C T(\zeta)x\frac{1}{(\zeta-\zeta_0-h)(\zeta-\zeta_0-g)(\zeta-\zeta_0)}d\zeta\right\| \leq$$

$$\leq \frac{l(C)}{2\pi}\max_{\zeta\in C}\|T(\zeta)x\|\left(\frac{2}{\delta}\right)^3 =: K(x)$$

wobei $\delta = d(C,\zeta_0) > 0$ und $|h|,|g| \leq \frac{\delta}{2}$. Es gilt also

$$\forall x \in X: \ \|\Gamma(g,h)x\| \leq K(x), \quad \forall |g|,|h| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Existenz einer Konstanten $K > 0$, sodass $\|\Gamma(g,h)\| \leq K$. Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit der Gleichung (2.1). ❑

2.0.6 Korollar. *Sei X ein Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$, D offen, und $f : D \to X$. Ist $x'(f) : D \to \mathbb{C}$ analytisch für alle $x' \in X'$, dann ist bereits f analytisch.*

Beweis. Fasst man X als abgeschlossenen Teilraum des Bidualraumes $X'' = L(X',\mathbb{C})$ auf, dann ist $f : D \to X \subseteq L(X',\mathbb{C})$. Nach Vorraussetzung ist die Abbildung

$$f_{x'} : \begin{cases} D \to \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto f(\lambda)x' := x'(f(\lambda)) \end{cases}$$

analytisch für alle $x' \in X'$. Nach Lemma 2.0.5 folgt, dass f analytisch ist. ❑

2.0.7 Korollar. *Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq \mathbb{C}$, D offen, und $T : D \to L(X,Y)$. Ist die Abbildung*

$$\varphi : \begin{cases} D \to \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto y'(T(\lambda)x) \end{cases}$$

für alle $y' \in Y'$ und $x \in X$ analytisch, dann ist auch T analytisch.

Beweis. Nach Korollar 2.0.6 ist die Abbildung $\lambda \mapsto T(\lambda)x$ für alle $x \in X$ analytisch und mit Lemma 2.0.5 folgt, dass T analytisch ist. ❑

2.0.8 Bemerkung. Zusammenfassend kann man sagen, dass für $T : D \to L(X,Y)$ die Analytizitätsbegriffe (*i*) T ist analytisch

(*ii*) T ist stark analytisch, d.h. die Abbildung $\zeta \mapsto T(\zeta)x$ ist analytisch für alle $x \in X$

(*iii*) T ist schwach analytisch, d.h. die Abbildung $\zeta \mapsto y'(T(\zeta)x)$ ist analytisch für alle $x \in X$ und $y' \in Y'$

äquivalent sind.

2.1 Defekträume

2.1.1 Lemma. *Sei S eine lineare (abgeschlossene symmetrische) Relation in $\mathcal{H}$, dann gilt: S ist selbstadjungiert genau dann, wenn $n_+ = n_- = 0$ gilt.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und betrachte die Cayley Transformierte $V = \mathcal{C}_\mu(S)$. Mit Lemma 1.5.6 (i) sowie (ii) folgt, dass $\mathcal{D}(\mathcal{C}_\mu(S)) = \mathcal{R}(S-\mu)$ und $\mathcal{R}(\mathcal{C}_\mu(S)) = \mathcal{R}(S-\overline{\mu})$ gilt. Weiters ist S symmetrisch, also erhält man mit Korollar 1.5.21 (i), dass $V : \mathcal{R}(S-\mu) \to \mathcal{R}(S-\overline{\mu})$ isometrisch ist. Weiters ist V unitär genau dann, wenn $\mathcal{R}(S-\mu) = \mathcal{H}$ und $\mathcal{R}(S-\overline{\mu}) = \mathcal{H}$. Dies ist äquivalent zu $n_+ = n_- = 0$. Nach Korollar 1.5.21 (ii) ist V genau dann unitär, wenn S selbstadjungiert ist. ❑

2.1.2 Korollar. *Für $A = A^* \leq \mathcal{H}^2$ gilt $\rho(A) \supseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

Beweis. Setzt man $U = \mathcal{C}_\mu(A)$, für ein $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, dann ist U unitär (Korollar 1.5.21 (ii)) und daher gilt $\tilde{\rho}(U) \supseteq \mathbb{C}_\infty\backslash\mathbb{T}$. Nach Korollar 1.5.15 gilt daher

$$\tilde{\rho}(A) = \tilde{\rho}(\mathcal{F}_\mu(U)) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix}\mu & -\overline{\mu}\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)}(\tilde{\rho}(U)) \supseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$ ❑

2.1.3 Lemma. *Sei S eine abgeschlossene symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$. Dann besitzt S eine selbstadjungierte Erweiterung A in $\mathcal{H}$ genau dann, wenn $n_+ = n_-$ gilt.*

Beweis. Zunächst betrachtet man wieder die Cayley Transformierte $V = \mathcal{C}_\mu(S)$ für ein $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann ist $V : \mathcal{R}(S-\mu) \to \mathcal{R}(S-\overline{\mu})$ isometrisch. Bild- und Definitionsbereich ergeben sich wieder aus Lemma 1.5.6. Da $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subseteq r(S)$, folgt mit Korollar 1.4.9, dass $\mathcal{R}(S-z)$ abgeschlossen ist für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
($\Leftarrow$) Die Räume $\mathcal{N}_{\overline{\mu}} = \mathcal{R}(S-\mu)^\perp$ sowie $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{R}(S-\overline{\mu})^\perp$ sind abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ und nach Vorraussetzung haben sie die gleiche Dimension. Daher existiert eine unitäre Abbildung $V' : \mathcal{N}_{\overline{\mu}} \to \mathcal{N}_\mu$. Um dies einzusehen, betrachtet man einfach eine Orthonormalbasis in $\mathcal{N}_{\overline{\mu}}$ sowie in $\mathcal{N}_\mu$.
Weiters gilt $\mathcal{H} = \mathcal{R}(S-\mu) \oplus \mathcal{N}_{\overline{\mu}}$ sowie $\mathcal{H} = \mathcal{R}(S-\overline{\mu}) \oplus \mathcal{N}_\mu$. Daher läßt sich $x \in \mathcal{H}$ schreiben als $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{R}(S-\mu)$ und $x_2 \in \mathcal{N}_{\overline{\mu}}$. Nun definiert man die Abbildung

$$U : \begin{cases} \mathcal{R}(S-\mu) \oplus \mathcal{N}_{\overline{\mu}} \to \mathcal{R}(S-\overline{\mu}) \oplus \mathcal{N}_\mu \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 \mapsto V(x_1) + V'(x_2) \end{cases}.$$

Offensichtlich ist $U \supseteq V$, und U ist isometrisch und surjektiv, also unitär. Nach Lemma 1.5.14 (i) gilt $\mathcal{F}_\mu(U) \supseteq S$. Wegen Korollar 1.5.21 (ii) ist $A := \mathcal{F}_\mu(U)$ selbstadjungiert, und somit haben wir eine selbstadjungierte Erweiterung von

S in $\mathcal{H}$ gefunden.
($\Rightarrow$) Sei $A = A^* \supseteq S$ und $U := \mathcal{C}_\mu(A) \supseteq \mathcal{C}_\mu(S)$ die Cayleytransformierte für ein $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Nach Korollar 1.5.21 (ii) ist $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär. Ist V die Einschränkung von U auf $\mathcal{R}(S-\mu)$, dann gilt $V : \mathcal{R}(S-\mu) \to \mathcal{R}(S-\overline{\mu})$. Ist $x_2 \in \mathcal{R}(S-\mu)^\perp$, so folgt $U(x_2) \perp \mathcal{R}(S-\overline{\mu}) = V(\mathcal{R}(S-\mu))$. Ist weiters $y_1 \in \mathcal{R}(S-\mu)$, dann ist $Vy_1 \in \mathcal{R}(S-\overline{\mu})$, und es gilt

$$(Ux_2, Uy_1) = (x_2, y_1) = 0.$$

Demnach ist $V' = U|_{\mathcal{R}(S-\mu)^\perp} : \mathcal{R}(S-\mu)^\perp \to \mathcal{R}(S-\overline{\mu})^\perp$ eine unitäre Abbildung von $\mathcal{N}_{\overline{\mu}}$ auf $\mathcal{N}_\mu$, also gilt $n_+ = n_-$. ❑

2.1.4 Bemerkung. Die Vorraussetzung $n_+ = n_-$ in Lemma 2.1.3 garantiert die Existenz einer selbstadjungierten Erweiterung A in $\mathcal{H}$. Ist $n_+ \neq n_-$, so kann dennoch eine selbstadjungierte Erweiterung in einem größeren Hilbertraum $\widetilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ gefunden werden.

Dies sieht man wieder unter Verwendung der Cayley Transformierten $V = \mathcal{C}_\mu(S)$ ein, denn definiert man den Hilbertraum $\widetilde{\mathcal{H}}$ durch $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ mit $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, so ist V isometrisch in $\mathcal{H}_1$ und V^{-1} isometrisch in $\mathcal{H}_2$. Betrachtet man nun die Abbildung

$$\widetilde{V} = V \oplus V^{-1} : \begin{cases} \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \\ (x_1; x_2) \mapsto V(x_1) + V^{-1}(x_2) \end{cases},$$

so ist nach Lemma 1.1.8(i) $\mathcal{D}(\widetilde{V}) = \mathcal{D}(V) \oplus \mathcal{R}(V)$ und $\mathcal{R}(\widetilde{V}) = \mathcal{R}(V) \oplus \mathcal{D}(V)$, also $\mathcal{D}(\widetilde{V})^\perp = \mathcal{R}(S-\mu)^\perp \oplus \mathcal{R}(S-\overline{\mu})^\perp$ und $\mathcal{R}(\widetilde{V})^\perp = \mathcal{R}(S-\overline{\mu})^\perp \oplus \mathcal{R}(S-\mu)^\perp$. Damit haben $\mathcal{D}(\widetilde{V})^\perp$ und $\mathcal{R}(\widetilde{V})^\perp$ gleiche Dimension, man findet also wieder eine unitäre Abbildung $V' : \mathcal{D}(U)^\perp \to \mathcal{R}(U)^\perp$ und eine zum Beweis von Lemma 2.1.3 analoge Vorgehensweise liefert schließlich eine selbstadjungierte Erweiterung mit Austritt in $\widetilde{\mathcal{H}}$.

2.1.5 Proposition. *Es sei S eine symmetrische abgeschlossene Relation auf $\mathcal{H}$ und $A \geq S$ eine selbstadjungierte Erweiterung in $\mathcal{H}$. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ ist*

$$T_{\mu,\lambda} := I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1} \tag{2.2}$$

ein bijektiver beschränkter linearer Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Weiters bildet er $\mathcal{N}_\mu$ bijektiv auf $\mathcal{N}_\lambda$ ab. Seine Inverse ist gegeben durch $T_{\lambda,\mu}$.

Beweis. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt

$$\Big(I + (\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}\Big)\Big(I + (\mu-\lambda)(A-\mu)^{-1}\Big) = I + (\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1} + \\ +(\mu-\lambda)(A-\mu)^{-1} + (\mu-\lambda)\underbrace{(\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1}}_{=(A-\lambda)^{-1}-(A-\mu)^{-1}} = I.$$

Analog zeigt man, dass $I + (\mu-\lambda)(A-\mu)^{-1}$ auch linkinvers zu $T_{\mu,\lambda}$ ist, also erhält man $T_{\mu,\lambda}^{-1} = I + (\mu-\lambda)(A-\mu)^{-1} = T_{\lambda,\mu}$ und somit ist $T_{\mu,\lambda}$ ein bijektiver beschränkter Operator. Es bleibt zu zeigen, dass $T_{\mu,\lambda}$ den Defektraum $\mathcal{N}_\mu$ auf $\mathcal{N}_\lambda$ abbildet. Für den Rest dieses Beweises setzen wir $T := T_{\mu,\lambda}$. Sei $x \in \mathcal{N}_\mu$.

Wir wollen zeigen, dass $Tx \in \mathcal{N}_\lambda$. Ist $y \in \mathcal{R}(S - \overline{\lambda})$, d.h. $y \in \mathcal{N}_\lambda^\perp$, so lässt sich y schreiben als $y = v - \overline{\lambda} u$ mit $(u; v) \in S$. Daraus ergibt sich

$$(Tx, y) = (Tx, v - \overline{\lambda} u) = (x, T^*(v - \overline{\lambda} u)).$$

Wegen $T^* = I + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(A - \overline{\lambda})^{-1}$ folgt

$$T^*(v - \overline{\lambda} u) = v - \overline{\lambda} u + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})\Big((A - \overline{\lambda})^{-1}(v - \overline{\lambda} u)\Big).$$

Da $(u; v) \in S \subseteq A$ erhält man $(u; v - \overline{\lambda} u) \in A - \overline{\lambda}$ und somit gilt $(v - \overline{\lambda} u; u) \in (A - \overline{\lambda})^{-1}$. Daher erhält man weiter

$$(Tx, y) = (x, v - \overline{\lambda} u + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})u) = (x, \underbrace{v - \overline{\mu} u}_{\in \mathcal{R}(S - \overline{\mu})}) = 0,$$

d.h. $Tx \in \mathcal{N}_\lambda$, und somit gilt $T(\mathcal{N}_\mu) \subseteq \mathcal{N}_\lambda$. Vertauscht man die Rollen von μ und λ, so ergibt sich

$$\Big(I + (\mu - \lambda)(A - \mu)^{-1}\Big)(\mathcal{N}_\lambda) \subseteq \mathcal{N}_\mu,$$

und durch Anwendung von T folgt $\mathcal{N}_\lambda \subseteq T(\mathcal{N}_\mu)$. ❑

2.1.6 Lemma. *Es sei S eine symmetrische abgeschlossene Relation auf $\mathcal{H}$, $A \geq S$ eine selbstadjungierte Erweiterung in $\mathcal{H}$. Dann gilt $T_{\lambda,\mu}^* = T_{\overline{\lambda},\overline{\mu}}$ für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ und*

$$(\overline{\lambda} - \mu)T_{\overline{\mu},\overline{\lambda}} - (\overline{\lambda} - \overline{\mu})T_{\mu,\overline{\lambda}} = (\overline{\mu} - \mu)I, \quad \lambda, \mu \in \rho(A). \tag{2.3}$$

Weiters gilt für $\lambda, \mu, \mu_0 \in \rho(A)$

$$T_{\mu,\lambda} = T_{\mu_0,\lambda} T_{\mu,\mu_0}, \tag{2.4}$$

sowie

$$(\lambda - \overline{\mu}_0)T_{\mu_0,\lambda} - (\overline{\mu} - \mu_0)T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} - (\mu_0 - \overline{\mu}_0)I = (\lambda - \overline{\mu})T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} T_{\mu_0,\lambda}. \tag{2.5}$$

Beweis. Sei $\lambda, \mu \in \rho(A)$, dann gilt offensichtlich $T_{\lambda,\mu}^* = T_{\overline{\lambda},\overline{\mu}}$. Wegen

$$\begin{aligned}
&(\overline{\lambda} - \mu)T_{\overline{\mu},\overline{\lambda}} - (\overline{\lambda} - \overline{\mu})T_{\mu,\overline{\lambda}} = \\
&\quad = (\overline{\lambda} - \mu)\Big(I + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(A - \overline{\lambda})^{-1}\Big) - (\overline{\lambda} - \overline{\mu})\Big(I + (\overline{\lambda} - \mu)(A - \overline{\lambda})^{-1}\Big) = \\
&= (\overline{\lambda} - \mu) + (\overline{\lambda} - \mu)(\overline{\lambda} - \overline{\mu})(A - \overline{\lambda})^{-1} - (\overline{\lambda} - \overline{\mu}) - (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(\overline{\lambda} - \mu)(A - \overline{\lambda})^{-1} = \\
&\qquad = (\overline{\mu} - \mu)I
\end{aligned}$$

folgt die erste Gleichung. Ist zusätzlich $\mu_0 \in \rho(A)$, so erhält man mit der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}
T_{\mu_0,\lambda} T_{\mu,\mu_0} &= I + (\lambda - \mu_0)(A - \lambda)^{-1} + (\mu_0 - \mu)(A - \mu_0)^{-1} + \\
&+ (\mu_0 - \mu)\underbrace{(\lambda - \mu_0)(A - \lambda)^{-1}(A - \mu_0)^{-1}}_{=(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu_0)^{-1}} = T_{\mu,\lambda}.
\end{aligned}$$

Für die linke Seite der zweiten Gleichung gilt

$$(\lambda-\overline{\mu}_0)\big[I+(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}\big]-(\overline{\mu}-\mu_0)\big[I+(\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(A-\overline{\mu})^{-1}\big]-(\mu_0-\overline{\mu}_0)I =$$
$$= (\lambda-\overline{\mu})I + (\lambda-\overline{\mu}_0)(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1} - (\overline{\mu}-\mu_0)(\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(A-\overline{\mu})^{-1}.$$

Für die rechte Seite gilt

$$(\lambda-\overline{\mu})I = (\lambda-\overline{\mu})\Big[I+(\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(A-\overline{\mu})^{-1}\Big]\Big[I+(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}\Big] =$$
$$= (\lambda-\overline{\mu})I + (\lambda-\overline{\mu})(\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(A-\overline{\mu})^{-1} + (\lambda-\overline{\mu})(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1} +$$
$$+ (\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(\lambda-\mu_0)\underbrace{(\lambda-\overline{\mu})(A-\overline{\mu})^{-1}(A-\lambda)^{-1}}_{=(A-\lambda)^{-1}-(A-\overline{\mu})^{-1}} =$$
$$= (\lambda-\overline{\mu})I + (\overline{\mu}-\overline{\mu}_0)(\mu_0-\overline{\mu})(A-\overline{\mu})^{-1} + (\lambda-\overline{\mu}_0)(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}. \quad ❑$$

2.1.7 Definition. Sei $S \subseteq S^* \leq \mathcal{H}^2$ und $A = A^* \supseteq S$ eine kanonische Erweiterung, $\mu_0 \in \rho(A)$ sowie $\mathcal{G}$ ein beliebiger Hilbertraum. Weiters sei $\Gamma_{\mu_0} : \mathcal{G} \to \mathcal{N}_{\mu_0}$ eine bijektive und bistetige Abbildung. Für $\lambda \in \rho(A)$ definiert man

$$\Gamma_\lambda := \big[I + (\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}\big]\,\Gamma_{\mu_0},$$

dann ist $\Gamma_\lambda \in L(\mathcal{G},\mathcal{H})$ und die Familie $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\rho(A)}$ nennt man *Defektfamilie* zu dem Paar (S, A). Gilt $\dim \mathcal{G} = 1$, so setzt man $\gamma(\lambda) := \Gamma_\lambda(1) \in \mathcal{H}$.

Im folgenden bezieht sich das Paar (S, A) stets auf eine symmetrische abgeschlossene lineare Relation S und eine kanonischen Erweiterung $A = A^* \supseteq S$.

2.1.8 Korollar. *Sei $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\rho(A)}$ die Defektfamilie zu (S, A). Dann gilt*

(i) $\Gamma_\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{N}_\lambda$ ist bijektiv und bistetig für alle $\lambda \in \rho(A)$,

(ii) für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ stets

$$\Gamma_\lambda = \big[I + (\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}\big]\,\Gamma_\mu,$$

(iii) die Abbildung $\rho(A) \to L(\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\lambda \mapsto \Gamma_\lambda$ ist analytisch.

Beweis. ad (i) : Es gilt

$$\Gamma_\lambda(\mathcal{G}) = [I + (\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}]\Gamma_{\mu_0}(\mathcal{G}) = [I + (\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}]\mathcal{N}_{\mu_0},$$

und mit Proposition 2.1.5 folgt $\Gamma_\lambda(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_\lambda$. Weiters ist $[I+(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}]$ eine Bijektion von $\mathcal{N}_{\mu_0}$ auf $\mathcal{N}_\lambda$. Also ist Γ_λ eine bistetige Bijektion von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{N}_\lambda$.

ad (ii) : Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ erhält man unter Verwendung der Resolventengleichung (Korollar 1.4.5)

$$\big[I+(\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}\big]\overbrace{\big[I+(\mu-\mu_0)(A-\mu)^{-1}\big]\,\Gamma_{\mu_0}}^{\Gamma_\mu} = \Big[I+(\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}+$$
$$+ (\mu-\mu_0)(A-\mu)^{-1} + (\mu-\mu_0)\underbrace{(\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1}}_{(A-\lambda)^{-1}-(A-\mu)^{-1}}\Big]\Gamma_{\mu_0} =$$
$$= \big[I+(\lambda-\mu_0)(A-\lambda)^{-1}\big]\Gamma_{\mu_0} = \Gamma_\lambda.$$

ad (iii) : Da die Abbildung $z \mapsto (A-z)^{-1}$, $z \in \rho(A)$, analytisch und daher stetig ist, gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma_{z+h} - \Gamma_z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\big[I + h\big(A-(z+h)\big)^{-1} \big]\Gamma_z - \Gamma_z \Big) = \\ = \lim_{h\to 0} \big(A-(z+h)\big)^{-1}\Gamma_z = (A-z)^{-1}\Gamma_z. \qquad ❑$$

2.1.9 Proposition. *Sei S eine symmetrische abgeschlossene Relation auf $\mathcal{H}$ und $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Dann gilt $\lambda \in \tilde{r}(S)\cap\mathbb{R}_\infty$ genau dann, wenn eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung A von S existiert mit $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$.*

2.1.10 Bemerkung. Ist S eine symmetrische abgeschlossene Relation auf $\mathcal{H}$ und A eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sowohl $\lambda \in r(S)$, also auch $\lambda \in \rho(A)$.

Beweis (von Proposition 2.1.9). ($\Leftarrow$) Existiert eine selbstadjungierte Erweiterung A von S und sei $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$. Dann gilt wegen $(S-\lambda)^{-1} \leq (A-\lambda)^{-1}$, dass $\tilde{\rho}(A) \subseteq \tilde{r}(S)$ und somit folgt λ in $\tilde{r}(S)$.
($\Rightarrow$) Um den Beweis in die andere Richtung zu führen, betrachtet man erst den Fall $\lambda = \infty$. Hier ist also zu zeigen, dass aus der Beschränktheit von S die Existenz eines $A \in L(\mathcal{H})$ mit $S \subseteq A = A^*$ folgt. Dazu bezeichnet man mit $\tilde{S} : \overline{\mathcal{D}(S)} \to \mathcal{H}$ die stetige Fortsetzung von S auf den Abschluss des Definitionsbereichs. Mit Hilfe von $\tilde{S}$ und der orthogonalen Projektion $P : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{D}(S)}$ definiert man den Operator $B := P\tilde{S}P$, für den offensichtlich $B \in L(\mathcal{H})$ gilt. Da mit S auch $\tilde{S}$ symmetrisch ist und die Paare $(Px; \tilde{S}Px)$ und $(Py; \tilde{S}Py)$ in $\tilde{S}$ liegen, gilt

$$(Bx, y) = (\tilde{S}Px, Py) = (Px, \tilde{S}Py) = (x, By), \;\; x, y \in H.$$

Also ist B selbstadjungiert. Definiert man nun die Abbildung $T := \tilde{S} - B$, so gilt für ein $x \in \overline{\mathcal{D}(S)}$, dass $Px = x$ und deshalb $Tx = \tilde{S}x - P\tilde{S}x = (I-P)\tilde{S}x$. Dies ermöglicht es, T als $T : \overline{\mathcal{D}(S)} \to \overline{\mathcal{D}(S)}^\perp$ zu sehen. Die auf diesen abgeschlossenen Teilräumen definierte Adjungierte soll mit T^+ bezeichnet werden. Es gilt also $T^+ \in L(\overline{\mathcal{D}(S)}^\perp, \overline{\mathcal{D}(S)})$. Definiert man nun einen Operator C in Blockdarstellung,

$$C := \begin{pmatrix} 0 & T^+ \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad C : \underbrace{\overline{\mathcal{D}(S)} \oplus \overline{\mathcal{D}(S)}^\perp}_{\mathcal{H}} \to \underbrace{\overline{\mathcal{D}(S)} \oplus \overline{\mathcal{D}(S)}^\perp}_{\mathcal{H}},$$

so gilt für ein $x \in \mathcal{H}$, $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \overline{\mathcal{D}(S)}$ und $x_2 \in \overline{\mathcal{D}(S)}^\perp$, dass

$$C(x_1 + x_2) = \underbrace{T^+x_2}_{\in\overline{\mathcal{D}(S)}} + \underbrace{Tx_1}_{\overline{\mathcal{D}(S)}^\perp} .$$

Damit erhält man für $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$, $y = y_1 + y_2 \in \mathcal{H}$

$$(Cx, y) = (T^+x_2 + Tx_1, y_1 + y_2) = (T^+x_2, y_1) + (Tx_1, y_2) = \\ = (x_2, Ty_1) + (x_1, T^+y_2) = (x, Cy),$$

was zeigt, dass C selbstadjungiert ist. Da offensichtlich $C \geq T$, ist auch $C+B \geq T+B = \tilde{S}$, und da sowohl C als auch B selbstadjungiert sind, hat man mit $C+B$ die gesuchte selbstadjungierte Erweiterung von S in $L(\mathcal{H})$ gefunden.

Für ein rein reelles λ ist zu zeigen, dass aus $\lambda \in r(S)$ die Existenz einer selbstadjungierten Erweiterung A von S mit $\lambda \in \rho(A)$ folgt. Wegen

$$(S-\lambda)^{-1} \subseteq (S^*-\lambda)^{-1} = \left((S-\lambda)^{-1}\right)^*$$

ist $R := (S-\lambda)^{-1}$ ein beschränkter Operator. Für diese Situation wurde bereits die Existenz eines Operators $Q = Q^*$ mit $Q \in L(\mathcal{H})$ gezeigt, wobei $Q \geq R$ und damit ist auch folgende Gleichung erfüllt

$$\lambda I + Q^{-1} \supseteq R^{-1} + \lambda I = S.$$

Dabei ist $A := \lambda I + Q^{-1}$ wieder selbstadjungiert. Wegen $(A-\lambda)^{-1} = Q$ ist auch $\lambda \in \rho(A)$. ❑

2.1.11 Definition. Sei S eine symmetrische abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{H}$, A eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von S und $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\rho(A)}$ die zugehörige Defektfamilie. Eine Funktion $Q : \rho(A) \to L(\mathcal{G})$ heißt *Q-Funktion* von $(S, A, (\Gamma_\lambda))$ falls

$$\frac{Q(\lambda) - Q(\mu)^*}{\lambda - \overline{\mu}} = \Gamma_\mu^* \Gamma_\lambda, \quad \lambda, \mu \in \rho(A). \tag{2.6}$$

2.1.12 Bemerkung. Für $\dim \mathcal{G} = 1$ schreibt man auch

$$\frac{q(\lambda) - \overline{q(\mu)}}{\lambda - \overline{\mu}} = (\gamma_\lambda, \gamma_\mu),$$

wobei $\Gamma_z(1) = \gamma_z$, $z \in \rho(A)$.

2.1.13 Proposition. *Das Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda))$ besitzt immer eine Q-Funktion. Diese ist gegeben durch*

$$Q(\lambda) := (\lambda - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^* \Gamma_\lambda - \frac{1}{2}(\mu_0 - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^* \Gamma_{\mu_0} + C, \tag{2.7}$$

wobei $C = C^* \in L(\mathcal{G})$ und $\mu_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ fest gewählt ist. Die Funktion Q ist eindeutig bestimmt bis auf eine selbstadjungierte Konstante, d.h. sind Q und $\tilde{Q}$ zwei Q-Funktionen zu $(S, A, (\Gamma_\lambda))$, dann existiert ein $B = B^* \in L(\mathcal{G})$, sodass

$$B + Q(\lambda) = \tilde{Q}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \rho(A).$$

Beweis. Mit Hilfe des Operators $T_{\mu_0,\lambda}$ (siehe Proposition 2.1.5 (2.2)) erhält man unter Verwendung von Korollar 2.1.8 (ii)

$$Q(\lambda) = (\lambda - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^* T_{\mu_0,\lambda} \Gamma_{\mu_0} - \frac{1}{2}(\mu_0 - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^* \Gamma_{\mu_0} + C.$$

Wegen Lemma 2.1.6 gilt $T_{\mu_0,\lambda}^* = T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}}$, und somit

$$Q(\mu)^* = (\overline{\mu} - \mu_0)\Gamma_{\mu_0}^* T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} \Gamma_{\mu_0} - \frac{1}{2}(\overline{\mu}_0 - \mu_0)\Gamma_{\mu_0}^* \Gamma_{\mu_0} + C.$$

Mit Lemma 2.1.6 (2.5) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} Q(\lambda) - Q(\mu)^* &= \Gamma_{\mu_0}^* \big[(\lambda - \overline{\mu}_0) T_{\mu_0,\lambda} - (\overline{\mu} - \mu_0) T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} - (\mu_0 - \overline{\mu}_0) I\big] \Gamma_{\mu_0} = \\ &= \Gamma_{\mu_0}^* (\lambda - \overline{\mu}) T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} T_{\mu_0,\lambda} \Gamma_{\mu_0} = (\lambda - \overline{\mu})(T_{\mu_0,\mu}\Gamma_{\mu_0})^* T_{\mu_0,\lambda}\Gamma_{\mu_0} = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^* \Gamma_\lambda. \end{aligned}$$

Somit erfüllt die durch (2.7) definierte Funktion Q Gleichung (2.6), und ist damit eine Q-Funktion des Tripels $(S, A, (\Gamma_\lambda))$.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\tilde{Q}(\lambda)$ eine Q-Funktion zu dem Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda))$. Dann gilt nach Definition

$$\frac{\tilde{Q}(\lambda) - \tilde{Q}(\mu)^*}{\lambda - \overline{\mu}} = \Gamma_\mu^* \Gamma_\lambda, \quad \lambda, \mu \in \rho(A).$$

Daraus folgt, da nach den Rechenregeln der Adjungierten sowohl Real- als auch Imaginärteil eines überall definierten stetigen Operators selbstadjungiert sind,

$$\tilde{Q}(\lambda) = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda + \tilde{Q}(\mu)^* = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda + \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mu) - i \operatorname{Im}\tilde{Q}(\mu).$$

Wegen Gleichung (2.6) gilt

$$\operatorname{Im}\tilde{Q}(\mu) = \frac{\tilde{Q}(\mu) - \tilde{Q}(\mu)^*}{2i} \frac{\mu - \overline{\mu}}{\mu - \overline{\mu}} = \frac{\mu - \overline{\mu}}{2i}\Gamma_\mu^*\Gamma_\mu.$$

Setzt man $\mu = \mu_0$, dann ergibt sich für $\tilde{Q}(\lambda)$

$$\tilde{Q}(\lambda) = (\lambda - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_\lambda - \frac{\mu_0 - \overline{\mu}_0}{2}\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_{\mu_0} + \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mu_0) = Q(\lambda) - C + \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mu_0).$$

Definiert man $B := \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mu_0) - C$, dann ist B selbstadjungiert und daher ist die Q-Funkton zu dem Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda))$ bis auf eine selbstadjungierte Konstante eindeutig bestimmt. ❑

2.1.14 Definition. Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Eine Funktion $K : M \times M \to L(\mathcal{G})$ heißt *positiver Kern*, falls für je endlich viele Elemente $m_1, \dots, m_n \in M$ sowie $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(K(m_i, m_j)x_i, x_j\Big)\xi_i\overline{\xi}_j \geq 0, \ \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C},$$

d.h. die Matrix $\big(K(m_i, m_j)x_i, x_j\big)_{i,j=1}^n$ ist positiv semidefinit.

2.1.15 Lemma. *Sei M eine nichtleere Menge, $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum und $K : M \times M \to L(\mathcal{G})$ ein positiver Kern. Dann gilt $K(m, n)^* = K(n, m)$ für alle $m, n \in M$.*

Beweis. Da K ein positiver Kern ist folgt unmittelbar

$$\big(K(m, m)x, x\big) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{G}, m \in M.$$

Weiters gilt

$$\big(K(m, m)x, x\big) + \big(K(m, n)x, y\big) + \big(K(n, m)y, x\big) + \big(K(n, n)y, y\big) \geq 0,$$

für $x, y \in \mathcal{G}$ und $m, n \in M$. Daraus folgt $\big(K(m,n)x, y\big) + \big(K(n,m)y, x\big) \in \mathbb{R}$. Setzt man $x = y$, dann ergibt sich $\big((K(m,n) + K(n,m))x, x\big) \in \mathbb{R}$, also ist $K(n,m) + K(m,n)$ selbstadjungiert, d.h.

$$K(n,m) + K(m,n) = K(n,m)^* + K(m,n)^*. \tag{2.8}$$

Setzt man $x = iy$, dann erhält man $\big(i(K(m,n) - K(n,m))x, x\big) \in \mathbb{R}$, also ist $i(K(n,m) - K(m,n))$ selbstadjungiert, d.h.

$$i(K(n,m) - K(m,n)) = -i(K(n,m)^* - K(m,n)^*). \tag{2.9}$$

Multipliziert man Gleichung (2.9) mit i und addiert dann Gleichung (2.8), so ergibt sich $K(m,n) = K(n,m)^*$. ❑

2.1.16 Proposition. *Sei Q die Q-Funktion von dem Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda))$, dann gilt:*

(i) *Q ist analytisch.*

(ii) *Ist $z \in \rho(A)$, so folgt $Q(z)^* = Q(\overline{z})$.*

(iii) *Ist $z \in \rho(A) \cap \mathbb{C}^+$, so folgt $\operatorname{Im} Q(z) = \frac{Q(z)-Q(z)^*}{2i} \gg 0$, d.h. $\operatorname{Im} Q(z)$ ist strikt positiv*[1].

(iv) *$K_Q(w,z) := \frac{Q(z)-Q(w)^*}{z-\overline{w}}$ ist ein positiver Kern auf $\rho(A)$ in $\mathcal{G}$.*

Beweis. ad (i) : Wir zeigen, dass Q schwach analytisch ist. Unter Verwendung der Darstellung aus Proposition 2.1.13 ist also zu zeigen, dass für alle $x, y \in \mathcal{G}$ die Abbildung

$$\big(Q(z)x, y\big) = \Big(\big((z-\overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_z - \frac{\mu_0 - \overline{\mu}_0}{2}\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_{\mu_0} + C\big)x, y\Big) = (z-\overline{\mu}_0)\big(\Gamma_z x, \Gamma_{\mu_0} y\big) + D$$

analytisch in z ist, wobei D eine von z unabhängige Konstante ist. Wegen Korollar 2.1.8 (ii) gilt

$$\big(\Gamma_z x, \Gamma_{\mu_0} y\big) = \Big(\big(I + (z-\mu_0)(A-z)^{-1}\big)\Gamma_{\mu_0} x, \Gamma_{\mu_0} y\Big).$$

Da sich die Resolvente $(A-z)^{-1}$ um jeden Punkt $z_0 \in \rho(A)$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, erhält man, dass $z \mapsto (\Gamma_z x, \Gamma_{\mu_0} y)$ analytisch ist. Somit ist die Funktion Q schwach analytisch und daher auch analytisch.

ad (ii) : Nach der Definition der Q-Funktion gilt für $z, w \in \rho(A)$

$$Q(z) - Q(w)^* = (z - \overline{w})\Gamma_w^*\Gamma_z.$$

Da Γ_z analytisch und somit auch stetig ist, erhält man für $z \to \overline{w}$

$$Q(\overline{w}) - Q(w)^* = 0.$$

[1]Ein Operator $A \in L(\mathcal{G})$ heißt strikt positiv, falls es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $(Ax, x) \geq \delta(x, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Man schreibt dafür $A \gg 0$.

ad (iii) : Ist $z \in \rho(A) \cap \mathbb{C}^+$, dann gilt

$$\frac{\operatorname{Im}(Q(z))}{\operatorname{Im} z} = \frac{Q(z) - Q(z)^*}{z - \overline{z}} = \Gamma_z^* \Gamma_z.$$

Daraus ergibt sich für $x \in \mathcal{G}$

$$\big(\operatorname{Im} Q(z)x, x\big) = \operatorname{Im} z\big(\Gamma_z^*\Gamma_z x, x\big) = \operatorname{Im} z\big(\Gamma_z x, \Gamma_z x\big) = \operatorname{Im} z \|\Gamma_z x\|^2 \geq 0.$$

Da $\Gamma_z : \mathcal{G} \to \mathcal{N}_z$ bijektiv und bistetig ist folgt die Existenz einer Konstanten $\tilde{\delta} > 0$, sodass $\|\Gamma_z^{-1} y\| \leq \tilde{\delta}\|y\|$ für alle $y \in \mathcal{N}_z$. Wegen der Bijektivität gibt es zu jedem $y \in \mathcal{N}_z$ ein $x \in \mathcal{G}$, sodass $y = \Gamma_z x$. Also gilt

$$\|x\| = \|\Gamma_z^{-1} y\| = \|\Gamma_z^{-1}\Gamma_z x\| \leq \tilde{\delta}\|\Gamma_z x\|,$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$\exists \delta > 0 : \ \|\Gamma_z x\| \geq \delta \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

Somit gilt $(\operatorname{Im} Q(z)x, x) \geq \operatorname{Im} z \ \delta^2(x, x)$, für alle $x \in \mathcal{G}$, und daher ist $\operatorname{Im} Q(z)$ strikt positiv.

ad (iv) : Sind $z_1, \dots, z_n \in \rho(A)$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G}$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi}_j \big(K_Q(z_i, z_j)x_i, x_j\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi}_j \big(\Gamma_{z_i} x_i, \Gamma_{z_j} x_j\big) =$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Gamma_{z_i} x_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \Gamma_{z_j} x_j\Big) \geq 0.$$

❑

2.1.17 Proposition. *Seien $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \rho(A)}$, $(\tilde{\Gamma}_\lambda)_{\lambda \in \rho(A)}$ Defektfamilien von (S, A) und Q bzw. $\tilde{Q}$ seien Q-Funktionen von $(S, A, (\Gamma_\lambda))$ bzw. $(S, A, (\tilde{\Gamma}_\lambda))$. Dann existiert ein bijektiver und bistetiger Operator $D \in L(\mathcal{G})$ und ein Operator $B = B^* \in L(\mathcal{G})$, sodass*

$$\tilde{Q}(z) = D^* Q(z) D + B.$$

Beweis. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt nach Korollar 2.1.8 (ii)

$$\tilde{\Gamma}_\lambda = [I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1}]\tilde{\Gamma}_\mu,$$

und $\tilde{\Gamma}_\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{N}_\lambda$ ist ein bijektiver, bistetiger Operator. Definiert man den Operator $D := \Gamma_\mu^{-1}\tilde{\Gamma}_\mu$, dann ist D wohldefiniert, bijektiv, bistetig und ein Element von $L(\mathcal{G})$. Weiters gilt

$$\tilde{\Gamma}_\lambda = [I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1}]\tilde{\Gamma}_\mu = [I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1}]\Gamma_\mu D = \Gamma_\lambda D.$$

Nun ist $D^*Q(z)D$ eine Q-Funktion von $(S, A, (\tilde{\Gamma}_\lambda))$, denn für $z, w \in \rho(A)$ gilt

$$\frac{D^*Q(z)D - \big(D^*Q(w)D\big)^*}{z - \overline{w}} = D^* \frac{Q(z) - Q(w)^*}{z - \overline{w}} D = D^*\Gamma_w^*\Gamma_z D = \tilde{\Gamma}_w^* \tilde{\Gamma}_z.$$

Da nach Proposition 2.1.13 die Q-Funktion eindeutig bis auf eine selbstadjungierte Konstante ist folgt die Behauptung. ❑

2.2 Minimale symmetrische Relationen

2.2.1 Definition. Eine isometrische Relation $V \leq \mathcal{H}^2$ heißt *minimal isometrisch (completely non-unitary)* falls gilt:

$$\nexists M \leq \mathcal{H},\ M = \overline{M} \neq \{0\}:\ V \cap M^2 \text{ ist eine unitäre Relation auf } M.$$

Eine symmetrische Relation $S \leq \mathcal{H}^2$ heißt *minimal symmetrisch (completely non-selfadjoint)* falls gilt:

$$\nexists M \leq \mathcal{H},\ M = \overline{M} \neq \{0\}:\ S \cap M^2 \text{ ist selbstadjungiert in } M.$$

2.2.2 Lemma. *Sei S eine abgeschlossene symmetrische und V eine isometrische lineare Relation auf $\mathcal{H}$ die über die Cayley Transformierte in Zusammenhang stehen, d.h. es gibt ein $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, sodass $V = \mathcal{C}_\mu(S)$. Dann ist V genau dann minimal, wenn S minimal ist.*

Beweis. Angenommen es existiert ein $M \neq \emptyset$, $M \leq \mathcal{H}$ abgeschlossen, sodass $S \cap M^2$ selbstadjungiert in M ist. Wegen $M^2 = \mathcal{C}_\mu(M^2)$ gilt

$$\mathcal{C}_\mu(S\cap M^2) = \{(g-\mu f; g-\overline{\mu} f) : (f;g) \in S \wedge (f;g) \in M^2\} = \mathcal{C}_\mu(S)\cap M^2 = V\cap M^2.$$

Somit wäre $V \cap M^2$ unitär auf M, ein Widerspruch. Die Umkehrung zeigt man genauso. ❑

2.2.3 Lemma. *Es gilt*

(i) Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ eine minimale symmetrische Relation, dann gilt $\mathrm{mul}(S) = \{0\}$*, d.h. S ist ein Operator, und S besitzt keine Eigenwerte.*

(ii) Sei $V \leq \mathcal{H}^2$ eine minimale isometrische Relation, dann hat V keine Eigenwerte.

Beweis.

ad (i): Angenommen es gibt ein $x \in \mathrm{mul}(S)$, $x \neq 0$. Dann ist $\{0\}\times\mathrm{span}\{x\} \leq S$, und daher ist $\{0\} \times \mathrm{span}\{x\}$ eine symmetrische Relation. Setzt man $M := \mathrm{span}\{x\}$, so folgt

$$S \geq M^2 \cap S \geq \{0\} \times \mathrm{span}\{x\} \neq \{0\}.$$

Also ist $M^2 \cap S$ eine symmetrische Relation in M. Um zu zeigen, dass $M^2 \cap S$ bereits selbstadjungiert in M ist zeigen wir zunächst folgende allgemeinere Aussage.
Sei $\mathcal{L}$ ein Hilbertraum mit $n := \dim \mathcal{L} < \infty$. Weiters sei $A = A^* \leq \mathcal{L}^2$ eine selbstadjungierte Relation in $\mathcal{L}$ und $T \leq T^* \leq \mathcal{L}^2$ eine symmetrische Relation in $\mathcal{L}$. Nach Lemma 1.2.3 (ii) gilt $A = A^* = JA^\perp$, wobei J die in Gleichung (1.3) definierte Abbildung ist, und somit folgt $\dim A = \dim A^\perp = n$. Analog erhält man $\dim T = d \leq 2n - d$, also $d \leq n$. Insbesondere folgt daraus, dass eine symmetrische Relation S in $\mathcal{L}$ mit $\dim S = n$ bereits selbstadjungiert ist.
Da $M^2 \cap S$ eine symmetrische Relation in dem 1-dimensionalen Hilbertraum M ist und weiters $\dim(M^2 \cap S) = 1$ gilt, folgt nach obiger Bemerkung, dass $M^2 \cap S$ bereits selbstadjungiert in M ist. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität, also gilt $\mathrm{mul}(S) = \{0\}$.

S ist also ein Operator und angenommen es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass λ Eigenwert von S ist, d.h. es existiert ein $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, sodass $(x;\lambda x) \in S$. Setzt man wieder $M := \operatorname{span}\{x\}$, dann ist

$$\{0\} \neq \operatorname{span}\{(x;\lambda x)\} = S \cap M^2$$

eine symmetrische Relation in M. Mit dem selben Dimensionsargument von vorhin sieht man, dass $S \cap M^2$ selbstadjungiert in M ist und man erhält wieder einen Widerspruch zur Minimalität.

ad (ii) : Der Beweis verläuft analog zu (i). ❑

2.2.4 Proposition. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ eine abgeschlossene symmetrische Relation, dann existieren eindeutige abgeschlossene Teilräume $\mathcal{H}_m \leq \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_{sa} \leq \mathcal{H}$, sodass*

$$S_m = S \cap \mathcal{H}_m^2, \qquad S_{sa} = S \cap \mathcal{H}_{sa}^2,$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m \oplus \mathcal{H}_{sa}, \qquad S = S_m \oplus S_{sa},$$

wobei S_m auf $\mathcal{H}_m$ minimal symmetrisch ist und S_{sa} selbstadjungiert in $\mathcal{H}_{sa}$ ist.

Ist $V \leq \mathcal{H}^2$ eine abgeschlossene isometrische Relation, so existieren eindeutige abgeschlossene Teilräume $\mathcal{H}_i \leq \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_u \leq \mathcal{H}$, sodass

$$V_i = V \cap \mathcal{H}_i^2, \qquad V_u = V \cap \mathcal{H}_u^2,$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_i \oplus \mathcal{H}_u, \qquad V = V_i \oplus V_u,$$

wobei V_u unitär in $\mathcal{H}_u$ ist und V_i minimal isometrisch in $\mathcal{H}_i$ ist.
Die Relationen entsprechen einander mittels der Cayleytransformierten und es gilt $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_m$ sowie $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}_{sa}$.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass V isometrisch ist. Die Aussage für den symmetrischen Fall folgt dann mit Hilfe der Cayley-Transformierten. Ist $V \leq \mathcal{H}^2$ eine abgeschlossene isometrische Relation, dann definiert man

$$\mathcal{H}_u := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n),$$

wobei $\mathcal{R}(V^0) := \mathcal{H}$. Offensichtlich gilt $\mathcal{H}_u = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}(V^{-n})$. Insbesondere erhält man $x \in \mathcal{H}_u$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, beziehungsweise wenn $x \in \mathcal{R}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
Nach Lemma 1.5.19 ist V sogar ein abgeschlossener beschränkter isometrischer Operator. Mit Bemerkung 1.4.8 folgt, dass $\mathcal{D}(V)$ abgeschlossen ist. Daher ist auch $\mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ abgeschlossen und somit ist $\mathcal{H}_u$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$.
Wir wollen zeigen, dass $V(\mathcal{H}_u) \subseteq \mathcal{H}_u$ gilt. Sei $x \in \mathcal{H}_u$, dann zeigt man zunächst, dass $Vx \in \mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathcal{H}_u$ gilt $x \in \mathcal{D}(V^{n+1})$. Da V ein Operator ist gilt $V^{n+1}x = V^n(Vx) \in \mathcal{H}$, d.h. $Vx \in \mathcal{D}(V^n)$.
Ist $x \in \mathcal{H}_u$, dann gilt auch $x \in \mathcal{R}(V^{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher existiert ein $y \in \mathcal{D}(V^{n-1})$, sodass $V^{n-1}y = x$ und es folgt $V^n y = Vx$. Also gilt $Vx \in \mathcal{R}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhält man daher $Vx \in \mathcal{R}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und somit $Vx \in \mathcal{H}_u$.
Analog zu vorhin zeigt man, dass für $x \in \mathcal{H}_u$ auch $V^{-1}x \in \mathcal{H}_u$ gilt. Somit

ist $V \cap \mathcal{H}_u^2$ eine isometrische Relation auf $\mathcal{H}_u$ mit Definitionsbereich $\mathcal{H}_u$ und Bildbereich $\mathcal{H}_u$, also ist $V|_{\mathcal{H}_u}$ ein unitärer Operator.
Nun definiert man $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_u^\perp$, d.h. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i \oplus \mathcal{H}_u$.
Für $x \in \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{H}_i$ und $y \in \mathcal{H}_u$ erhält man wegen der Isometrieeigenschaft

$$(Vx, y) = (Vx, VV^{-1}y) = (x, \underbrace{V^{-1}y}_{\in \mathcal{H}_u}) = 0,$$

also folgt $Vx \in \mathcal{H}_i$. Analog erhält man für $x \in \mathcal{R}(V) \cap \mathcal{H}_i$ sowie $y \in \mathcal{H}_u$

$$(V^{-1}x, y) = (V^{-1}x, V^{-1}Vy) = (x, \underbrace{Vy}_{\in \mathcal{H}_u}) = 0,$$

und daher gilt $V^{-1}x \in \mathcal{H}_i$. Setzt man $V_u := V \cap \mathcal{H}_u^2$ und $V_i := V \cap \mathcal{H}_i^2$, dann gilt $V = V_u \oplus V_i$. Dies sieht man wie folgt: Offensichtlich gilt $V_u \oplus V_i \subseteq V$ und $V_u \perp V_i$ da $\mathcal{H}_u \perp \mathcal{H}_i$. Es bleibt also noch die Inklusion $V \subseteq V_u \oplus V_i$ zu zeigen. Sei $(x; Vx) \in V$, dann gibt es $x_u \in \mathcal{H}_u$ und $x_i \in \mathcal{H}_i$, sodass $x = x_u + x_i$. Wegen $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}(V_u) \subseteq \mathcal{D}(V)$ gilt insbesondere $x_u \in \mathcal{D}(V)$, also $(x_u; Vx_u) \in V$. Daraus erhält man

$$\big(x_u + x_i; V(x_u + x_i)\big) - \big(x_u; Vx_u\big) = (x_i; Vx_i) \in V,$$

d.h. $x_i \in \mathcal{D}(V)$, und daher folgt

$$(x; Vx) = (x_u; Vx_u) + (x_i; Vx_i) \in V_u \oplus V_i.$$

Also gilt $V = V_u \oplus V_i$.
Angenommen es existiert ein Teilraum $M \leq \mathcal{H}_i$, $M = \overline{M} \neq \{0\}$, sodass $V \cap M^2$ eine unitäre Relation auf M ist. Sei $x \in M$, dann folgt, da $V \cap M^2$ unitär ist, auch $x \in \mathcal{D}(V)$ und $V^n x \in M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daraus ergibt sich

$$M \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n) \perp M,$$

ein Widerspruch, d.h. V_i ist minimal auf $\mathcal{H}_i$.
Es ist noch die Eindeutigkeit der Teilräume $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_i$ zu zeigen. Angenommen, es existieren abgeschlossene Teilräume $\tilde{\mathcal{H}}_u$ und $\tilde{\mathcal{H}}_i$ mit $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_u \oplus \tilde{\mathcal{H}}_i$, sodass $\tilde{V}_u := \tilde{\mathcal{H}}_u^2 \cap V$ unitär ist, $\tilde{V}_i := \tilde{\mathcal{H}}_i^2 \cap V$ minimal ist und $V = \tilde{V}_u \oplus \tilde{V}_i$. Nach Korollar 1.5.20 ist $\tilde{V}_u : \tilde{\mathcal{H}}_u \to \tilde{\mathcal{H}}_u$ ein bijektiver isometrischer Operator und es gilt

$$\tilde{\mathcal{H}}_u \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n) = \mathcal{H}_u.$$

Angenommen es existiert ein $x \in \mathcal{H}_u \ominus \tilde{\mathcal{H}}_u \leq \tilde{\mathcal{H}}_i$, $x \neq 0$. Da $V_u : \mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_u$ unitär ist und $V_u|_{\tilde{\mathcal{H}}_u} = \tilde{V}_u$ ist, folgt weiter

$$V_u(\mathcal{H}_u \ominus \tilde{\mathcal{H}}_u) = \mathcal{H}_u \ominus \tilde{\mathcal{H}}_u \leq \tilde{\mathcal{H}}_i.$$

Somit ist $M := \mathcal{H}_i \ominus \tilde{\mathcal{H}}_u \leq \tilde{\mathcal{H}}_i$ ein abgeschlossener nichtleerer Teilraum von $\tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{V}_i \cap M^2 = V \cap M^2$ eine unitäre Relation auf M. Ein Widerspruch zur Minimalität von $\tilde{V}_i$ und somit folgt die Eindeutigkeit ❑

2.2.5 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und U ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$. Weiters sei Γ eine rektifizierbare Jordankurve die die Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ im positiven Sinn umläuft. Dann gilt*

$$U^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\zeta - U)^{-1} \zeta^n d\zeta.$$

Beweis. Sei $\alpha := \min\{|\zeta| : \zeta \in \Gamma\} > 1$, dann gilt $\left\| \frac{U}{\zeta} \right\| = \frac{1}{|\zeta|} \leq \frac{1}{\alpha} < 1$. Daraus folgt

$$(\zeta - U)^{-1} = \frac{1}{\zeta} \Big(I - \frac{U}{\zeta} \Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k \frac{1}{\zeta^{k+1}}$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig für $\zeta \in \Gamma$. Vertauscht man die Reihenfolge der Summation und Integration ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\zeta - U)^{-1} \zeta^n d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} U^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \zeta^{n-k-1} d\zeta}_{=\delta_{nk}} = U^n.$$ ❑

2.2.6 Lemma. *Seien V und S sowie $\mathcal{H}_i$ und $\mathcal{H}_m$ wie in Proposition 2.2.4, dann gilt*

(i) $\mathcal{H}_i = \operatorname{cls} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n)^\perp$.

(ii) $\mathcal{H}_i = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu(V)$.

(iii) $\mathcal{H}_i = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{N}_\mu(V)$ *wobei* $M \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$, *sodass* M *sowohl in* $\mathbb{D}$ *als auch in* $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *Häufungspunkte hat.*

(iv) $\mathcal{H}_m = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \mathcal{N}_\mu(S)$.

(v) $\mathcal{H}_m = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{N}_\mu(S)$ *mit* $M \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *und* M *besitzt Häufungspunkte in* $\mathbb{C}^+$ *und* $\mathbb{C}^-$.

Beweis.

ad (i) : Nach Konstruktion des Raumes $\mathcal{H}_u$ im Beweis von Proposition 2.2.4 gilt

$$\Big(\operatorname{cls} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n)^\perp \Big)^\perp = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}(V^n)^{\perp\perp} = \mathcal{H}_u = \mathcal{H}_i^\perp,$$

also folgt die Behauptung.

ad (ii) : Wir zeigen: $\mathcal{H}_u = \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu^\perp$. Sei $x \in \mathcal{H}_u$ und $V_u := V \cap \mathcal{H}_u^2$, dann ist $V_u : \mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_u$ ein unitärer Operator, daher gilt $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \subseteq \rho(V_u)$. Für $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ folgt $(V_u - \mu)^{-1} x \in \mathcal{H}_u$ und somit gilt $x = (V_u - \mu)(V_u - \mu)^{-1} x$. Wegen $V_u - \mu \subseteq V - \mu$ folgt weiter $x \in \mathcal{R}(V - \mu) = \mathcal{N}_{\overline{\mu}}^\perp$ für $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$. Da $\mathcal{H}_u \subseteq \mathcal{D}(V)$ folgt $x \in \mathcal{D}(V)$ und wegen $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{D}(V)^\perp$ erhält man $x \in \mathcal{N}_\infty^\perp$. Somit gilt $\mathcal{H}_u \subseteq \mathcal{N}_\mu^\perp$ für alle $\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$.
Sei $x \in \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu^\perp$, dann ist zu zeigen, dass $x \in \mathcal{H}_u$ folgt. Es genügt also zu zeigen, dass $x \in \mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zunächst zeigen wir mittels

vollständiger Induktion, dass $x \in \mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ erhält man $x \in \mathcal{D}(V^0) = \mathcal{D}(I) = \mathcal{H}$. Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ ist zu zeigen, dass $x \in \mathcal{D}(V^{n+1})$, wenn $x \in \mathcal{D}(V^n)$. Da V ein isometrischer Operator ist, existiert (siehe Bemerkung 2.1.4) ein Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \geq \mathcal{H}$ und ein unitärer Operator $U : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, sodass $U|_{\mathcal{H}} = V$ gilt. Wegen $x \in \mathcal{D}(V^n)$ gilt $V^n x \in \mathcal{H}$ und mit Lemma 2.2.5 folgt

$$V^n x = U^n x = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \zeta^n (\zeta - U)^{-1} x d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \lim_{|\mathfrak{Z}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} (\mu_j - \mu_{j-1}) \lambda_j^n (\lambda_j - U)^{-1} x,$$

wobei Γ eine rektifizierbare den Einheitskreis echt umlaufende Jordankurve und $\mathfrak{Z} = \big((\mu_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{Z})}, (\lambda_j)_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})}\big)$ eine Zerlegung von Γ ist. Da $x \in \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu^\perp$ gilt sicher $x \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda_j}}^\perp = \mathcal{R}(V - \lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, n(\mathfrak{Z})$ und somit $(\lambda_j - U)^{-1} x = (\lambda_j - V)^{-1} x \in \mathcal{D}(V)$. Damit gilt $V^n x \in \mathcal{D}(V)$, d.h. $x \in \mathcal{D}(V^{n+1})$.
Analog zeigt man, dass $x \in \mathcal{R}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu betrachtet man an Stelle von V den isometrischen Operator V^{-1}. Insgesamt folgt $x \in \mathcal{D}(V^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, also $x \in \mathcal{H}_u$.

ad (iii) : Offensichtlich gilt $\operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{N}_\mu \subseteq \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu = \mathcal{H}_i$. Angenommen es existiert ein $x \in \mathcal{H}_i \ominus \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{N}_\mu$, $x \neq 0$, dann folgt

$$x \in \Big(\operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{N}_\mu\Big)^\perp = \bigcap_{\mu \in M} \mathcal{R}(V - \overline{\mu}),$$

d.h. $x \in \mathcal{R}(V - \overline{\mu})$ für alle $\mu \in M$. Sei wieder $\tilde{\mathcal{H}} \geq \mathcal{H}$ und $U : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ eine unitäre Erweiterung von V, dann gilt $(U - \overline{\mu})^{-1} x = (V - \overline{\mu})^{-1} x \in \mathcal{D}(V)$. Für $y \in \tilde{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{D}(V) \supseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}(V)$ folgt dann

$$\big((U - z)^{-1} x, y\big) = 0, \quad \forall z \in \overline{M} := \{\overline{m} : m \in M\}.$$

Die Abbildung $z \mapsto \big((U - z)^{-1} x, y\big)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$. Da die Menge $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht und M in beiden Komponenten Häufungspunkte besitzt folgt nach dem Eindeutigkeitssatz für analysitsche Funktionen

$$\big((U - z)^{-1} x, y\big) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}.$$

Daraus erhält man $(U - z)^{-1} x \in \mathcal{D}(V)$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$. Daher gilt $(V - z)(U - z)^{-1} x = x \in \mathcal{R}(V - z)$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$. Somit gilt auch $x \in \mathcal{N}_{\overline{z}}^\perp$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$. Nach Voraussetzung ist $x \in \mathcal{H}_i$, und wegen (ii) gilt $x \in \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu$. Somit ergibt sich $(x, x) = 0$, also folgt $x = 0$.

ad (iv) : Definiert man für ein $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Relation $V = \mathcal{C}_\nu(S)$, dann ist V abgeschlossen und isometrisch. Nach Proposition 2.2.4 gibt es eindeutige abgeschlossene Teilräume $\mathcal{H}_i \leq \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_u \leq \mathcal{H}$, sodass $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i \oplus \mathcal{H}_u$. Insbesondere gilt $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_m$. Aus (ii) folgt

$$\mathcal{H}_i = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{N}_\mu(V) = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{R}\big(\mathcal{C}_\nu(S) - \overline{\mu}\big)^\perp.$$

Wegen $\mathcal{C}_\nu(S) = \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ -\overline{\nu} & 1 \end{pmatrix} S$ gilt nach Korollar 1.5.11

$$\mathcal{R}\big(\mathcal{C}_\nu(S) - \overline{\mu}\big) = \mathcal{R}\big(S - \phi_{\begin{pmatrix} -\nu & \overline{\nu} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}(\overline{\mu})\big).$$

Da $\phi_{\begin{pmatrix} -\nu & \overline{\nu} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}) = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ folgt weiter

$$\mathcal{H}_i = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}} \mathcal{R}\big(S - \phi_{\begin{pmatrix} -\nu & \overline{\nu} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}(\overline{\mu})\big)^\perp = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \mathcal{R}\big(S - \overline{\mu}\big)^\perp = \operatorname{cls} \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \mathcal{N}_\mu(S).$$

ad (v) : Folgt unmittelbar aus (iii) durch Verwendung der Cayleytransformierten wie in (iv). ❑

2.3 Nevanlinna Funktionen

2.3.1 Definition. Sei $q : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann heißt q *Nevanlinna Funktion*, falls $q(\overline{z}) = \overline{q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und $q(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ heißt *Herglotz Funktion*, falls gilt $\operatorname{Re} h(z) \geq 0$ für $z \in \mathbb{D}$, d.h. $h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^r \cup i\mathbb{R}$.

2.3.2 Bemerkung. Ist q eine Nevanlinna Funktion mit $q(z_0) \in \mathbb{R}$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}^+$, dann ist q konstant. Um dies einzusehen, betrachtet man die Funktion $f(z) := e^{iq(z)}$, und erhält

$$|f(z)| = \left| e^{iq(z)} \right| = e^{-\operatorname{Im} q(z)} \leq 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^+.$$

Wegen $|e^{iq(z_0)}| = 1$ folgt nach dem Maximumsprinzip, dass f konstant ist. Somit gilt auch $q(z) \equiv q(z_0) \in \mathbb{R}$.

Der folgende Satz liefert eine Integraldarstellung einer Nevanlinna Funktion.

2.3.3 Satz. *Eine Funktion q ist eine Nevanlinna Funktion genau dann, wenn*

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\lambda(t), \tag{2.10}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und λ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist mit der Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) < \infty$. Weiters ist dieser Zusammenhang bijektiv, d.h. zu jeder Nevanlinna Funktion q gibt es genau ein Tripel (a, b, λ) mit den oben genannten Eigenschaften, sodass Gleichung (2.10) *erfüllt ist.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch folgende Lemmata.

2.3.4 Lemma. *Sei $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ stetig und $u|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ harmonisch, dann ist u in $\mathbb{D}$ das Poisson Integral seiner Randwerte*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) u(e^{it}) dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dabei ist der Poissonkern definiert als

$$P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

Einen Beweis findet man in [Rud1, Theorem 11.9, Seite 235].

Für den folgenden Beweis benötigt man den *Darstellungssatz von Riesz* (siehe [Rud1], [Con2]). Dieser besagt, dass für einen kompakten Hausdorff-Raum X der Dualraum von $(C(X), \|.\|_\infty)$ isometrisch isomorph ist zum Raum der komplexen regulären Borelmaße μ auf X versehen mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$. Diese Isomorphie wird vermittelt durch die Beziehung

$$\mu \mapsto \Big(f \mapsto \int\limits_X f d\mu\Big), \ f \in C(X).$$

Für den Fall $X = \mathbb{T}$ bezeichnet man die Menge aller komplexen Borelmaße auf $\mathbb{T}$ mit $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ sowie mit $C(\mathbb{T})$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{T}$. Nun ist $\mathbb{T}$ isomorph zu $[0, 2\pi)$ vermöge der Abbildung $t \mapsto e^{it}$. Dabei entspricht $C(\mathbb{T})$ genau den 2π-periodischen stetigen Funktionen $C_\omega([0, 2\pi))$ und $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ entspricht $\mathcal{M}([0, 2\pi))$.
Weiters bezeichne im Folgenden Lemma λ das normierte Lebesgue Maß auf $[0, 2\pi)$, d.h. $\lambda([a, b]) = \frac{1}{2\pi}(b - a)$ für $a, b \in [0, 2\pi)$.

2.3.5 Lemma (Riesz-Herglotz)**.** *Sei h eine Herglotz Funktion. Dann existiert ein endliches positives Borelmaß ν auf $[0, 2\pi)$ und eine reelle Konstante c, sodass*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) + ic, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Beweis. Zunächst definiert man für $r \in [0, 1)$ und $z \in \overline{\mathbb{D}}$ die Funktion $h_r(z) := h(rz)$, dann ist die Funktion $\operatorname{Re} h_r$ harmonisch auf $\frac{1}{r}\mathbb{D}$ und für $z \in \frac{1}{r}\mathbb{D} \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ gilt $\operatorname{Re} h_r(z) \geq 0$. Nach Lemma 2.3.4 gilt somit

$$\operatorname{Re} h_r(z) = \int\limits_{[0,2\pi)} P(z, e^{it}) \operatorname{Re} h_r(e^{it}) d\lambda(t).$$

Betrachtet man nun die Maße ν_r, die für $\Delta \in \mathcal{B}([0, 2\pi))$ definiert sind durch

$$\nu_r(\Delta) := \int\limits_\Delta \underbrace{\operatorname{Re} h_r(e^{it})}_{\geq 0} d\lambda(t) \geq 0, \ r \in [0, 1).$$

Also sind die Maße ν_r sogar positiv. Daher gilt $\|\nu_r\| = \nu_r([0, 2\pi)) = \operatorname{Re} h(0)$ nach der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen. Betrachtet man nun diese Maße mittels des Darstellungssatzen von Riesz als Elemente von $(C_\omega([0, 2\pi)), \|.\|_\infty)^*$, dann bedeuted das, dass ν_r, als Element des Dualraumes, gleichmäßig beschränkt ist. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu existiert ein Maß $\nu \in \mathcal{M}([0, 2\pi))$ und eine Folge $r_n \in [0, 1)$, $r_n \to 1$, sodass $\lim_{n\to\infty} \nu_{r_n} \to \nu$ in der schwach-* Topologie von $(C_\omega([0, 2\pi)), \|.\|_\infty)^*$. Dazu beachte man, dass $(C_\omega([0, 2\pi)), \|.\|_\infty)^*$ separabel ist, da nach dem Satz von Stone-Weierstrass die trigonometrischen Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht liegen. Daher gilt für alle $f \in C_\omega([0, 2\pi))$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,2\pi)} f d\nu_{r_n} = \int\limits_{[0,2\pi)} f d\nu.$$

Daraus folgt auch, dass ν positiv ist. Nun gilt

$$\operatorname{Re} h(r_n z) = \operatorname{Re} h_{r_n}(z) = \int\limits_{[0,2\pi)} P(z, e^{it}) d\nu_{r_n}(t), \; z \in \mathbb{D}.$$

Lässt man in dieser Beziehung $r = r_n \to 1$ streben, so erhält man

$$\operatorname{Re} h(z) = \int\limits_{[0,2\pi)} P(z, e^{it}) d\nu(t) = \operatorname{Re} \int\limits_{[0,2\pi)} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t).$$

Da eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt ist, folgt die Behauptung. ❑

Beweis. (von Satz 2.3.3, Existenz). Angenommen a, b, λ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.3.3. Dann betrachtet man die Funktion

$$q(z) := a + bz + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\lambda(t)$$

und zeigt, dass $q(z)$ eine Nevanlinna Funktion ist. Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\delta > 0$ hinreichend klein, dann ist der Integrand wegen

$$\left| \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right| = \left| \frac{1+zt}{t-z} \right| \left| \frac{1}{t^2+1} \right| \leq C, \; z \in U_\delta(w),$$

gleichmäßig beschränkt, wobei $U_\delta \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Daher ist der Integrand holomorph und $q(z)$ wohldefiniert. Weiters gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\overline{q(z)} = a + b\overline{z} + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-\overline{z}} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\lambda(t) = q(\overline{z}).$$

Ist $z \in \mathbb{C}^+$, so erhält man für den Imaginärteil von $q(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} q(z) = \frac{1}{2i}\big(q(z) - \overline{q(z)}\big) &= b \operatorname{Im} z + \frac{1}{2i} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\overline{z}} \right) d\lambda(t) = \\ &= b \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t-z|^2} d\lambda(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Falls λ nicht das Nullmaß ist, gilt sogar $\operatorname{Im} q(z) > 0$. Somit ist $q(z)$ eine Nevanlinna Funktion.
Um die Umgekehrte Richtung zu zeigen verwendet man das Lemma von Riesz-Herglotz. Sei $q(z)$ eine Nevanlinna Funktion. Zunächst definiert man folgende Möbius Transformationen

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{D} \to \mathbb{C}^+, \; \mathbb{T} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ z \mapsto i\frac{1+z}{1-z} \end{cases} \quad \text{und} \quad \beta : \begin{cases} \mathbb{C}^+ \to \mathbb{D}, \; \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{T} \\ w \mapsto \frac{w-i}{w+i}. \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt $\beta = \alpha^{-1}$ und $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{T}\backslash\{1\}$. Weiters hat die Funktion β folgende Eigenschaften:

$$\frac{\beta(t)+\beta(w)}{\beta(t)-\beta(w)} = \frac{1}{i}\frac{tw+1}{t-w} \quad \text{sowie} \quad \frac{1+\beta(w)}{1-\beta(w)} = \frac{w}{i} \quad \text{für } t, w \in \mathbb{C}^+. \tag{2.11}$$

Betrachtet man nun die Funktion $h(z) := \frac{1}{i}q(\alpha(z)) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, dann gilt

$$\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Im} q(\alpha(z)) \geq 0,\ \ z \in \mathbb{D}.$$

Also ist h eine Herglotz Funktion. Nach Lemma 2.3.5 existiert ein endliches Borelmaß ν auf $[0, 2\pi)$ und eine reelle Konstante c, sodass

$$h(z) = \frac{1}{i}q(\alpha(z)) = ic + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi)} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t).$$

Auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ definiert man ein Maß durch

$$\tilde{\lambda}(\Delta) := \nu\big(\arg(\beta(\Delta))\big) \subseteq (0, 2\pi),\ \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $\tilde{\lambda} \geq 0$. Für eine Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int\limits_{(0,2\pi)} f d\nu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \circ \arg \circ \beta\ d\tilde{\lambda}.$$

Für $w \in \mathbb{C}^+$ ergibt sich wegen $e^{it} = \beta\big(\alpha(e^{it})\big)$, $t \neq 0$ und Gleichung (2.11)

$$\begin{aligned}
q(w) &= i\Big(\frac{1}{i}q\big(\alpha(\beta(w))\big)\Big) = i\left(ic + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi)} \frac{e^{it}+\beta(w)}{e^{it}-\beta(w)}d\nu(t)\right) = \\
&= -c + \frac{i}{2\pi}\frac{1+\beta(w)}{1-\beta(w)}\nu(\{0\}) + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{(0,2\pi)} \frac{\beta\big(\alpha(e^{it})\big)+\beta(w)}{\beta\big(\alpha(e^{it})\big)-\beta(w)}d\nu(t) = \\
&= \underbrace{-c}_{=:a} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\nu(\{0\})}_{=:b\geq 0} w + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(0,2\pi)} \frac{\alpha(e^{it})w+1}{\alpha(e^{it})-w}d\nu(t) =
\end{aligned}$$

$$= a + bw + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\tau w+1}{\tau - w}d\tilde{\lambda}(\tau) = a + bw + \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\tau-w} - \frac{\tau}{\tau^2+1}\right)\frac{\tau^2+1}{2\pi}d\tilde{\lambda}(\tau).$$

Setzt man $d\lambda(t) := \frac{t^2+1}{2\pi}d\tilde{\lambda}(t)$, dann gilt $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+1}d\lambda(t) = 2\pi\tilde{\lambda}(\mathbb{R}) < \infty$. Daher erfüllen a, b, λ die Anforderungen des Satzes, und somit ist der Existenzteil des Beweises abgeschlossen. ❑

2.3.6 Satz (Stieltjessche Umkehrformel)**.** *Sei q eine Nevanlinna Funktion und seien a, b sowie λ wie in der Integraldarstellung* (2.10)*, dann gilt*

(i) $a = \operatorname{Re} q(i)$.

(ii) $b = \lim_{y\to+\infty} \frac{q(iy)-q(-iy)}{2iy} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(iy)}{y}$.

(iii) Für $-\infty < c < d < \infty$ gilt

$$\frac{1}{\pi}\lim_{y\searrow 0}\int\limits_c^d \operatorname{Im} q(x+iy)dx = \lambda((c,d)) + \frac{1}{2}\lambda(\{c\}) + \frac{1}{2}\lambda(\{d\}). \tag{2.12}$$

Beweis.

ad (i) : Aus der Integraldarstellung (2.10) folgt unmittelbar

$$q(i) = a + bi + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-i} - \frac{t}{(t-i)(t+i)} \Big) d\lambda(t) = a + bi + i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda(t)}{1+t^2},$$

also $\operatorname{Re} q(i) = a$.

ad (ii) : Für $y > 1$ erhält man

$$\frac{\operatorname{Im} q(iy)}{y} = \frac{1}{y}\Big(by + \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{|t-iy|^2} d\lambda(t) \Big) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda(t)}{t^2+y^2} \to b \quad \text{für } y \to \infty,$$

wobei Grenzwertbildung und Integration nach dem Satz der beschränkten Konvergenz vertauscht werden darf, da der Integrand punktweise gegen 0 konvergiert und $\frac{1}{1+t^2}$ eine integrierbare Majorante ist.

ad (iii) : Definiert man die Funktion

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (c,d) \\ \frac{1}{2}, & t \in \{c,d\} \\ 0, & t \notin [c,d] \end{cases},$$

dann schreibt sich die rechte Seite von Gleichung (2.12) als

$$\lambda((c,d)) + \frac{1}{2}\lambda(\{c\}) + \frac{1}{2}\lambda(\{d\}) = \int_{\mathbb{R}} \chi(t) d\lambda(t).$$

Wegen $\operatorname{Im} q(z) = \operatorname{Im} z \big(b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t-z|^2} d\lambda(t) \big)$ folgt mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{\pi} \int_c^d \operatorname{Im} q(x+iy) dx - \int_{\mathbb{R}} \chi(t) d\lambda(t) = \frac{1}{\pi} \int_c^d y \Big(b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t-x-iy|^2} d\lambda(t) \Big) dx -$$

$$- \int_{\mathbb{R}} \chi(t) d\lambda(t) = \frac{1}{\pi} b(d-c)y + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_c^d \frac{y}{(t-x)^2+y^2} dx - \pi\chi(t) \Big) d\lambda(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} b(d-c)y + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(1+t^2)\Big(\arctan\frac{d-t}{y} - \arctan\frac{c-t}{y} - \pi\chi(t) \Big)}_{=:\Psi_y(t)} \frac{d\lambda(t)}{1+t^2}.$$

Unterscheidet man die Fälle $t \in (c,d)$, $t \in \{c,d\}$ sowie $t \notin [c,d]$, so erhält man $\lim_{y \searrow 0} \Psi_y(t) = 0$. Weiters ist $\Psi_y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt durch eine von y unabhängige Konstante. Hierfür unterscheidet man die Fälle $t \in [c-1, d+1]$, $t \in (-\infty, c-1)$ und $t \in (d+1, \infty)$.
Sei $t \in [c-1, d+1]$: Die Funktion $1+t^2$ ist stetig und daher auf jedem Kompaktum beschränkt. Weiters sind die Funktion $\arctan\frac{d-t}{y}$ sowie $\arctan\frac{c-t}{y}$ beschränkt durch $\frac{\pi}{2}$ und die Funktion $\chi(t)$ beschränkt durch 1. Somit existiert eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$|\Psi_y(t)| \leq C_1 \quad \forall t \in [c-1, d+1], \ \forall y \in (0,1).$$

Sei $t < c-1$: Wendet man den Mittelwertsatz auf die Funktion $x \mapsto \arctan(x)$ an, so folgt die Existenz einer Zwischenstelle $\xi \in (\frac{c-t}{y}, \frac{d-t}{y})$, sodass

$$\Psi_y(t) = (1+t^2)\frac{1}{1+\xi^2}\Big(\frac{d-t}{y} - \frac{c-t}{y}\Big) \leq \frac{1}{y}(1+t^2)\frac{1}{1+\frac{(c-t)^2}{y^2}}(d-c) =$$
$$= (1+t^2)\frac{y(d-c)}{y^2+(c-t)^2} \leq (1+t^2)\frac{d-c}{(c-t)^2} \leq C_2.$$

Analog erhält man eine Konstante C_3 für $t > d+1$. Insgesamt existiert eine Konstante $C > 0$:

$$|\Psi_y(t)| \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall y \in (0,1).$$

Da das Maß $\frac{d\lambda(t)}{1+t^2}$ endlich ist, besitzt damit $\Psi_y(t)$ eine integrierbare Majorante und nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$\lim_{y\searrow 0}\left(\frac{1}{\pi}b(d-c)y + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \Psi_y(t)\frac{d\lambda(t)}{1+t^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \lim_{y\searrow 0}\Psi_y(t)\frac{d\lambda(t)}{1+t^2} = 0,$$

womit Gleichung (2.12) bewiesen wäre. ❑

Beweis. (von Satz 2.3.3, Eindeutigkeit). Die Eindeutigkeit folgt aus der Stieltjesschen Umkehrformel. ❑

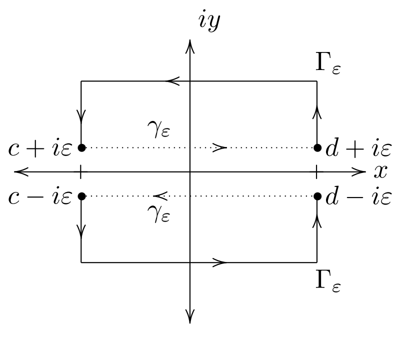
2.3.7 Korollar. *Ist q eine Nevanlinna Funktion und b sowie λ wie aus der zugehörigen Integraldarstellung* (2.10)*, dann gilt*

$$\operatorname{Im} q(i) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}d\lambda(t).$$

2.3.8 Korollar. *Ist q eine Nevanlinna Funktion und λ das zugehörige Maß aus der Integraldarstellung* (2.10)*, dann gilt für $-\infty < c < d < \infty$*

$$\lambda((c,d)) + \frac{1}{2}\lambda(\{c\}) + \frac{1}{2}\lambda(\{d\}) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} q(z)dz,$$

wobei Γ_ε folgender Integrationsweg ist



Beweis. Da q in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ holomorph ist gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\varepsilon} q(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\varepsilon} q(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_c^d q(x+i\varepsilon)dx - \int_c^d q(x-i\varepsilon)dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_c^d q(x+i\varepsilon)dx - \int_c^d \overline{q(x+i\varepsilon)}dx\Big) = \frac{1}{\pi}\int_c^d \operatorname{Im} q(x+i\varepsilon)dx.$$

Nach Satz 2.3.6 gilt aber

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_c^d \operatorname{Im} q(x+i\varepsilon)dx = \lambda((c,d)) + \frac{1}{2}\lambda(\{c\}) + \frac{1}{2}\lambda(\{d\}),$$

und somit folgt die Behauptung. ❑

2.3.9 Korollar. *Ist $q : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Nevanlinna Funktion, dann ist die Funktion*

$$K_q(w,z) := \begin{cases} \frac{q(z)-\overline{q(w)}}{z-\overline{w}} & z \neq \overline{w} \\ q'(z) & z = \overline{w} \end{cases}$$

ein positiver Kern.

Beweis. Für $z \neq \overline{w}$ gilt

$$\frac{q(z)-\overline{q(w)}}{z-\overline{w}} = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\cdot\frac{1}{t-\overline{w}}d\lambda(t).$$

Wegen $q'(z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-z)^2}d\lambda(t)$ folgt für den Kern $K_q(w,z)$

$$K_q(w,z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\cdot\frac{1}{t-\overline{w}}d\lambda(t), \quad \forall w,z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Somit ergibt sich für $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\xi_1,\dots,\xi_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i\overline{\xi}_j K_q(z_i,z_j) = \sum_{i,j=1}^n b\xi_i\overline{\xi}_j + \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_i\overline{\xi}_j}{(t-z_i)(t-\overline{z}_j)}d\lambda(t) =$$

$$= \underbrace{b(\xi_1+\dots+\xi_n)\overline{(\xi_1+\dots+\xi_n)}}_{\geq 0} + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big|\Big(\frac{\xi_1}{t-z_1}+\dots+\frac{\xi_n}{t-z_n}\Big)\Big|^2}_{\geq 0} d\lambda(t) \geq 0.$$

Also ist der Kern $K_q(w,z)$ positiv. ❑

2.4 Operatorwertige Nevanlinna Funktionen

2.4.1 Definition. Eine Funktion $Q : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to L(\mathcal{G})$, wobei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum ist, heißt *operatorwertige Nevanlinna Funktion*, falls gilt

·) Q ist holomorph,

·) $Q(\overline{z}) = Q(z)^*$ und

·) ist $z \in \mathbb{C}^+$, so folgt $\operatorname{Im} Q(z) = \frac{Q(z)-Q(z)^*}{2i} \geq 0$.

Gilt zusätzlich $\operatorname{Im} Q(z) \gg 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$, so heißt Q *strikte Nevanlinna Funktion.*

2.4.2 Satz. *Ist $Q(z)$ eine operatorwertige Nevanlinna Funktion, dann gibt es eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren $A, B \in L(\mathcal{G})$ mit $B \geq 0$ und ein eindeutiges operatorwertiges Maß Σ, d.h. $\Sigma(\Delta) \in L(\mathcal{G})$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, mit $\Delta \mapsto (\Sigma(\Delta)x, x)$ ist für alle $x \in \mathcal{G}$ ein endliches positives Maß, sodass*

$$Q(z) = A + zB + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) (t^2+1) d\Sigma(t) \tag{2.13}$$

im schwachen Sinn.

2.4.3 Bemerkung. Da jeder überall definierte positive Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bereits selbstadjungiert ist, (für $T \in L(\mathcal{H})$ gilt bekanntlich, dass T selbstadjungiert ist genau dann, wenn $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathcal{H}$) folgt, dass für jedes $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Operator $\Sigma(\Delta)$ selbstadjungiert ist.

Beweis. (von Satz 2.4.2). Sind A, B, Σ wie in den Voraussetzungen gegeben. Wir wollen zunächst zeigen, dass für festes $x, y \in \mathcal{G}$ die Funktion

$$z \mapsto (Ax, y) + z(Bx, y) + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) (t^2+1) d(\Sigma(t)x, y) =: R_{x,y}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ wohldefiniert und analytisch ist. Dafür betrachtet man

$$L_{x,y}(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) (t^2+1) d(\Sigma(t)x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{tz+1}{t-z} d(\Sigma(t)x, y).$$

Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist der Integrand beschränkt auf $\mathbb{R}$. Wegen der Voraussetzung und der Polarformel lässt sich $\Delta \mapsto \big(\Sigma(\Delta)x, y\big)$ schreiben als

$$\big(\Sigma(\Delta)x, y\big) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} i^j \big(\Sigma(\Delta)(x + i^j y), x + i^j y\big),$$

und ist daher ein komplexes Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Für die Totalvariation gilt

$$|(\Sigma(.)x, y)|(\Delta) \leq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} \big(\Sigma(\mathbb{R})(x + i^j y), x + i^j y\big), \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \tag{2.14}$$

Für $\|x\|, \|y\| \leq 1$ lässt sich dieser Ausdruck mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung durch $4\|\Sigma(\mathbb{R})\|$ abschätzen. Somit ist der Ausdruck $L_{x,y}(z)$ wohldefiniert. Weiters ist $z \mapsto L_{x,y}(z)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathcal{G}$ analytisch, denn es gilt

$$\begin{aligned} L_{x,y}(z) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{tz+1}{t-z} d\big(\Sigma(t)x, y\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(z + \frac{z^2+1}{t-z} \Big) d\big(\Sigma(t)x, y\big) = \\ &= z \underbrace{\big(\Sigma(\mathbb{R})x, y\big)}_{|.|<\infty} + (z^2+1) \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\big(\Sigma(t)x, y\big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ist $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\delta > 0$ so, dass $K_\delta(w) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \ |\zeta - w| < \delta\} \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, dann gilt

$$\left|\frac{z-w}{t-w}\right| \leq \frac{|z-w|}{\delta} < 1, \quad \forall z \in K_\delta(w), t \in \mathbb{R}.$$

Daher konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-w)^n}{(t-w)^{n+1}} = \frac{1}{t-z}$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für jedes feste $z \in K_\delta(w)$. Durch einsetzen in das Integral und Vertauschung der Integration und Summation (Satz von der beschränkten Konvergenz) ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\big(\Sigma(t)x, y\big)}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\big(\Sigma(t)x, y\big)}{(t-w)^{n+1}}}_{|.|<\infty} (z-w)^n, \quad z \in K_\delta(w).$$

Daher ist das Integral analytisch in z, und somit ist auch die Abbildung $z \mapsto L_{x,y}(z)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathcal{G}$ analytisch. Weiters überprüft man elementar, dass $L_{x,y}(\overline{z}) = \overline{L_{y,x}(z)}$, und dass $L_{x,y}(z)$ sesquilinear von (x, y) abhängt. Wegen $|(\Sigma(.)x, y)|(\Delta) \leq 4\|\Sigma(\mathbb{R})\|$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, für $\|x\|, \|y\| \leq 1$, erhält man mit Gleichung (2.15), dass die Sesquilinearform $L_{x,y}(z)$ durch eine nur von z abhängige Konstante beschränkt ist.
Damit ist auch $R_{x,y}(z)$ wohldefiniert, sesquilinear in (x, y) und für $\|x\|, \|y\| \leq 1$ beschränkt, sodass $R_{x,y}(\overline{z}) = \overline{R_{y,x}(z)}$. Daher gibt es einen eindeutigen beschränkten linearen Operator $Q(z)$ auf $\mathcal{G}$, sodass $(Q(z)x, y) = R_{x,y}(z)$ für alle $x, y \in \mathcal{G}$. Da mit $L_{x,y}(z)$ auch $(Q(z)x, y)$ in z analytisch ist, ist Q analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Weiters gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\big(Q(\overline{z})x, y\big) = R_{x,y}(\overline{z}) = \overline{R_{y,x}(z)} = \overline{(Q(z)y, x)} = \big(x, Q(z)y\big),$$

also folgt $Q(z)^* = Q(\overline{z})$. Ist $z \in \mathbb{C}^+$, so erhält man für $x \in \mathcal{G}$

$$\big(\operatorname{Im} Q(z)x, x\big) = \operatorname{Im} z (Bx, x) + \operatorname{Im} z \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2+1}{|t-z|^2} d(\Sigma(t)x, x) \geq 0,$$

da B ein positiver Operator und $\Delta \mapsto (\Sigma(\Delta)x, x)$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, ein positives Maß ist. Daher ist $Q(z)$ eine operatorwertige Nevanlinna Funktion.
Sei umgekehrt eine operatorwertige Nevanlinna Funktion $Q(z)$ gegeben. Für festes $x \in \mathcal{G}$ ist die Funktion $q(z) := (Q(z)x, x)$ eine skalarwertige Nevanlinna Funktion, denn es gilt $\operatorname{Im} q(z) = (\operatorname{Im} Q(z)x, x) \geq 0$. Somit gibt es $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ mit $b_x > 0$ und λ ein positives Borel Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\lambda < \infty$, sodass

$$q(z) = a_x + b_x z + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1) d\mu,$$

wobei $d\mu = \frac{d\lambda}{1+t^2}$. Für $x, y \in \mathcal{G}$ gilt nach der Polarformel

$$(Q(z)x, y) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \Big(Q(z)(x + i^j y), (x + i^j y)\Big) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j a_{x+i^j y}}_{=:a_{x,y}} + z\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j b_{x+i^j y}}_{=:b_{x,y}} + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1)d\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \mu_{x+i^j y}}_{=:\mu_{x,y}}\Big).$$

Nun zeigen wir, dass die Größen $a_{x,y},\ b_{x,y}$ und $\mu_{x,y}$ eindeutig durch die Funktion $(Q(z)x, y) =: f(z)$ bestimmt sind. Dazu spaltet man diese Größen in den positiven/negativen Real- und Imaginärteil auf:

$$\begin{aligned} a_{x,y} &= \alpha_{r,+} - \alpha_{r,-} + i(\alpha_{i,+} - \alpha_{i,-}) \\ b_{x,y} &= \beta_{r,+} - \beta_{r,-} + i(\beta_{i,+} - \beta_{i,-}) \\ \mu_{x,y} &= \gamma_{r,+} - \gamma_{r,-} + i(\gamma_{i,+} - \gamma_{i,-}). \end{aligned}$$

Dann sind die Funktionen

$$f_M(z) := \alpha_M + \beta_M z + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t^2+1}\Big)(t^2+1)d\gamma_M,$$

wobei $M \in \{(r,+), (r,-), (i,+), (i,-)\}$, Nevanlinna Funktionen, da die Größen $\alpha_M,\ \beta_M$ und γ_M den Anforderungen aus Satz 2.3.3 genügen und es gilt

$$f(z) = f_{r,+}(z) - f_{r,-}(z) + i\big(f_{i,+}(z) - f_{i,-}(z)\big).$$

Nach Satz 2.3.6 (ii) gilt

$$\lim_{w\to\infty} \frac{f(iw) - f(-iw)}{2iw} = \beta_{r,+} - \beta_{r,-} + i(\beta_{i,+} - \beta_{i,-}) = b_{x,y}.$$

Also ist $b_{x,y}$ durch f eindeutig bestimmt. Nach Korollar 2.3.8 gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f_{r,+}(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f_{r,-}(z)dz - \\ -\frac{i}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f_{i,+}(z)dz + \frac{i}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f_{i,-}(z)dz = \gamma_{r,+}((c,d)) + \frac{1}{2}\gamma_{r,+}(\{c\}) + \\ +\frac{1}{2}\gamma_{r,+}(\{d\}) - \gamma_{r,-}((c,d)) - \frac{1}{2}\gamma_{r,-}(\{c\}) - \frac{1}{2}\gamma_{r,-}(\{d\}) + i\gamma_{i,+}((c,d)) + \\ +\frac{i}{2}\gamma_{i,+}(\{c\}) + \frac{i}{2}\gamma_{i,+}(\{d\}) - i\gamma_{i,-}((c,d)) - \frac{i}{2}\gamma_{i,-}(\{c\}) - \frac{i}{2}\gamma_{i,-}(\{d\}) = \\ = \mu_{x,y}((c,d)) + \frac{1}{2}\mu_{x,y}(\{c\}) + \frac{1}{2}\mu_{x,y}(\{d\}), \end{aligned}$$

also ist auch $\mu_{x,y}$ eindeutig bestimmt durch $f(z) = (Q(z)x, y)$. Schließlich ist somit auch $a_{x,y}$ eindeutig durch f bestimmt.
Die Formen $(x; y) \mapsto a_{x,y}$, $(x; y) \mapsto b_{x,y}$ und $(x; y) \mapsto \mu_{x,y}(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, sind

Hermitesche Formen, denn für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\big(Q(z)(\alpha x_1 + \beta x_2), y\big) &= a_{\alpha x_1+\beta x_2,y} + b_{\alpha x_1+\beta x_2,y} z + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1)\, d\mu_{\alpha x_1+\beta x_2,y} = \\ = \alpha\big(Q(z)x_1, y\big) + \beta\big(Q(z)x_2, y\big) &= \alpha a_{x_1,y} + \beta a_{x_2,y} + (\alpha b_{x_1,y} + \beta b_{x_2,y})z + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1)\, d(\alpha\mu_{x_1,y} + \beta\mu_{x_2,y}).\end{aligned}$$

Da die Integraldarstellung eindeutig ist, sind die Formen linear in der ersten Komponente. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\big(Q(z)y, x\big) &= a_{y,x} + b_{y,x} z + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1)\, d\mu_{y,x} = \\ = \big(y, Q(\overline{z})x\big) = \overline{\big(Q(\overline{z})x, y\big)} &= \overline{a_{x,y}} + \overline{b_{x,y}} z + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)(t^2+1)\, d\overline{\mu_{x,y}}.\end{aligned}$$

Also sind die Formen auch hermitesch. Für $\|x\|, \|y\| \leq 1$ folgt $\|x + i^j y\| \leq 2$. Weiters ist $\big(Q(z)(x+i^j y), (x+i^j y)\big)$ eine Nevanlinna Funktion und somit erhält man unter Verwendung von Satz 2.3.6

$$\begin{aligned}|a_{x,y}| \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |a_{x+i^j y, x+i^j y}| &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |\operatorname{Re}\big(Q(i)(x+i^j y), (x+i^j y)\big)| \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |\big(Q(i)(x+i^j y), (x+i^j y)\big)| \leq 4\|Q(i)\|.\end{aligned}$$

Mit Korollar 2.3.7 ergibt sich weiter

$$|b_{x,y}| \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |b_{x+i^j y, x+i^j y}| \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |\operatorname{Im}\big(Q(i)(x+i^j y), (x+i^j y)\big)| \leq 4\|Q(i)\|,$$

$$\begin{aligned}|\mu_{x,y}(\Delta)| \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |\mu_{x+i^j y, x+i^j y}(\Delta)| &\leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \mu_{x+i^j y, x+i^j y}(\mathbb{R}) \leq \\ \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \operatorname{Im}\big(Q(i)(x+i^j y), (x+i^j y)\big) &\leq 4\|Q(i)\|.\end{aligned}$$

Daher sind diese drei hermiteschen Formen beschränkt und somit existieren in eindeutiger Weise selbstadjungierte Operatoren $A, B, \Sigma(\Delta) \in L(\mathcal{G})$, sodass

$$\begin{aligned}a_{x,y} &= (Ax, y) \\ b_{x,y} &= (Bx, y) \quad \text{mit} \quad (Bx, x) = b_{x,x} \geq 0 \\ \mu_{x,y}(\Delta) &= (\Sigma(\Delta)x, y) \quad \text{mit} \quad (\Sigma(\Delta)x, x) = \mu_{x,x} \geq 0.\end{aligned}$$

Die Positivität der Operatoren B und $\Sigma(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, folgt aus der Eindeutigkeit der Größen $b_{x,x}$ sowie $\mu_{x,x}$ in der Integraldarstellung der Nevanlinna

Funktion $(Q(z)x, x)$. Da die Größen $a_{x,y}, b_{x,y}$ und $\mu_{x,y}$ eindeutig durch die Funktion f bestimmt sind, folgt somit die Eindeutigkeit der Integraldarstellung im schwachen Sinn. ❑

2.4.4 Korollar. *Es sei Q eine Nevanlinna Funktion und A, B sowie Σ wie in Satz 2.3.3, dann sind äquivalent:*

(i) Q ist strikte Nevanlinna Funktion.

(ii) Es gilt $\Sigma(\mathbb{R}) + B \gg 0$.

(iii) Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}^+$, sodass $\operatorname{Im} Q(z_0) \gg 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (iii)$ Klar.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Nach Vorraussetzung existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\delta(x, x) \le \big(\operatorname{Im} Q(z_0)x, x\big) = (Bx, x) \operatorname{Im} z_0 + \operatorname{Im} z_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{(t^2+1)}{|t - z_0|^2} d(\Sigma(t)x, x).$$

Weiters existieren Konstante $c, d > 0$, sodass

$$c(t^2 + 1) \le |t - z_0|^2 \le d(t^2 + 1) \tag{2.16}$$

und daher folgt weiter

$$\delta(x, x) \le (Bx, x) \operatorname{Im} z_0 + \frac{\operatorname{Im} z_0}{c}(\Sigma(\mathbb{R})x, x) \le \max\{\operatorname{Im} z_0, \frac{\operatorname{Im} z_0}{c}\}\big((B+\Sigma(\mathbb{R}))x, x\big).$$

Also ist $\Sigma(\mathbb{R}) + B$ ein strikt positiver Operator.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Wieder mit der Abschätzung (2.16) erhält man für ein $\delta > 0$ und für $z \in \mathbb{C}^+$:

$$(Bx, x) \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z \int_{\mathbb{R}} \frac{(t^2+1)}{|t - z|^2} d(\Sigma(t)x, x) \ge (Bx, x) \operatorname{Im} z + \frac{\operatorname{Im} z}{d}(\Sigma(\mathbb{R})x, x) \ge$$

$$\ge \min\{\operatorname{Im} z, \frac{\operatorname{Im} z}{d}\}\big((B + \Sigma(\mathbb{R})x, x\big) \ge \delta(x, x),$$

d.h. Q ist strikte Nevanlinna Funktion. ❑

2.4.5 Korollar. *Es sei Q eine Nevanlinna Funktion, dann ist*

$$K_Q(w, z) := \frac{Q(z) - Q(w)^*}{z - \overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$$

ein positiver Kern, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(K(z_i, z_j)x_i, x_j\Big)\xi_i\overline{\xi}_j \ge 0, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Wegen der Integraldarstellung einer operatorwertigen Nevanlinnafunktion gilt

$$\begin{aligned}\big(K(w,z)x,y\big) &= \frac{1}{z-\overline{w}}\Big(\big(Q(z)x,y\big)-\big(Q(\overline{w})x,y\big)\Big) = \\ &= \frac{1}{z-\overline{w}}\Big((z-\overline{w})(Bx,y)+\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\overline{w}}\Big)(t^2+1)d(\Sigma(t)x,y)\Big) = \\ &= (Bx,y)+\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(t-z)(t-\overline{w})}(t^2+1)d(\Sigma(t)x,y).\end{aligned}$$

Sind $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{G}$ und $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbb{C}$, so ergibt sich zunächst

$$\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\xi}_j(Bx_i,x_j)=\Big(B\sum_{i=1}^{n}\xi_ix_i,\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\Big)\geq 0.$$

Weiters gilt, da man nach dem Satz der beschränkten Konvergenz das Lebesgue Integral über $\mathbb{R}$ als Grenzwert eines Lebesgue Integrals über $[-A,A]$ schreiben kann und anschließend das Lebesgue Integral als Rieman-Stieltjes Integral auffassen kann

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\xi}_j\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(t-z_i)(t-\overline{z}_j)}(t^2+1)d\big(\Sigma(t)x_i,x_j\big) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\xi}_j\lim_{A\to\infty}\int_{[-A,A]}\frac{1}{(t-z_i)(t-\overline{z}_j)}(t^2+1)d\big(\Sigma(t)x_i,x_j\big) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\overline{\xi}_j\lim_{A\to\infty}\lim_{|\mathfrak{Z}|\to 0}\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})}(\alpha_k^2+1)\frac{1}{\alpha_k-z_i}\frac{1}{\alpha_k-\overline{z}_j}\big(\Sigma((\zeta_{k-1},\zeta_k])x_i,x_j\big) = \\ &= \lim_{A\to\infty}\lim_{|\mathfrak{Z}|\to 0}\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})}(\alpha_k^2+1)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\xi_i}{\alpha_k-z_i}\frac{\overline{\xi}_j}{\alpha_k-\overline{z}_j}\big(\Sigma((\zeta_{k-1},\zeta_k])x_i,x_j\big) = \\ &= \lim_{A\to\infty}\lim_{|\mathfrak{Z}|\to 0}\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})}(\alpha_k^2+1)\left(\Sigma((\zeta_{k-1},\zeta_k])\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{\alpha_k-z_i}x_i,\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{\alpha_k-z_i}x_i\right)\geq 0,\end{aligned}$$

wobei die Riemann-Stieljtes Zerlegung $\mathfrak{Z}=\big((\zeta_k)_{k=0}^{n(\mathfrak{Z})},(\alpha_k)_{k=1}^{n(\mathfrak{Z})}\big)$ gewählt wurde. Insgesamt erhält man, dass für alle $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{G}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Big(K(z_i,z_j)x_i,x_j\Big)\xi_i\overline{\xi}_j\geq 0,\quad \xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbb{C}.$$

Daher ist der Kern $K_Q(w,z)$ positiv. ❑

2.5 Kern reproduzierende Hilberträume

2.5.1 Definition. Sei $\mathcal{G}$ ein beliebiger Hilbertraum und $M\subseteq\mathbb{C}$. Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt Kern reproduzierender Hilbertraum (abkürzend schreiben wir KRHR), falls die Elemente $f \in \mathcal{H}$ Funktionen von M nach $\mathcal{G}$ sind, also $f : M \to \mathcal{G}$, sodass

$$(\alpha f + \beta g)(m) = \alpha f(m) + \beta g(m), \ m \in M, \ f, g \in \mathcal{H}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

und weiters für jedes $m \in M$ das Punktauswertungsfunktional

$$E(m) : \begin{cases} \mathcal{H} \to \mathcal{G} \\ f \mapsto f(m) \end{cases}$$

stetig ist.

2.5.2 Proposition. *Sei $\mathcal{H}$ ein KRHR und $M \subseteq \mathbb{C}$. Definiert man für $m, n \in M$ die Funktion $K(m, n) := E(n)E(m)^* \in L(\mathcal{G})$, dann gilt:*

(i) $K(m, n)$ ist ein positiver Kern auf $M \times M$.

(ii) Für $n \in M$ fest und $x \in \mathcal{G}$ fest ist die Funktion $f : m \mapsto K(n, m)x$ ein Element von $\mathcal{H}$.

(iii) Es gilt $\operatorname{cls}\{f : m \mapsto K(n, m)x : \ n \in M, x \in \mathcal{G}\} = \mathcal{H}$.

(iv) Für alle $f \in \mathcal{H}$, $n \in M$, $x \in \mathcal{G}$ gilt

$$\Big(f(n), x\Big)_{\mathcal{G}} = \Big(f, (m \mapsto K(n, m)x)\Big)_{\mathcal{H}}.$$

Beweis.

ad (i) : Sei $m_1, \dots, m_n \in M$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G}$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi}_j \big(K(m_i, m_j)x_i, x_j\big)_{\mathcal{G}} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi}_j \big(E(m_j)E(m_i)^* x_i, x_j\big)_{\mathcal{G}} =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i E(m_i)^* x_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(m_i)^* x_i\Big)_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

ad (ii) : Für festes $n \in M$ und festes $x \in \mathcal{G}$ ist $E(n)^* x \in \mathcal{H}$, und für $m \in M$ gilt

$$\big(E(n)^* x\big)(m) = E(m)E(n)^*(x) = K(n, m)x.$$

Also erhält man $E(n)^* x = \big(m \mapsto K(n, m)x\big) \in \mathcal{H}$.

ad (iii) : Sei $\mathcal{M} := \operatorname{span}\{(m \mapsto K(n, m)x) : \ n \in M, x \in \mathcal{G}\}$ und angenommen $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{H}$, dann gibt es ein $g \in \mathcal{H}$, $g \neq 0$ mit $g \perp \mathcal{M}$. Es gilt

$$0 = \big(g, (m \mapsto K(n, m)x)\big)_{\mathcal{H}} = \big(g, E(n)^* x\big)_{\mathcal{H}} = \big(g(n), x\big)_{\mathcal{G}} \quad \forall n \in M, x \in \mathcal{G}$$

also folgt $g = 0$, d.h. $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{H}$.

ad (iv) : Für $n, m \in M$, $x \in \mathcal{G}$ und $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$\Big(f(n), x\Big)_{\mathcal{G}} = \Big(E(n)f, x\Big)_{\mathcal{G}} = \Big(f, E(n)^* x\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(f, (m \mapsto K(n, m)x\Big)_{\mathcal{H}}.$$

❑

2.5.3 Satz. *Es sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Weiters sei $K(m,n) \in L(\mathcal{G})$ ein positiver Kern auf $M \times M$, dann existiert genau ein KRHR $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft*

$$K(m,n) = E(n)E(m)^*. \tag{2.17}$$

Beweis. Betrachte den linearen Raum

$$\mathfrak{X} := \operatorname{span}\{K(m,.)x : \ m \in M, x \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{G}^M$$

und definiere für $f, g \in \mathfrak{X}$, $f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i K(n_i,.)x_i$, $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j K(m_j,.)y_j$,

$$(f,g) := \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta}_j \big(K(n_i,m_j)x_i, y_j\big)_{\mathcal{G}}. \tag{2.18}$$

Wir zeigen, dass $(.,.)$ wohldefiniert ist: Angenommen f besitzt auch eine andere Darstellung $f = \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \tilde{\alpha}_i K(\tilde{n}_i,.)\tilde{x}_i$, dann gilt

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \tilde{\alpha}_i \overline{\beta}_j \big(K(\tilde{n}_i,m_j)\tilde{x}_i, y_j\big)_{\mathcal{G}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \Big(\sum_{i=1}^{\tilde{l}} \tilde{\alpha}_i K(\tilde{n}_i,m_j)\tilde{x}_i, y_j\Big)_{\mathcal{G}} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \big(f(m_j), y_j\big)_{\mathcal{G}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \Big(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i K(n_i,m_j)x_i, y_j\Big)_{\mathcal{G}} = (f,g).$$

Entsprechendes gilt, wenn g eine andere Darstellung hat. Also ist $(.,.)$ wohldefiniert.
Da der Kern $K(m,n)$ nach Vorraussetzung positiv ist, gilt für $f \in \mathfrak{X}$ stets

$$(f,f) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_i \overline{\alpha}_j \big(K(m_i,m_j)x_i, x_j\big)_{\mathcal{G}} \geq 0.$$

Offensichtlich ist $(.,.)$ in der ersten Komponente linear. Wegen Lemma 2.1.15 gilt $K(m,n)^* = K(n,m)$ und damit ergibt sich

$$\overline{(f,g)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}_i \beta_j \overline{\big(K(n_i,m_j)x_i, y_j\big)_{\mathcal{G}}} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}_i \beta_j \big(y_j, K(n_i,m_j)x_i\big)_{\mathcal{G}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}_i \beta_j \big(K(n_i,m_j)^* y_j, x_i\big)_{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}_i \beta_j \big(K(m_j,n_i) y_j, x_i\big)_{\mathcal{G}} = (g,f),$$

also ist $(.,.)$ ein positiv semidefinites inneres Produkt. Angenommen es ist $(f,f) = 0$, dann folgt mit der Schwarzschen Ungleichung $(f,g) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{X}$. Für $g = K(n,.)x$ erhält man

$$(f,g) = \Big(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i K(n_i,n)x_i, x\Big)_{\mathcal{G}} = \big(f(n), x\big)_{\mathcal{G}} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{G}, n \in M,$$

d.h. $f = 0$. Also ist $(.,.)$ sogar positiv definit.
Sei $(\hat{\mathfrak{X}}, (.,.)_{\hat{\mathfrak{X}}})$ die Hilbertraum-Vervollständigung von $(\mathfrak{X}, (.,.))$ und betrachte für festes $m \in M$, $g \in \hat{\mathfrak{X}}$ das lineare Funktional

$$\psi_{g,m} : \begin{cases} \mathcal{G} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \big(K(m,.)x, g\big)_{\hat{\mathfrak{X}}}. \end{cases}$$

Für $x \in \mathcal{G}$, $g \in \hat{\mathfrak{X}}$ und $m \in M$ gilt wegen (2.18)

$$\begin{aligned}\left|\big(K(m,.)x, g\big)_{\hat{\mathfrak{X}}}\right| &\leq \|g\|_{\hat{\mathfrak{X}}} \|K(m,.)x\|_{\hat{\mathfrak{X}}} = \|g\|_{\hat{\mathfrak{X}}} \sqrt{\big(K(m,.)x, K(m,.)x\big)_{\mathfrak{X}}} = \\ &= \|g\|_{\hat{\mathfrak{X}}} \sqrt{\big(K(m,m)x, x\big)_{\mathcal{G}}} \leq \|g\|_{\hat{\mathfrak{X}}} \sqrt{\|K(m,m)\|_{L(\mathcal{G})}} \|x\|_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

Daher ist $\psi_{g,m}$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{G}$ und somit existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz ein eindeutiges Element $h_{g,m} \in \mathcal{G}$, sodass

$$\big(x, h_{g,m}\big)_{\mathcal{G}} = \psi_{g,m}(x) = \big(K(m,.)x, g\big)_{\hat{\mathfrak{X}}}.$$

Nun betrachtet man die Einbettung

$$\iota : \begin{cases} \hat{\mathfrak{X}} & \to \mathcal{G}^M \\ g & \mapsto \iota(g), \end{cases}$$

wobei $\iota(g)(m) := h_{g,m}$ für $g \in \hat{\mathfrak{X}}$ und $m \in M$. Dann gilt

$$\big(\iota(g)(m), x\big)_{\mathcal{G}} = \big(g, K(m,.)x\big)_{\hat{\mathfrak{X}}} \quad \forall m \in M, x \in \mathcal{G}, g \in \hat{\mathfrak{X}} \tag{2.19}$$

und daher ist ι linear. Weiters ist ι injektiv, denn angenommen $\iota(g)(m) = 0$ für alle $m \in M$, dann erhält man

$$\big(\iota(g)(m), x\big)_{\mathcal{G}} = \big(g, K(m,.)x\big)_{\hat{\mathfrak{X}}} = 0 \quad \forall m \in M,\ x \in \mathcal{G}.$$

Da $K(m,.)x$ ganz $\mathfrak{X}$ aufspannt und da $\mathfrak{X}$ dicht in $\hat{\mathfrak{X}}$ ist, folgt $g = 0$. Setzt man $\mathcal{H} := \iota(\hat{\mathfrak{X}})$ und definiert auf $\mathcal{H}$ ein inneres Produkt $(.,.)_{\mathcal{H}}$ so, dass ι isometrisch ist, dann ist $\big(\mathcal{H}, (.,.)_{\mathcal{H}}\big)$ ein Hilbertraum, dessen Elemente Funktionen von M nach $\mathcal{G}$ sind.

Nun zeigt man, dass für jedes $m \in M$ das Punktauswertungsfunktional

$$E(m) : \begin{cases} \mathcal{H} & \to \mathcal{G} \\ f & \mapsto f(m) \end{cases}$$

stetig ist. Sei $m \in M$, $x \in \mathcal{G}$ fest, dann gilt $K(m,.)x \in \mathfrak{X} \subseteq \hat{\mathfrak{X}}$, und daher ergibt sich wegen Gleichung (2.19)

$$\big(\iota(K(m,.)x)(n), y\big)_{\mathcal{G}} = \big(K(m,.)x, K(n,.)y\big)_{\hat{\mathfrak{X}}} = \big(K(m,n)x, y\big)_{\mathcal{G}} \quad \forall y \in \mathcal{G}, n \in M,$$

also folgt $\iota\big(K(m,.)x\big) = K(m,.)x$ und damit $\iota|_{\mathfrak{X}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}}$. Weiters gilt für $f \in \mathcal{H}$, $f = \iota g$,

$$\begin{aligned}\big(E(m)f, x\big)_{\mathcal{G}} &= \big(f(m), x\big)_{\mathcal{G}} = \big(\iota(g)(m), x\big)_{\mathcal{G}} = \big(g, K(m,.)x\big)_{\hat{\mathfrak{X}}} = \\ &= \big(\iota g, \iota K(m,.)x\big)_{\mathcal{H}} = \big(f, K(m,.)x\big)_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Abbildung $f \mapsto \big(f, K(m,.)x\big)_{\mathcal{H}}$ ist stetig für alle $x \in \mathcal{G}$, $m \in M$, und somit folgt nach der letzten Gleichung, dass die Abbildung

$$f \mapsto \big(E(m)f, x\big)_{\mathcal{G}}$$

stetig für alle $x \in G$ und $m \in M$ ist. Daraus folgt, dass $E(m)$ abgeschlossen ist für alle $m \in M$, denn für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $f_n \to f$ und $E(m)f_n \to y \in \mathcal{G}$ folgt wegen der Stetigkeit auch

$$\big(E(m)f_n, x\big)_{\mathcal{G}} \to \big(E(m)f, x\big)_{\mathcal{G}} \quad \text{sowie} \quad \big(E(m)f_n, x\big)_{\mathcal{G}} \to \big(y, x\big) \quad \forall x \in \mathcal{G},$$

also gilt $E(m)f = y$, d.h. $E(m)$ ist für alle $m \in M$ abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt die Stetigkeit von $E(m)$ für alle $m \in M$ und daher ist $\big(\mathcal{H}, (.,.)_{\mathcal{H}}\big)$ ein KRHR.

Definiert man $\tilde{K}(m,n) := E(n)E(m)^* \in L(\mathcal{G})$ für $m, n \in M$, dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}$

$$\big(\tilde{K}(m,n)x, y\big)_{\mathcal{G}} = \big(E(m)^*x, E(n)^*y\big)_{\mathcal{H}}.$$

Für $m \in M$, $f \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{G}$ ergibt sich wegen Gleichung (2.20)

$$\big(f, E(m)^*x\big)_{\mathcal{H}} = \big(E(m)f, x\big)_{\mathcal{G}} = \big(f, K(m,.)x\big)_{\mathcal{G}},$$

also gilt $E(m)^*x = K(m,.)x$ für $m \in M$ und alle $x \in \mathcal{G}$. Daraus erhält man wieder mit (2.20)

$$\big(E(m)^*x, E(n)^*y\big)_{\mathcal{H}} = \big(K(m,.)x, K(n,.)y\big)_{\mathcal{H}} = \big(K(m,n)x, y\big)_{\mathcal{G}} \quad \forall x, y \in \mathcal{G},$$

d.h. $\tilde{K}(m,n) = K(m,n)$ für alle $m, n \in M$.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Angenommen $\big(\mathcal{H}_1, (.,.)_{\mathcal{H}_1}\big)$ und $\big(\mathcal{H}_2, (.,.)_{\mathcal{H}_2}\big)$ sind KRHR mit Kern $K(m,n)$. Wegen Proposition 2.5.2 (iii), (iv) enthalten beide Räume den Raum $\mathfrak{X}$ als dichten linearen Teilraum und auf diesem ist das jeweilige innere Produkt gegeben durch (2.18). Also ist $\mathrm{id} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ isometrisch. Sie gestattet daher eine Fortsetzung zu einer Isometrie Φ von $\big(\mathcal{H}_1, (.,.)_{\mathcal{H}_1}\big)$ auf $\big(\mathcal{H}_2, (.,.)_{\mathcal{H}_2}\big)$. Für $m \in M$ gilt $(E(m) \circ \Phi)|_{\mathfrak{X}} = E(m)|_{\mathfrak{X}}$ und da Punktauswerten stetig ist, folgt $E(m) \circ \Phi = E(m)$, d.h. $\Phi = \mathrm{id}$. ❑

2.5.4 Proposition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K(w,z)$ ein positiver Kern auf $\Omega \times \Omega \to L(\mathcal{G})$, dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent*

(i) Alle $f \in \mathcal{H}$ sind analytisch.

(ii) Für jedes feste $w \in \Omega$ ist $K(w,z)$ analytisch in $z \in \Omega$ und $\|K(z,z)\|$ ist gleichmäßig beschränkt auf jeder kompakten Menge $K \subseteq \Omega$.

Beweis. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* Für $f \in \mathcal{H}$ ist zu zeigen, dass f analytisch ist. Wegen Proposition 2.5.2 (iii) ist $A := \mathrm{span}\{f : \ z \mapsto K(w,z)x : \ w \in \Omega, x \in \mathcal{G}\}$ dicht in $\mathcal{H}$, und daher gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in der Norm von $\mathcal{H}$ gegen f konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} = 0$. Insbesondere sind die f_n als Elemente von A analytisch. Wir zeigen Konvergenz in der Norm impliziert lokal gleichmäßige Konvergenz. Sei $\emptyset \neq K \subseteq \Omega$ kompakt, dann erhält man für $z \in K$ und $x \in \mathcal{G}$ mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\big|\big(f_n(z) - f(z), x\big)_{\mathcal{G}}\big| &= \big|\big(f_n - f, K(z,.)x\big)_{\mathcal{H}}\big| \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \|K(z,.)x\|_{\mathcal{H}} = \\ &= \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\big(K(z,z)x, x\big)_{\mathcal{G}}} \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\|K(z,z)\|_{\mathcal{G}}} \|x\|_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\|K(z,z)\|$ gleichmäßig beschränkt auf jeder kompakten Menge $K \subseteq \Omega$ ist folgt, dass $f_n(x)$ lokal gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert und

daher ist $f(x)$ analytisch für alle $x \in \mathcal{G}$, und daher ist auch f analytisch.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Nach Proposition 2.5.2 (ii) ist für jedes feste $w \in \Omega$ und $x \in \mathcal{G}$ die Abbildung $(z \mapsto K(w,z)x) \in \mathcal{H}$ und daher nach Voraussetzung analytisch. Nach Lemma 2.0.5 ist somit auch $z \mapsto K(w,z)$ analytisch.
Wegen $\|K(w,w)\| = \|E(w)E(w)^*\| = \|E(w)\|^2$ ist es ausreichend zu zeigen, dass $\|E(w)\|$ gleichmäßig beschränkt ist auf jeder kompakten Menge $K \subseteq \Omega$. Sei $w \in \Omega$ und betrachte die Abbildung $w \mapsto E(w) \in L(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, dann gilt für $f \in \mathcal{H}$ sowie für $x \in \mathcal{G}$

$$\big(E(w)f, x\big)_{\mathcal{G}} = \big(f(w), x\big)_{\mathcal{G}}.$$

Also ist $w \mapsto E(w)$ analytisch und somit auch stetig. Insbesondere ist die Abbildung $w \mapsto \|E(w)\|$ stetig, und damit $\|E(w)\|$ gleichmäßig beschränkt auf jeder kompakten Menge $K \subseteq \Omega$. ❑

2.5.5 Lemma. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum, $K(w,z) \in L(\mathcal{G})$ ein Kern auf $M \times M$, wobei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $(T_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie in $L(\mathcal{G})$. Ist der Kern $K(w,z)$ positiv, dann ist der Kern*

$$K_1(w,z) := T_z K(w,z) T_w^*$$

ebenfalls positiv. Sind alle T_λ, $\lambda \in M$, injektiv, so gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Seien $z_1, \dots, z_n \in M$, $x_1, \dots, x_n \in G$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{i,j} \big(K_1(z_i,z_j)x_i, x_j\big)\xi_i\overline{\xi}_j = \sum_{i,j} \big(T_{z_j}K(z_i,z_j)T_{z_i}^* x_i, x_j\big)\xi_i\overline{\xi}_j =$$
$$= \sum_{i,j} \big(K(z_i,z_j)\underbrace{T_{z_i}^* x_i}_{\in\mathcal{G}}, \underbrace{T_{z_j}^* x_j}_{\in\mathcal{G}}\big)\xi_i\overline{\xi}_j \geq 0.$$

Sind alle T_λ, $\lambda \in M$, injektiv, dann gilt wegen Lemma 1.2.5 (ii) $\mathcal{R}(T_\lambda^*)^\perp = \ker(T_\lambda) = \{0\}$ für alle $\lambda \in M$, d.h. T_λ^* hat dichtes Bild und somit gilt auch die Umkehrung. ❑

2.6 Modellräume für Nevanlinna Funktionen

2.6.1 Lemma. *Sei $M \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\mathcal{G}$ ein beliebiger Hilbertraum und $Q : M \to L(\mathcal{G})$ stetig so, dass $Q(\overline{z}) = Q(z)^*$ falls $z, \overline{z} \in M$. Weiters habe Q die Eigenschaft, dass*

$$K(w,z) := \begin{cases} \frac{Q(z)-Q(w)^*}{z-\overline{w}}, & \textit{falls } z \neq \overline{w}, \\ \lim_{\zeta \to \overline{w}} \frac{Q(\zeta)-Q(w)^*}{\zeta - \overline{w}}, & \textit{falls } z = \overline{w} \textit{ ein Häufungspunkt von } M \textit{ ist,} \end{cases}$$

wohldefiniert ist und $K(w,z) \in L(\mathcal{G})$ ein positiver Kern auf M ist. Falls $z = \overline{w}$ ein isolierter Punkt von M ist, ist $K(w, \overline{w})$ ein beliebiger beschränkter Operator auf $\mathcal{G}$. Weiters sei $\mathcal{H}$ der zu K gehörige reproduzierende Kern Hilbertraum und $\tilde{S}$ folgende lineare Relation auf $\mathcal{H}$

$$\tilde{S} := \Bigg\{(f;g) \in \mathcal{H}^2 : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ w_1, \dots, w_n \in M, \ x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G} \textit{ mit } \sum_{i=1}^n x_i = 0 :$$
$$f = \sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i \textit{ und } g = \sum_{i=1}^n \overline{w}_i K(w_i, .)x_i\Bigg\}. \qquad (2.21)$$

Dann gilt:

(i) $\tilde{S}$ *ist symmetrisch in* $\mathcal{H}$.

(ii) Für $S := \overline{\tilde{S}}$ *gilt* $n_+ = 0$ $(n_- = 0)$ *falls* M *einen Häufungspunkt in* $\mathbb{C}^+$ $(\mathbb{C}^-)$ *besitzt, wobei* (n_+, n_-) *der Defektindex von* S *ist.*

(iii) $S = S^*$ *falls* M *einen Häufungspunkt in* $\mathbb{C}^+$ *und in* $\mathbb{C}^-$ *hat.*

Beweis.

ad (i) : Man überprüft leicht, dass $\tilde{S}$ eine lineare Relation in $\mathcal{H}$ ist. Sei $(f;g) \in \tilde{S}$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $w_1, \dots, w_n \in M$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{G}$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, sodass $f = \sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i$ sowie $g = \sum_{i=1}^n \overline{w}_i K(w_i, .)x_i$. Wir zeigen, dass $(f;g) \in \tilde{S}^*$. Dazu sei $(h;k) \in \tilde{S}$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m \in M$, $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m \in \mathcal{G}$ mit $\sum_{i=1}^m \tilde{y}_i = 0$, sodass $h = \sum_{i=1}^m K(\tilde{w}_i, .)\tilde{y}_i$ sowie $k = \sum_{i=1}^m \overline{\tilde{w}}_i K(\tilde{w}_i, .)\tilde{y}_i$. Nun definiert man $l := m + n$ und weiters

$$x_{n+j} := 0,\ w_{n+j} := \tilde{w}_j,\ y_{n+j} := \tilde{y}_j \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, m,$$
$$y_j := 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Paare $(f;g)$ und $(h;k)$ schreiben sich jetzt als

$$(f;g) = \Big(\sum_{i=1}^l K(w_i, .)x_i; \sum_{i=1}^l \overline{w}_j K(w_i, .)x_i\Big) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^l x_i = 0,$$
$$(h;k) = \Big(\sum_{i=1}^l K(w_i, .)y_i; \sum_{i=1}^l \overline{w}_j K(w_i, .)y_i\Big) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^l y_i = 0.$$

Sei $\mathfrak{X} := \text{span}\{K(m, .)x : \ m \in M, x \in \mathcal{G}\}$ wie im Beweis von Satz 2.5.3, dann gilt $f, g, h, k \in \mathfrak{X}$ und dort ist das innere Produkt gegeben durch 2.18. Also ergibt sich

$$(f, k) = \sum_{i,j=1}^l w_j \Big(K(w_i, w_j)x_i, y_j\Big), \quad (g, h) = \sum_{i,j=1}^l \overline{w}_i \Big(K(w_i, w_j)x_i, y_j\Big).$$

Unterscheidet man die möglichen Fälle für K in Abhängigkeit von M, so ergibt sich für $z, w \in M$

$$(z - \overline{w})K(w, z) = \begin{cases} Q(z) - Q(w)^* & \text{falls } z \neq \overline{w}, \\ 0 & \text{falls } z = \overline{w}. \end{cases}$$

Wegen $Q(\overline{w}) - Q(w)^* = 0$, falls $w, \overline{w} \in M$, gilt sogar

$$(z - \overline{w})K(w, z) = Q(z) - Q(w)^*, \quad \forall z, w \in M.$$

Somit erhält man für die Differenz der beiden inneren Produkte

$$(f, k) - (g, h) = \sum_{i,j=1}^l \Big((w_j - \overline{w}_i)K(w_i, w_j)x_i, y_j\Big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^l \Big(\big(Q(w_j) - Q(w_i)^*\big)x_i, y_j\Big) = \sum_{i,j=1}^l \big(x_i, Q(w_j)^* y_j\big) - \sum_{i,j=1}^l \big(Q(w_i)^* x_i, y_j\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^l \Big(\sum_{i=1}^l x_i, Q(w_j)^* y_j\Big) - \sum_{i=1}^l \Big(Q(w_i)^* x_i, \sum_{j=1}^l y_j\Big) = 0,$$

da $\sum_{i=1}^l x_i = \sum_{j=1}^l y_j = 0$. Daher folgt $(f;g) \in \tilde{S}^*$, und somit ist $\tilde{S}$ eine symmetrisch Relation in $\mathcal{H}$.

ad (ii) : Zunächst zeigt man, dass für $\overline{z}_0 \in M$ gilt

$$\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0) = \Big\{ f \in \mathcal{H} : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ w_1, \ldots, w_n \in M, \ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{G}, \\ \text{wobei } x_i = 0 \text{ falls } \overline{w}_i = z_0 : \ f = \sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i \Big\}.$$

Für $f \in \mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $w_1, \ldots, w_n \in M$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{G}$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, sodass $f = \sum_{i=1}^n (\overline{w}_i - z_0) K(w_i, .)x_i$. Definiert man $y_j := (\overline{w}_j - z_0)x_j$, $j = 1, \ldots, n$, dann gilt $y_i = 0$ falls $\overline{w}_i = z_0$ und man erhält die gewünschte Darstellung von f.
Sei nun umgekehrt $f = \sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i$ wobei $x_i = 0$ falls $w_i = \overline{z}_0$. Man erhält für f weiter

$$f = \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n (\overline{w}_i - z_0) K(w_i, .) \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} - \big(\overline{\overline{z}_0} - z_0\big) K(\overline{z}_0, .) \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n K(w_i, .) \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} - K(\overline{z}_0, .) \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} \\ \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n \overline{w}_i K(w_i, .) \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} - \overline{\overline{z}_0} K(\overline{z}_0, .) \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} \end{pmatrix} \in \tilde{S}, \tag{2.22}$$

folgt $f \in \mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$.
Ist $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}^-$ ein Häufungspunkt von M, dann ist zu zeigen, dass $\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Da $\mathfrak{X}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist genügt es zu zeigen, dass jedes Element von $\mathfrak{X}$ durch Elemente von $\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$ approximiert werden kann. Sei $g \in \mathfrak{X}$ mit $g = \sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i$ und definiert man $J := \{i \in \mathbb{N} : \ i \leq n \ \wedge \ \overline{w}_i = z_0\}$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^n K(w_i, .)x_i = \sum_{j \in J} K(\overline{z}_0, .)x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n K(w_i, .)x_i = K(\overline{z}_0, .)x + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n K(w_i, .)x_i}_{\in \mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)},$$

wobei $x := \sum_{j \in J} x_j$. Es ist daher ausreichend zu zeigen, dass $K(\overline{z}_0, .)x$ durch Elementen von $\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$ approximiert werden kann.
In Hilberträumen konvergiert ein Netz $(u_i)_{i \in I}$, $u_i \in \mathcal{H}$, gegen ein Element $u \in \mathcal{H}$ genau dann, wenn $\|u_i\| \to \|u\|$ und $(u_i, v) \to (u, v)$ für alle $v \in D \subseteq \mathcal{H}$ und einer dichten Teilmenge D.
Betrachtet man nun das Netz $\big(K(w, .)x\big)_{w \in M \setminus \{\overline{z}_0\}}$[2] in $\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$, und sei $h \in \mathfrak{X}$ mit $h = \sum_{i=1}^l K(z_i, .)y_i$. Definiert man $J' := \{i \in \mathbb{N} : \ i \leq l \ \wedge \ \overline{z}_i = z_0\}$ und

[2]Zur Erinnerung: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$, z Ein Häufungspunkt von D und definiert man auf $D \setminus \{z\}$ eine Relation $\preceq$ durch $x \preceq y :\Leftrightarrow |y - z| \leq |x - z|$, dann ist $(D \setminus \{z\}, \preceq)$ eine gerichtete Menge.

setzt $y := \sum_{j\in J'} y_j$, dann gilt

$$\big(K(w,.)x,h\big) = \sum_{i=1}^{l}\big(K(w,z_i)x,y_i\big) = \big(K(w,\overline{z}_0)x,y\big) + \sum_{\substack{i=1\\ \overline{z}_i\neq z_0}}^{l}\big(K(w,z_i)x,y_i\big).$$

Da Q und die Adjungiertenbildung (in $L(\mathcal{G})$) stetig sind folgt $Q(w)\to Q(\overline{z}_0)^*$ für $w\to\overline{z}_0$ und daher

$$\lim_{w\to\overline{z}_0} K(w,\overline{z}_0) = \lim_{w\to\overline{z}_0}\frac{Q(\overline{z}_0)-Q(w)^*}{\overline{z}_0-\overline{w}} = K(\overline{z}_0,\overline{z}_0).$$

Sei $w_0\in(M\backslash\{\overline{z}_0\})$ so, dass $w_0\succ z_i$ für $i=1,\dots,l$, dann gilt für alle $w\in(M\backslash\{\overline{z}_0\})$ mit $w\succeq w_0$

$$\lim_{w\to\overline{z}_0} K(w,z_i) = \lim_{w\to\overline{z}_0}\frac{Q(z_i)-Q(w)^*}{z_i-\overline{w}} = \frac{Q(z_i)-Q(\overline{z}_0)}{z_i-z_0} = K(\overline{z}_0,z_i).$$

$$\lim_{w\to\overline{z}_0}\big(K(w,.)x,h\big) = \lim_{w\to\overline{z}_0}\big(K(w,\overline{z}_0)x,y\big) + \lim_{w\to\overline{z}_0}\sum_{\substack{i=1\\ \overline{z}_i\neq z_0}}^{l}\big(K(w,z_i)x,y_i\big) =$$

$$= \big(K(\overline{z}_0,\overline{z}_0)x,y\big) + \sum_{\substack{i=1\\ \overline{z}_i\neq z_0}}^{l}\big(K(\overline{z}_0,z_i)x,y_i\big) = \sum_{i=1}^{l}\big(K(\overline{z}_0,z_i)x,y_i\big) = \big(K(\overline{z}_0,.)x,h\big).$$

Also konvergiert $\big(K(w,.)x\big)_{w\in M\backslash\{\overline{z}_0\}}$ schwach auf der dichten Teilmenge $\mathfrak{X}$ gegen $K(\overline{z}_0,.)x$. Wieder wegen der Stetigkeit von Q und der Adjungiertenbildung gilt $\|K(w,.)x\|\to\|K(\overline{z}_0,.)x\|$, denn

$$\big(K(w,.)x,K(w,.)x\big)=\big(K(w,w)x,x\big)\to\big(K(\overline{z}_0,\overline{z}_0)x,x\big)=\big(K(\overline{z}_0,.)x,K(\overline{z}_0,.)x\big).$$

Daher folgt insgesamt

$$\lim_{w\in M\backslash\{\overline{z}_0\}} K(w,.)x = K(\overline{z}_0,.)x$$

und somit ist $\mathcal{R}(\tilde{S}-z_0)$ dicht.

ad (iii) : Diese Aussage folgt unmittelbar aus (ii) sowie Lemma 2.1.1. ❑

2.6.2 Satz. *Sei $Q:\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\to L(\mathcal{G})$ eine strikte Nevanlinna Funktion, dann gibt es einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer minimalen symmetrischen Relation $S\leq\mathcal{H}$ und einer kanonischen selbstadjungierten Erweiterung $A^*=A\supseteq S$ mit zugehöriger Defektfamilie $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\rho(A)}$, sodass Q die Q-Funktion von dem Tripel $(S,A,(\Gamma_\lambda))$ ist. Dabei ist $(\mathcal{H},S,A,(\Gamma_\lambda))$ eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz.*

Beweis. Wir wenden Lemma 2.6.1 auf $M=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ an. Nach Korollar 2.4.5 ist der Kern $K_Q(w,z) := \frac{Q(z)-Q(w)^*}{z-\overline{w}}$, $z,w\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, einer Nevanlinna Funktion positiv auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Somit existiert ein KRHR $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{G}^M$ und eine symmetrische Relation $\tilde{S}$ in $\mathcal{H}$. Da M sowohl in $\mathbb{C}^+$ als auch in $\mathbb{C}^-$ Häufungspunkte besitzt ist $A:=\overline{\tilde{S}}$

selbstadjungiert.
Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ definiert man

$$\Gamma_\lambda : \begin{cases} \mathcal{G} \to \mathcal{H} \\ x \mapsto K_Q(\overline{\lambda}, .)x \end{cases}.$$

Die Abbildung Γ_λ ist beschränkt, denn für alle $x \in \mathcal{G}$ gilt

$$\|\Gamma_\lambda x\|^2 = \big(K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\lambda})x, x\big) \leq \|K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\lambda})\|\|x\|^2,$$

und $K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\lambda}) \in L(\mathcal{G})$. Da Q eine strikte Nevanlinna Funktion ist gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^+$ und $x \in \mathcal{G}$ folgt

$$\|\Gamma_\lambda x\|^2 = \big(K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\lambda})x, x\big) = \left(\frac{\operatorname{Im}(Q(\overline{\lambda}))}{\operatorname{Im} \overline{\lambda}} x, x\right) \geq \delta\|x\|^2.$$

Für $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^-$ gilt $\operatorname{Im} Q(\overline{\lambda}) = -\operatorname{Im} Q(\lambda)$ und daher $\frac{\operatorname{Im} Q(\overline{\lambda})}{\operatorname{Im} \overline{\lambda}} = \frac{\operatorname{Im} Q(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}$. Daher gilt für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und alle $x \in \mathcal{G}$

$$\|\Gamma_\lambda x\|^2 \geq \delta\|x\|^2.$$

Somit ist Γ_λ beschränkt invertierbar am Bild, d.h. $\Gamma_\lambda^{-1} : \Gamma_\lambda(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ ist stetig, also ist $\Gamma_\lambda : \mathcal{G} \to \Gamma_\lambda(\mathcal{G})$ bistetig.
Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt

$$\Big(K_Q(\overline{\lambda}, .)x - K_Q(\overline{\mu}, .)x; \lambda K_Q(\overline{\lambda}, .)x - \mu K_Q(\overline{\mu}, .)x\Big) \in \tilde{S}$$
$$\Big(K_Q(\overline{\lambda}, .)x - K_Q(\overline{\mu}, .)x; (\lambda - \mu)K_Q(\overline{\mu}, .)x\Big) \in \tilde{S} - \lambda$$

Daraus folgt

$$\big(\Gamma_\mu x; \Gamma_\lambda x\big) = \Big(K_Q(\overline{\mu}, .)x; K_Q(\overline{\lambda}, .)x\Big) \in I + (\lambda - \mu)(\tilde{S} - \lambda)^{-1}$$

und da $\tilde{S} \subseteq A$ ergibt sich

$$\big[I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1}\big]\Gamma_\mu x = \Gamma_\lambda x. \tag{2.23}$$

Nun definieren wir eine symmetrische Relation S in $\mathcal{H}$ so, dass Γ_λ eine Defektfamilie von (S, A) ist. Dazu muss $\Gamma_\lambda(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{R}(S - \overline{\lambda})^\perp$ gelten. Sei $\mu_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, dann ist

$$S := \{(f; g) \in A : \; g - \overline{\mu}_0 f \perp \Gamma_{\mu_0}(\mathcal{G})\}.$$

Offensichtlich ist S als Einschränkung der selbstadjungierten Relation A symmetrisch. Für $(f; g) \in S$ gilt $(g - \overline{\mu}_0 f; f) \in (A - \overline{\mu}_0)^{-1}$ und mit (2.23) folgt weiter

$$0 = (g - \overline{\mu}_0 f, \Gamma_{\mu_0} x) = \Big(g - \overline{\mu}_0 f, \big(I + (\mu_0 - \mu)(A - \mu_0)^{-1}\big)\Gamma_\mu x\Big) =$$
$$= \Big(\big(I + (\overline{\mu}_0 - \overline{\mu})(A - \overline{\mu}_0)^{-1}\big)(g - \overline{\mu}_0 f), \Gamma_\mu x\Big) = \big(g - \overline{\mu}_0 f + (\overline{\mu}_0 - \overline{\mu})f, \Gamma_\mu x\big) =$$
$$= (g - \overline{\mu} f, \Gamma_\mu x) = 0.$$

Somit gilt $\mathcal{R}(S-\overline{\mu})^{\perp}=\Gamma_\mu\mathcal{G}$ für alle $\mu\in\rho(A)$, d.h. $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\rho(A)}$ ist eine Defektfamilie von (S,A).
Nach Lemma 2.2.6 (iv) ist S minimal genau dann, wenn $\operatorname{cls}\bigcup_{\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\mathcal{R}(S-\overline{\mu})^{\perp}=\mathcal{H}$. Wegen $\mathcal{R}(S-\overline{\mu})^{\perp}=\Gamma_\mu\mathcal{G}=\{K_Q(\overline{\mu},.)x:\ x\in\mathcal{G}\}$ und da $\mathfrak{X}=\operatorname{span}\{K_Q(w,.)x:\ w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},x\in\mathcal{G}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist folgt, dass S minimal ist.
Für $x,y\in\mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned}(\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda x,y)&=\big(K_Q(\overline{\lambda},.)x,K_Q(\overline{\mu},.)y\big)=\big(K_Q(\overline{\lambda},\overline{\mu})x,y\big)=\\&=\left(\frac{Q(\overline{\mu})-Q(\overline{\lambda})^*}{\overline{\mu}-\lambda}x,y\right)=\left(\frac{Q(\lambda)-Q(\mu)^*}{\lambda-\overline{\mu}}x,y\right).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit bis auf unitäre Äquivalenz zu zeigen. Angenommen es existieren Tupel $\big(\mathcal{H}_i,S_i,A_i,(\Gamma_\lambda^i)_{\lambda\in\rho(A_i)}\big)$, $i=1,2$, sodass Q die Q-Funktion zu dem Tripel $\big(S_i,A_i,(\Gamma_\lambda^i)_{\lambda\in\rho(A_i)}\big)$, $i=1,2$, ist. Wir zeigen die Existenz einer unitären Abbildung $U:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$. Da $S_{1,2}$ minimal ist und der Defektraum $\mathcal{G}$ in beiden Fällen der Selbe ist, gilt

$$\mathcal{H}_{1,2}=\operatorname{cls}\{\Gamma_\mu^{1,2}\mathcal{G}:\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}.$$

Nun definiert man eine lineare Relation U durch

$$U=\left\{\Big(\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\mu_i}^1x_i;\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\mu_i}^2x_i\Big):\quad x_i\in\mathcal{G},\mu_i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},l\in\mathbb{N}.\right\}$$

Wegen (2.24) folgt weiter

$$\Big(\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\mu_i}^2x_i,\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\lambda_i}^2y_i\Big)=\sum_{i,j=1}^{l}\left(\frac{Q(\mu_i)-Q(\lambda_i)^*}{\mu_i-\overline{\lambda}_i}x_i,y_i\right)=\Big(\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\mu_i}^1x_i,\sum_{i=1}^{l}\Gamma_{\lambda_i}^1y_i\Big),$$

also ist U eine isometrische Relation und daher ein Operator. Weiters ist der Operator $U:\operatorname{span}\{\Gamma_\mu^1\mathcal{G}:\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}\to\operatorname{span}\{\Gamma_\mu^2\mathcal{G}:\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$ bijektiv und isometrisch. Daher existiert eine bijektive isometrische Fortsetzung von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_2$, die wir ebenfalls mit U bezeichnen, und es gilt $U\circ\Gamma_\mu^1=\Gamma_\mu^2$ für alle $\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
Für $\lambda,\mu\in\rho(A_1)$ gilt

$$\big[I+(\lambda-\mu)(A_1-\lambda)^{-1}\big]\Gamma_\mu^1x=\Gamma_\lambda^1x,$$

und daraus erhält man unmittelbar

$$(A_i-\lambda)^{-1}\Gamma_\mu^ix=\frac{\Gamma_\lambda^i-\Gamma_\mu^i}{\lambda-\mu}x,\quad i=1,2.$$

Durch Anwendung des unitären Operators U ergibt sich weiter

$$U\big((A_1-\lambda)^{-1}\Gamma_\mu^1x\big)=\frac{\Gamma_\lambda^2-\Gamma_\mu^2}{\lambda-\mu}x=(A_2-\lambda)^{-1}\Gamma_\mu^2x=(A_2-\lambda)^{-1}U(\Gamma_\mu^1x).$$

Daraus folgt $U(A_1-\lambda)^{-1}=(A_2-\lambda)^{-1}U$ und somit gilt $(U\times U)(A_1)=A_2$. Nachdem $S_i=\{(f;g)\in A_i:\ g\overline{\mu}f\perp\Gamma_\mu^i\mathcal{G}\}$ folgt die Eindeutigkeit bis auf unitäre Äquivalenz. ❑

2.6.3 Korollar. *Sei $(\mathcal{H}, S, A, (\Gamma_\lambda))$ wie im Existenzteil von Satz 2.6.2 und $f \in \mathcal{H}$, $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathcal{G}$ holomorph. Dann gilt*

$$\left((A - z_0)^{-1} f\right)(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z_0 \in \rho(A), z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Beweis. Es gilt $\overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_0)} = \mathcal{R}(A - z_0) = \mathcal{H}$. Sei $g \in \mathcal{R}(\tilde{S} - z_0)$, d.h. $g = \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq \overline{z}_0}}^n K_Q(w_i, .)x_i$ für $n \in \mathbb{N}$, $w_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $x_i \in \mathcal{G}$. Aus (2.22) folgt unmittelbar

$$\left(g; \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{w}_i \neq z_0}}^n \left(K_Q(w_i, .) - K_Q(\overline{z}_0, .)\right) \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} \right) \in (\tilde{S} - z_0)^{-1},$$

Da A eine Erweiterung von $\tilde{S}$ ist gilt

$$(A - z_0)^{-1} g = (\tilde{S} - z_0)^{-1} g = \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq \overline{z}_0}}^n K_Q(w_i, .) \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0} - K_Q(\overline{z}_0, .) \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq \overline{z}_0}}^n \frac{x_i}{\overline{w}_i - z_0}.$$

Für $z \neq z_0$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \Big(((A - z_0)^{-1} f)(z), y\Big)_{\mathcal{G}} &= \Big((A - z_0)^{-1} f, K(z, .)y\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(f, ((A - \overline{z}_0)^{-1} K(z, .)y)\Big)_{\mathcal{H}} = \\ &= \Big(f, K(z, .)\frac{y}{\overline{z} - \overline{z}_0} - K(z_0, .)\frac{y}{\overline{z} - \overline{z}_0}\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(\frac{1}{z - z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big), y\Big)_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine holomorphe Funktion in z und auch die rechte Seite. Durch Fortsetzen in den Punkt $z = z_0$ folgt die Behauptung. ❑

2.7 Fortsetzbarkeit von Nevanlinna Funktionen

2.7.1 Satz. *Sei M entweder eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}^+$ oder $\mathbb{C}^-$ oder $M \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ offen und $Q : M \to L(\mathcal{G})$. Ist M offen, dann sei Q holomorph auf M und es gelte $Q(\overline{z}) = Q(z)^*$ falls $z = \overline{z} \in M$. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Fortsetzung $\tilde{Q}$ von Q auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, sodass $\tilde{Q} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to L(\mathcal{G})$ eine Nevanlinna Funktion ist genau dann, wenn der Kern $K_Q(w, z)$ positiv auf M ist.*

Beweis. Existiert eine Fortsetzung $\tilde{Q}$ von Q, sodass $\tilde{Q}$ eine Nevanlinna Funktion ist, so folgt nach Korollar 2.4.5, dass der Kern $K_{\tilde{Q}}(w, z)$ positiv auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist. Somit ist der Kern $K_Q(w, z)$ positiv auf M.
Nun zur Umkehrung: Sei $K_Q(w, z)$ ein positiver Kern auf M. Nach Lemma 2.6.1 gibt es einen KRHR $\mathcal{H}$, dessen Elemente Funktionen von M nach $\mathcal{G}$ sind, und die durch (2.21) definierte Relation $\tilde{S}$ ist symmetrisch in $\mathcal{H}$. Nun definiert man $S := \overline{\tilde{S}}$, dann ist S abgeschlossen und symmetrisch. Daher existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}' \supseteq \mathcal{H}$,eine Relation $A' \supseteq S$ und A' ist selbstadjungiert in $\mathcal{H}'$. Weiters defniert man für $\overline{\lambda} \in M$ die Abbildung

$$\Gamma_\lambda : \begin{cases} \mathcal{G} \to \mathcal{H} \\ x \mapsto K_Q(\overline{\lambda}, .)x \end{cases}.$$

Die Abbildung Γ_λ ist beschränkt, denn es gilt

$$\|\Gamma_\lambda x\| = \|K_Q(\overline{\lambda}, .)x\| \leq \|K_Q(\overline{\lambda}, .)\|\|x\|.$$

Für $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in M$ und $x \in \mathcal{G}$ erhält man

$$\big((K_Q(\overline{\lambda}, .)x - K_Q(\overline{\mu})x; \lambda K_Q(\overline{\lambda}, .)x - \mu K_Q(\overline{\mu}, .)\big) \in \tilde{S} \subseteq S \subseteq A'.$$

Daraus folgt

$$\big(K_Q(\overline{\mu}, .)x; K_Q(\overline{\lambda}, .)x\big) \in \big[I + (\lambda - \mu)(A' - \lambda)^{-1}\big],$$

also gilt $\Gamma_\lambda = \big[I + (\lambda - \mu)(A' - \lambda)^{-1}\big]\Gamma_\mu$.
Daher kann man die Famile $(\Gamma_\lambda)_{\overline{\lambda} \in M}$ für ein festes $\overline{\mu}_0 \in M$ auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ fortsetzen

$$\tilde{\Gamma}_\lambda := \big[I + (\lambda - \mu_0)(A' - \lambda)^{-1}\big]\Gamma_{\mu_0}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Setzt man $T_{\mu_0,\lambda} := I + (\lambda - \mu_0)(A' - \lambda)^{-1}$, dann schreibt sich diese Gleichung als $\tilde{\Gamma}_\lambda = T_{\mu_0,\lambda}\Gamma_{\mu_0}$. Für $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ergibt sich $\tilde{\Gamma}_\mu = T_{\mu_0,\mu}\Gamma_{\mu_0}$ und somit erhält man wegen Gleichung (2.4)

$$T_{\mu,\lambda}\tilde{\Gamma}_\mu = T_{\mu,\lambda}T_{\mu_0,\mu}\Gamma_{\mu_0} = T_{\mu_0,\lambda}\Gamma_{\mu_0} = \tilde{\Gamma}_\lambda.$$

Somit gilt

$$\tilde{\Gamma}_\lambda = \big[I + (\lambda - \mu)(A' - \lambda)^{-1}\big]\tilde{\Gamma}_\mu, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Im Folgenden bezeichnen wir diese Fortsetzung der Famile $(\Gamma_\lambda)_{\overline{\lambda} \in M}$ auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}$. Weiters folgt aus Gleichung (2.25) unmittelbar, dass die Abbildung $z \mapsto \Gamma_z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ analytisch ist.
Für $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in M$ gilt

$$(\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda x, y)_\mathcal{G} = (\Gamma_\lambda x, \Gamma_\mu y)_\mathcal{H} = \big(K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\mu})x, y\big)_\mathcal{G}, \quad \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

Wegen $K_Q(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \frac{Q(\overline{\mu}) - Q(\overline{\lambda})^*}{\overline{\mu} - \overline{\overline{\lambda}}}$ erhält man daraus

$$Q(\overline{\lambda})^* = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda + Q(\overline{\mu}).$$

Für $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ folgt daher $Q(\overline{\mu})^* = (\mu - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\mu + Q(\overline{\mu})$ und es ergibt sich weiter

$$Q(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda} - \mu)\Gamma_\lambda^*\Gamma_\mu + (\mu - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\mu + Q(\overline{\mu}), \quad \forall \overline{\lambda}, \overline{\mu} \in M.$$

Mit Lemma 2.1.6 (2.3) folgt

$$\begin{aligned} Q(\overline{\lambda}) = \Gamma_\mu^*\big[(\overline{\lambda} - \mu)T_{\overline{\mu},\overline{\lambda}} + (\mu - \overline{\mu})I\big]\Gamma_\mu + Q(\overline{\mu}) = \Gamma_\mu^*\big[(\overline{\lambda} - \overline{\mu})T_{\mu,\overline{\lambda}}\big]\Gamma_\mu + Q(\overline{\mu}) = \\ = (\overline{\lambda} - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_{\overline{\lambda}} + Q(\overline{\mu}), \end{aligned}$$

für alle $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in M$. Nun kann man für festes $\overline{\mu}_0 \in M$ eine Fortsetzung von Q auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ definieren

$$\tilde{Q}(z) := (z - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_z + Q(\overline{\mu}_0), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Es ist zu zeigen, dass $\tilde{Q}$ eine Nevanlinna Funktion ist. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $\tilde{Q}$ auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ holomorph ist.

Mit Lemma 2.1.6 (2.5) und wegen $Q(\overline{\mu}_0)^* - Q(\overline{\mu}_0) = (\mu_0 - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_{\mu_0}$ erhält man für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\lambda) - \tilde{Q}(\mu)^* &= (\lambda - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_\lambda + Q(\overline{\mu}_0) - (\overline{\mu} - \mu_0)\Gamma_\mu^*\Gamma_{\mu_0} - Q(\overline{\mu}_0)^* = \\ &= (\lambda - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_\lambda - (\overline{\mu} - \mu_0)\Gamma_\mu^*\Gamma_{\mu_0} - (\mu_0 - \overline{\mu}_0)\Gamma_{\mu_0}^*\Gamma_{\mu_0} = \\ &= \Gamma_{\mu_0}^*\left[(\lambda - \overline{\mu}_0)T_{\mu_0,\lambda} - (\overline{\mu} - \mu_0)T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} - (\mu_0 - \overline{\mu}_0)I\right]\Gamma_{\mu_0} = \\ &= \Gamma_{\mu_0}^*\left[(\lambda - \overline{\mu})T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}}T_{\mu_0,\lambda}\right]\Gamma_{\mu_0} = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^*\Gamma_\lambda = (\lambda - \overline{\mu})\Gamma_\mu^* T_{\mu,\lambda}\Gamma_\mu.\end{aligned}$$

Führt man den Grenzübergang $\lambda \to \overline{\mu}$ durch, so ergibt sich $\tilde{Q}(\overline{\mu}) = \tilde{Q}(\mu)^*$. Weiters gilt für $\lambda \in \mathbb{C}^+$

$$\left(\frac{\operatorname{Im}\tilde{Q}(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}x, x\right)_{\mathcal{G}} = (\Gamma_\lambda x, \Gamma_\lambda x)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

Somit ist $\tilde{Q}$ eine Nevanlinna Funktion. ❑

2.7.2 Bemerkung. Falls $\frac{\operatorname{Im} Q(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \gg 0$ für ein $\overline{\lambda} \in M$, dann ist $\tilde{Q}$ eine strikte Nevanlinna Funktion und Q-Funktion von dem Tripel $(S', A', (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}})$, wobei $S' = \{(f;g) : \ (f;g) \in A', \ g - \overline{\mu}f \perp \Gamma_\mu(\mathcal{G})\}$.

2.7.3 Korollar (Satz von Nevanlinna-Pick)**.** *Sei $M = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{C}^+$ eine endlich Teilmenge und seien $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}^+$ (nicht notwendiger weise verschieden), dann existiert eine Nevanlinna Funktion $q : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $q(z_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, genau dann wenn die Pick Matrix $\mathbb{P}$ positiv semidefinit ist, wobei*

$$\mathbb{P} = \left(\frac{w_i - \overline{w}_j}{z_i - \overline{z}_j}\right)_{i,j=1}^n.$$

Beweis. Man definiert die Funktion $\hat{q} : M \to \mathbb{C}^+$ durch $\hat{q}(z_i) = w_i$. Für z_i, $i = 1, \dots, n$, gilt

$$K_{\hat{q}}(z_j, z_i) = \frac{\hat{q}(z_i) - \hat{q}(z_j)^*}{z_i - \overline{z}_j} = \frac{w_i - \overline{w}_j}{z_i - \overline{z}_j}.$$

Der Kern $K_{\hat{q}}$ ist positiv definit genau dann, wenn die Pick Matrix positiv semidefinit ist und daher folgt die Behauptung mit Satz 2.7.1. ❑

2.8 Integraldarstellung einer Nevanlinna Funktion

Zur Wiederholung: Eine selbstadjungierte Relation A in $\mathcal{H}$ läßt sich nach Korollar 1.3.7 schreiben als $A = A_s \oplus A_\infty$, wobei A_s ein dicht definierter selbstadjungierter Operator auf $\operatorname{mul}(A)^\perp$ ist. Anders ausgedrückt gibt es eine Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_\infty$, sodass $A \cap \mathcal{H}_s^2 = A_s = A_s^*$ ein dicht definierter Operator ist und $A \cap \mathcal{H}_\infty^2 = A_\infty = \{0\} \times \mathcal{H}_\infty$.
Weiters existiert eine Spektralzerlegung $E(\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})}$ von A (siehe Bemerkung 1.3.8) mit der Eigenschaft, dass $E(\{\infty\}) = P_{\mathcal{H}_\infty}$ und $E(\Delta) = E_s(\Delta)P_{\mathcal{H}_s}$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, wobei E_s die Spektralzerlegung des selbstadjungierten Operators A_s bezeichnet.

2.8.1 Satz. *Sei Q die Q-Funktion von dem Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}})$ in dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und bezeichne $E(\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})}$ die Spektralzerlegung von A. Weiters betrachte man die Integraldarstellung von Q (Satz 2.4.2)*

$$Q(z) = C + zB + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right)(t^2+1)d\Sigma(t), \tag{2.26}$$

wobei die Gleichheit im schwachen Sinne zu verstehen ist und C, B selbstadjungierte beschränkte lineare Operatoren sind mit $B \geq 0$ und Σ ein operatorwertiges Maß ist. Dann gilt

$$B = \Gamma_i^* E(\{\infty\})\Gamma_i \quad \textit{sowie} \quad \Sigma(\Delta) = \Gamma_i^* E(\Delta)\Gamma_i.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$P(z) := z\Gamma_i^* E(\{\infty\})\Gamma_i + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right)(t^2+1)d\Gamma_i^* E(t)\Gamma_i$$

im schwachwen Sinn. Nach dem Satz über die Integraldarstellung (Satz 2.4.2) folgt unmittelbar, dass $P(z)$ wohldefiniert ist. Es genügt zu zeigen, dass $P(z)$ eine Q-Funktion von $(S, A, (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}})$ ist, denn nach Proposition 2.1.13 ist diese eindeutig bis auf eine selbstadjungierte Konstante. Wegen der Eindeutigkeit der Integraldarstellung folgt dann die Behauptung. Es gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{P(z)-P(w)^*}{z-\overline{w}}x, y\right) &= \big(\Gamma_i^* E(\{\infty\})\Gamma_i x, y\big) + \\ + \frac{1}{z-\overline{w}} \int_{\mathbb{R}} &\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\overline{w}}\right)(t^2+1)d(\Gamma_i^* E(t)\Gamma_i x, y) = \\ = (E(\{\infty\})\Gamma_i x, E(\{\infty\})\Gamma_i y) &+ \int_{\mathbb{R}} \frac{(t-i)(t+i)}{(t-z)(t-\overline{w})} d(E(t)\Gamma_i x, \Gamma_i y).\end{aligned}$$

Wegen $E(\Delta) = E_s(\Delta)P_{\mathcal{H}_s}$ und dem Funktionalkalkül ergibt sich für das Integral weiter

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \frac{(t-i)(t+i)}{(t-z)(t-\overline{w})} d(E(t)\Gamma_i x, \Gamma_i y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{z-i}{t-z}\right)\left(1 + \frac{\overline{w}+i}{t-\overline{w}}\right) d(E_s(t)P_{\mathcal{H}_s}\Gamma_i x, \Gamma_i y) = \\ &= \Big(\big[I_{\mathcal{H}_s} + (z-i)(A_s-z)^{-1}\big]\big[I_{\mathcal{H}_s} + (\overline{w}+i)(A_s-\overline{w})^{-1}\big]P_{\mathcal{H}_s}\Gamma_i x, \Gamma_i y\Big) = \\ &= \Big(\underbrace{[I_{\mathcal{H}_s} + (z-i)(A_s-z)^{-1}]P_{\mathcal{H}_s}\Gamma_i x}_{\in\mathcal{H}_s}, \underbrace{[I_{\mathcal{H}_s} + (w-i)(A_s-w)^{-1}]P_{\mathcal{H}_s}\Gamma_i y}_{\in\mathcal{H}_s}\Big).\end{aligned}$$

Da $E(\{\infty\}) = P_{\mathcal{H}_\infty}$ folgt wegen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_\infty$ weiter

$$\begin{aligned}\left(\frac{P(z)-P(w)^*}{z-\overline{w}}x, y\right) &= \Big([P_{\mathcal{H}_\infty} + P_{\mathcal{H}_s} + (z-i)(A_s-z)^{-1}P_{\mathcal{H}_s}]\Gamma_i x, \\ &, [P_{\mathcal{H}_\infty} + P_{\mathcal{H}_s} + (w-i)(A_s-w)^{-1}P_{\mathcal{H}_s}]\Gamma_i y\Big) = \\ = \Big(\big(I + (z-i)(A-z)^{-1}\big)\Gamma_i x, &\big(I + (w-i)(A-w)^{-1}\big)\Gamma_i y\Big) = (\Gamma_z x, \Gamma_w y).\end{aligned}$$

Somit ist $P(z)$ die Q-Funktion von $(S, A, (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}})$. ❑

2.8.2 Korollar. *Sei Q die Q-Funktion von dem Tripel $(S, A, (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}})$, wobei S minimal ist. Weiters seien B sowie Σ wie aus der zugehörigen Integraldarstellung (Satz 2.4.2) von Q. Dann gilt:*

(i) A ist ein Operator genau dann, wenn $B = 0$, d.h. B tritt in der Integraldarstellung der Q-Funktion nicht auf.

(ii) S ist dicht definiert genau dann, wenn $B = 0$ und $\int_\mathbb{R} t^2 d(\Sigma(t)x, x) = +\infty$ für alle $x \in \mathcal{G}$.

Beweis.

ad (i) : Sei A ein Operator. Dann ist $A_\infty = 0$ und daher $E(\{\infty\}) = 0$. Mit Satz 2.8.1 folgt somit $B = 0$.
Sei umgekehrt $B = 0$. Wegen Lemma 2.2.6 (iv) gilt $\operatorname{cls}\{\Gamma_\lambda(\mathcal{G}) : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\} = \mathcal{H}$ und daraus erhält man $E(\{\infty\}) \operatorname{cls}\{\Gamma_\lambda(\mathcal{G}) : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\} = \operatorname{mul}(A)$, bzw. $\operatorname{mul}(A) = \operatorname{cls}\{E(\{\infty\})\Gamma_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}$. Wegen $B = \Gamma_i^* E(\{\infty\})\Gamma_i = 0$ gilt für alle $x \in \mathcal{G}$

$$0 = (Bx, x) = (E(\{\infty\})\Gamma_i x, E(\{\infty\})\Gamma_i x) = \|E(\{\infty\})\Gamma_i x\|^2,$$

also folgt $E(\{\infty\})\Gamma_i x = 0$.
Andererseits gilt für alle $x \in \mathcal{G}$ wegen Lemma 1.2.5 (ii)

$$E(\{\infty\})\Gamma_\lambda x = E(\{\infty\})\Gamma_i x + E(\{\infty\}) \underbrace{(\lambda - i)(A - \lambda)^{-1}\Gamma_i x}_{\in\mathcal{D}(A)\perp\operatorname{mul}(A)} = E(\{\infty\})\Gamma_i x = 0,$$

und daraus ergibt sich unmittelbar $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$, d.h. A ist ein Operator.

ad (ii) : Nach Lemma 2.2.3 (i) ist S ein Operator. Da $\overline{\mathcal{D}(S)} \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ folgt mit Lemma 1.2.5 (ii), dass A ein Operator ist. Nach dem vorangegangenen Punkt gilt daher $B = 0$. Aus $\overline{\mathcal{D}(S)} = \mathcal{H}$ folgt $\Gamma_i x \notin \mathcal{D}(A)$ für alle $x \in \mathcal{G}$. Angenommen $\Gamma_i x \in \mathcal{D}(A)$ für ein $x \in \mathcal{G}$ mit $x \neq 0$. Wegen der Injektivität von Γ_i erhält man $\Gamma_i x \neq 0$ und somit gilt $(A - i)\Gamma_i x \neq 0$. Für $g \in \mathcal{D}(S)$ erhält man weiter

$$\big((A - i)\Gamma_i x, g\big) = \big(\Gamma_i x, (A - \bar{i})g\big) = \big(\Gamma_i x, \underbrace{(S - \bar{i})g}_{\in\mathcal{R}(S-\bar{i})}\big) = 0$$

Somit ergibt sich $0 \neq (A - i)\Gamma_i x \perp \mathcal{D}(S)$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass S dicht definiert ist.
Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren gilt

$$\Gamma_i x \in \mathcal{D}(A) \;\Leftrightarrow\; \int_\mathbb{R} t^2 d(E(t)\Gamma_i x, \Gamma_i x) < \infty.$$

Da $\Gamma_i x \notin \mathcal{D}(A)$ erhält man $\int_\mathbb{R} t^2 d(E(t)\Gamma_i x, \Gamma_i x) = \int_\mathbb{R} t^2 d(\Sigma(t)x, x) = +\infty$ für alle $x \in \mathcal{G}$ und somit folgt die Behauptung.
Ist umgekehrt $B = 0$. Nach (i) folgt, dass A ein Operator ist. Auf Grund der Voraussetzung $\int_\mathbb{R} t^2 d(\Sigma(t)x, x) = +\infty$ für alle $x \in \mathcal{G}$ folgt, dass $\Gamma_i x \notin \mathcal{D}(A)$ für

alle $x \in \mathcal{G}$. Angenommen $\mathcal{D}(S)$ ist nicht dicht, dann exisitert ein $g \in \mathcal{D}(S)^\perp$ mit $g \neq 0$. Für ein $y \in \mathcal{R}(S+i)$ mit $y = (S+i)u$, $u \in \mathcal{D}(S)$, ergibt sich

$$\big((A-i)^{-1}g, y\big) = (g, u) = 0.$$

Daher gilt $(A-i)^{-1}g \perp \mathcal{R}(S+i)$, also $(A-i)^{-1}g \in \mathcal{N}_i$ und somit folgt $\Gamma_i x \in \mathcal{D}(A)$, ein Widerpsruch. ❑

2.8.3 Korollar. *Sei $q : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Nevanlinna Funktion mit der Darstellung*

$$q(z) := a + \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big) d\sigma(t).$$

Auf $\mathcal{H} := L^2(\sigma)$ definiert man den Multiplikationsoperator durch $Af(t) := tf(t)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) := \{f \in L^2(\sigma) : \ Af \in L^2(\sigma)\}$. Weiters sei $S := A|_{\mathcal{D}(S)}$ mit $\mathcal{D}(S) := \{f \in \mathcal{D}(A) : \ \int_{\mathbb{R}} f(t)d\sigma(t) = 0\}$ und $\gamma(z) := \frac{1}{t-z} \in L^2(\sigma)$. Dann ist $q(z)$ die Q-Funktion von dem Tripel $(S, A, \gamma(z))$ und S ist minimal.

Beweis. Für $f \in \mathcal{D}(A)$ ergibt sich mit der Cauchy Schwarz'schen Ungleichung sowie der Eigenschaft des darstellenden Maßes einer Nevanlinna Funktion

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| d\sigma(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)(t-i)| \frac{1}{|t-i|} d\sigma(t) \leq$$
$$\leq \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)(t-i)|^2 d\sigma(t)}_{<\infty} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+1} d\sigma(t)}_{<\infty} < \infty.$$

Damit existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(t)d\sigma(t)$ für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ und somit ist $\mathcal{D}(S)$ wohldefiniert. Für $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt weiter

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)d\sigma(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(t)(t-\overline{z})\big)\overline{\frac{1}{t-z}} d\sigma(t) = \Big((A-\overline{z})f, \frac{1}{t-z}\Big) = \big((A-\overline{z})f, \gamma(z)\big).$$

Daher ist $f \in \mathcal{D}(S)$ genau dann, wenn $(A-\overline{z})f \perp \operatorname{span}\{\gamma(z)\}$. Weiters folgt, dass S Defektindex $(1,1)$ besitzt. Wegen

$$[I + (z-w)(A-z)^{-1}]\gamma(w) = \Big(1 + \frac{z-w}{t-z}\Big)\frac{1}{t-w} = \frac{1}{t-z} = \gamma(z)$$

ist $(\gamma(z))_{z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}$ die Defektfamilie von (S, A). Weiters gilt

$$\frac{q(z) - \overline{q(w)}}{z - \overline{w}} = \frac{1}{z-\overline{w}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\overline{w}}\Big) d\sigma(t) =$$
$$= \frac{1}{z-\overline{w}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{z-\overline{w}}{(t-z)(t-\overline{w})} d\sigma(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} \cdot \frac{1}{t-\overline{w}} d\sigma(t) = (\gamma(z), \gamma(w))$$

und daher ist $q(z)$ die Q-Funktion von $(S, A, (\gamma(z))$. Es bleibt noch zu zeigen, dass S minimal ist. Angenommen S ist nicht minimal, dann existiert ein $f \in \mathcal{H}$,

$f \neq 0$, sodass $f \perp \operatorname{cls}\{\gamma(z) : \; z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}$. Also gilt $f \perp \gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{t-z}d\sigma(t) = \big(f, \gamma(\overline{z})\big) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Wir benutzen die Stieltjesche Umkehrformel:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{c,d}} \tilde{q}(z)dz = \frac{\tilde{\sigma}(d)}{2} + \frac{\tilde{\sigma}(c)}{2} + \tilde{\sigma}\big((c,d)\big).$$

Somit folgt

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{c,d}} \big(f, \gamma(\overline{z})\big)dz = \frac{f(d)\sigma(d)}{2} + \frac{f(c)\sigma(c)}{2} + \int_{(c,d)} f(t)d\sigma(t).$$

Daher ist $fd\sigma = 0$ woraus unmittelbar $f = 0 \in L^2(\sigma)$ folgt. ❑

2.8.4 Bemerkung. Auch für den Fall, dass b in der Darstellung der Nevanlinna Funktion auftritt gibt es geeignete Modellräume. Sei

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\Big)d\sigma(t),$$

und $\mathcal{H} := L^2(\sigma) \oplus \mathbb{C}$, wobei $\mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt

$$\Big(\big(\begin{smallmatrix} f \\ \xi \end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix} g \\ \eta \end{smallmatrix}\big)\Big)_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}d\sigma + b\xi\overline{\eta}$$

versehen ist. Betrachtet man nun die Relationen

$$A = \Big\{\Big(\big(\begin{smallmatrix} f(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\big); \big(\begin{smallmatrix} tf(t) \\ c \end{smallmatrix}\big)\Big) : \; c \in \mathbb{C}, \; f \in L^2(\sigma), \; tf(t) \in L^2(\sigma)\Big\},$$

$$S = \Big\{\Big(\big(\begin{smallmatrix} f(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\big); \big(\begin{smallmatrix} tf(t) \\ c \end{smallmatrix}\big)\Big) \in A : \; cb + \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0\Big\},$$

dann ist $q(z)$ die Q-Funktion von $(S, A, \gamma(z))$

2.9 Selbstadjungierte Erweiterungen symmetrischer Relationen und verallgemeinerte Resolventen

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{H}$ stets ein Hilbertraum und S eine (abgeschlossene) symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$. Weiters sei $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supseteq S$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S in einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$.

2.9.1 Definition. Angenommen $\tilde{A}$ ist eine selbstadjungierte Erweiterung von S, dann nennt man

$$\tilde{R}(z) := \tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

eine *verallgemeinerte Resolvente* von S die von $\tilde{A}$ induziert wird (compressed resolvent), wobei $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ die orthogonale Projektion bezeichnet.

2.9.2 Lemma. *Sei $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ und $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ in $\tilde{\mathcal{H}}$, dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}'$ mit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}' \subseteq \tilde{\mathcal{H}}$, sodass $A' := \tilde{A} \cap (\mathcal{H}' \times \mathcal{H}')$ selbstadjungiert in $\mathcal{H}'$ ist und*

$$\mathcal{H}' = \operatorname{cls}\big(\mathcal{H} \cup \{(\tilde{A} - z)^{-1}x : \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \ x \in \mathcal{H}\}\big). \tag{2.27}$$

Weiters gilt $\tilde{R}(z) = P'(A' - z)^{-1}|_{\mathcal{H}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, wobei $P' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ die orthogonale Projektion bezeichnet.

2.9.3 Bemerkung. Sei S eine symmetrische Relation in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\tilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung in einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$. Erfüllt der Raum $\tilde{\mathcal{H}}$ Gleichung (2.27) so nennt man $\tilde{\mathcal{H}}$ *minimal*. Das vorige Lemma besagt also, dass man im Falle von Erweiterungen mit Austritt unnötig große Räume verkleinern kann.

Beweis. (von Lemma 2.9.2). Nach Konstruktion ist $\mathcal{H}'$ abgeschlossen und es gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}' \subseteq \tilde{\mathcal{H}}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{H}'$ bezüglich Resolventenbildung abgeschlossen ist, d.h. $(\tilde{A}-z)^{-1}\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit der Resolvente genügt es dies für die lineare Hülle zu zeigen. Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{H}$, dann folgt unmittelbar $(\tilde{A} - z)^{-1}f \in \mathcal{H}'$.
Sei $f \in \mathcal{H}'$ mit $f = (\tilde{A} - w)^{-1}x$ für ein $x \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Ist $z \neq w$, so erhält man wegen der Resolventengleichung

$$(\tilde{A} - z)^{-1}f = (\tilde{A} - z)^{-1}(\tilde{A} - w)^{-1}x = \frac{(\tilde{A} - z)^{-1}x - (\tilde{A} - w)^{-1}x}{z - w} \in \mathcal{H}'. \tag{2.28}$$

Für den Fall $z = w$ betrachtet man eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $z_n \neq z$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Dies ist stets möglich, da nach Lemma 1.4.6 (i) die Resolventenmenge offen ist. Wegen der Stetigkeit der Resolvente gilt

$$(\tilde{A} - z)^{-1}f = \lim_{n\to\infty} (\tilde{A} - z_n)^{-1}f.$$

Mit Gleichung (2.28) folgt $(\tilde{A} - z_n)^{-1}f \in \mathcal{H}'$ und da $\mathcal{H}'$ abgeschlossen ist erhält man $(\tilde{A} - z)^{-1}f \in \mathcal{H}'$. Wegen der Linearität der Resolvente ergibt sich daraus sofort $(\tilde{A} - z)^{-1}f \in \mathcal{H}'$ für alle $f \in \operatorname{span}\{(\tilde{A} - z)^{-1}x : z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, x \in \mathcal{H}\}$. Somit folgt $(\tilde{A} - z)^{-1}\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Wegen $A' = \tilde{A} \cap (\mathcal{H}' \times \mathcal{H}')$ erhält man $(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}'} = (A' - z)^{-1}|_{\mathcal{H}'}$ und daher ist $(A' - z)^{-1} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ein beschränkter linearer Operator. Somit gilt $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subseteq \rho(A')$ und da A' abgeschlossen ist folgt bereits $A' = A'^*$.
Klarerweise gilt $P' = \tilde{P}|_{\mathcal{H}'}$ und daraus ergibt sich

$$P'(A' - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = P'(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = \tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = \tilde{R}(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \quad \square$$

2.9.4 Satz. *Seien $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ Hilberträume, S eine abgeschlossene symmetrische Relation in $\mathcal{H}$ und $\tilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $\tilde{\mathcal{H}}$. Weiters sei $\tilde{R}(z) = \tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}}$, wobei $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ die orthogonale Projektion bezeichnet. Dann folgt*

(i) $\tilde{R}(z)^* = \tilde{R}(\overline{z})$ *für* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist die Abbildung $z \mapsto \tilde{R}(z)$ analytisch und der Kern

$$K(w, z) := \frac{\tilde{R}(z) - \tilde{R}(w)^*}{z - \overline{w}} - \tilde{R}(z)\tilde{R}(w)^* \in L(\mathcal{H}), \tag{2.29}$$

ist positiv auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Sei umgekehrt $\tilde{R} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to L(\mathcal{H})$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) und (ii), dann existiert bis auf unitäre Äquivalenz genau ein minimaler Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ und eine Relation $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ in $\tilde{\mathcal{H}}$, sodass $\tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = \tilde{R}(z)$ gilt.

Beweis. Offensichtlich gilt $\tilde{R}(z)^* = \tilde{R}(\overline{z})$, und weiters ist die Abbidung $z \mapsto \tilde{R}(z)$ analytisch für alle $z \in \tilde{\mathcal{H}}$. Es bleibt zu zeigen, dass der Kern $K(w, z)$ positiv ist. Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt unter Verwendung der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}\big(K(w,z)x,y\big) &= \left(\tilde{P}\left(\frac{(\tilde{A}-z)^{-1}-(\tilde{A}-\overline{w})^{-1}}{z-\overline{w}} - (\tilde{A}-z)^{-1}\tilde{P}(\tilde{A}-\overline{w})^{-1}\right)x, y\right) = \\ &= \Big(\tilde{P}\big((\tilde{A}-z)^{-1}(\tilde{A}-\overline{w})^{-1} - (\tilde{A}-z)^{-1}\tilde{P}(\tilde{A}-\overline{w})^{-1}\big)x, y\Big) = \\ &= \Big((\tilde{A}-z)^{-1}(I-\tilde{P})(\tilde{A}-\overline{w})^{-1}x, \tilde{P}y\Big) = \\ &= \Big((I-\tilde{P})(\tilde{A}-\overline{w})^{-1}x, (I-\tilde{P})(\tilde{A}-\overline{z})^{-1}y\Big). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Somit erhält man für $w_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_i \in \mathcal{H}$ und $\xi_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, für den Kern

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \big(K(w_i, w_j)x_i, x_j\big)\xi_i\overline{\xi}_j &= \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\xi_i(I-\tilde{P})(\tilde{A}-\overline{w}_i)^{-1}x_i, \xi_j(I-\tilde{P})(\tilde{A}-\overline{w}_j)^{-1}x_j\Big) = \\ &= \left\|(I-\tilde{P})\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\tilde{A}-\overline{w}_i)^{-1}x_i\right\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Nun zur Umkehrung des Satzes. Sei $\mathcal{P} := \mathcal{H}(K)$ der von dem Kern (2.29) erzeugte KRHR. Dann sind die Elemente von $\mathcal{P}$ Funktionen von $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ nach $\mathcal{H}$, und für $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sowie $x \in \mathcal{H}$ gilt $K(w, .)x \in \mathcal{P}$. Da $\|K(w, w)\|$ für $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ lokal gleichmäßig beschränkt ist, sind nach Proposition 2.5.4 die Elemente von $\mathcal{P}$ sogar anlytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Weiters definiert man den Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{P} \oplus \mathcal{H}$ und schreibt dessen Elemente in der Form

$$\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{H}, \quad \text{wobei} \quad f \in \mathcal{P},\ x \in \mathcal{H}.$$

Man betrachte auf $\tilde{\mathcal{H}}$ folgende lineare Realtion

$$A' := \left\{ \left(\begin{pmatrix} \sum_{w\in W} K(w,.)x_w \\ \sum_{w\in W} \tilde{R}(\overline{w})x_w \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \sum_{w\in W} \overline{w}K(w,.)x_w \\ \sum_{w\in W} \overline{w}\tilde{R}(\overline{w})x_w + \sum_{w\in W} x_w \end{pmatrix} \right) : \begin{array}{c} x_w \in \mathcal{H}\backslash\{0\} \\ W \in \mathcal{F}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \end{array} \right\},$$

dabei bezeichne $\mathcal{F}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Nun zeigt man, dass die Relation A' symmetrisch ist, d.h. $(g, h) = (f, k)$ für alle $(f; g), (h; k) \in A'$. Die Relation A' lässt sich auch schreiben als

$$A' = \operatorname{span}\left\{ \left(\begin{pmatrix} K(w,.)x_w \\ \tilde{R}(\overline{w})x_w \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \overline{w}K(w,.)x_w \\ \overline{w}\tilde{R}(\overline{w})x_w + x_w \end{pmatrix} \right) : \ x_w \in \mathcal{H},\ w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \right\}.$$

Wegen $K(w,.)x \in \mathcal{P}$ erhält man mit Hilfe von Proposition 2.5.2 (iv) für $w_{1,2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sowie $x_{w_{1,2}} \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} K(w_1,.)x_{w_1} \\ \tilde{R}(\overline{w}_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{w}_2 K(w_2,.)x_{w_2} \\ \overline{w}_2\tilde{R}(\overline{w}_2)x_{w_2} + x_{w_2} \end{pmatrix}\right)_{\tilde{\mathcal{H}}} = \\
&= \big(K(w_1,.)x_{w_1}, \overline{w}_2 K(w_2,.)x_{w_2}\big)_{\mathcal{P}} + \big(\tilde{R}(\overline{w}_1)x_{w_1}, \overline{w}_2\tilde{R}(\overline{w}_2)x_{w_2} + x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}} = \\
&= w_2\Big[\big(K(w_1,w_2)x_{w_1}, x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}} + \big(\tilde{R}(w_2)\tilde{R}(\overline{w}_1)x_{w_1}, x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}}\Big] + \big(\tilde{R}(\overline{w}_1)x_{w_1}, x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}} = \\
&= w_2\left(\frac{\tilde{R}(w_2) - \tilde{R}(\overline{w}_1)}{w_2 - \overline{w}_1}x_{w_1}, x_{w_2}\right)_{\mathcal{H}} + (w_2 - \overline{w}_1)\left(\frac{\tilde{R}(\overline{w}_1)}{w_2 - \overline{w}_1}x_{w_1}, x_{w_2}\right)_{\mathcal{H}} = \\
&= \frac{1}{w_2 - \overline{w}_1}\Big((w_2\tilde{R}(w_2) - \overline{w}_1\tilde{R}(\overline{w}_1))x_{w_1}, x_{w_2}\Big)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} \overline{w}_1 K(w_1,.)x_{w_1} \\ \overline{w}_1\tilde{R}(\overline{w}_1)x_{w_1} + x_{w_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K(w_2,.)x_{w_2} \\ \tilde{R}(\overline{w}_2)x_{w_2} \end{pmatrix}\right)_{\tilde{\mathcal{H}}} = \\
&= \big(\overline{w}_1 K(w_1,.)x_{w_1}, K(w_2,.)x_{w_2}\big)_{\mathcal{P}} + \big(\overline{w}_1\tilde{R}(\overline{w}_1)x_{w_1} + x_{w_1}, \tilde{R}(\overline{w}_2)x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}} = \\
&= \overline{w}_1\Big(\big(K(w_1,w_2) + \tilde{R}(w_2)\tilde{R}(\overline{w}_1)\big)x_{w_1}, x_{w_2}\Big)_{\mathcal{H}} + \big(\tilde{R}(w_2)x_{w_1}, x_{w_2}\big)_{\mathcal{H}} = \\
&= \overline{w}_1\left(\frac{\tilde{R}(w_2) - \tilde{R}(\overline{w}_1)}{w_2 - \overline{w}_1}x_{w_1}, x_{w_2}\right)_{\mathcal{H}} + (w_2 - \overline{w}_1)\left(\frac{\tilde{R}(w_2)}{w_2 - \overline{w}_1}x_{w_1}, x_{w_2}\right)_{\mathcal{H}} = \\
&= \frac{1}{w_2 - \overline{w}_1}\Big((w_2\tilde{R}(w_2) - \overline{w}_1\tilde{R}(\overline{w}_1))x_{w_1}, x_{w_2}\Big)_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

also ist A' symmetrisch. Weiters ist $\mathcal{D}(A'-z)^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ dicht in $\tilde{\mathcal{H}}$: Die Relation $(A'-z)^{-1}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
(A'-z)^{-1} &= \left\{\left(\begin{pmatrix} \sum(\overline{w}-z)K(w,.)x_w \\ \sum(\overline{w}-z)\tilde{R}(\overline{w})x_w + \sum x_w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sum K(w,.)x_w \\ \sum \tilde{R}(\overline{w})x_w \end{pmatrix}\right)\right\} = \\
&= \left\{\left(\begin{pmatrix} \sum\limits_{w\neq\overline{z}} K(w,.)u_w \\ \sum\limits_{w\neq\overline{z}} \tilde{R}(\overline{w})u_w + y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} K(\overline{z},.)y + \sum\limits_{w\neq\overline{z}} \frac{1}{\overline{w}-z}\big(K(w,.) - K(\overline{z},.)\big)u_w \\ \tilde{R}(z)y + \sum\limits_{w\neq\overline{z}} \frac{1}{\overline{w}-z}\big(\tilde{R}(\overline{w}) - \tilde{R}(z)\big)u_w \end{pmatrix}\right)\right\},
\end{aligned}$$

wobei diese Verbindung durch $u_w := (\overline{w}-z)x_w$ und $y = \sum x_w$ bijektiv hergestellt wird. Angenommen, es gibt Elemente $f \in \mathcal{P}$ und $x \in \mathcal{H}$, sodass $\binom{f}{g} \perp \mathcal{D}(A'-z)^{-1}$. Dann gilt

$$\left(\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{w\neq\overline{z}} K(w,.)u_w \\ \sum_{w\neq\overline{z}} \tilde{R}(\overline{w})u_w + y \end{pmatrix}\right)_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0 \quad \forall u_w, y \in \mathcal{H}.$$

Sei $w_0 \neq \overline{z}$ beliebig aber fest, dann folgt daraus insbesondere, dass

$$\left(\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K(w_0,.)u_{w_0} \\ \tilde{R}(\overline{w}_0)u_{w_0} + y \end{pmatrix}\right)_{\tilde{\mathcal{H}}} = \big(f(w_0), u_{w_0}\big)_{\mathcal{H}} + \big(x, \tilde{R}(\overline{w}_0)u_{w_0} + y\big)_{\mathcal{H}} = 0, \tag{2.31}$$

für alle $u_{w_0} \in \mathcal{H}$ und für alle $y \in \mathcal{H}$. Für $u_{w_0} = 0$ erhält man $(x, y)_{\mathcal{H}} = 0$, für alle $y \in \mathcal{H}$, also $x = 0$. Somit ergibt sich aus Gleichung (2.31) unmittelbar $(f(w_0), u_{w_0})_{\mathcal{H}} = 0$ für alle $u_{w_0} \in \mathcal{H}$, d.h. $f(w_0) = 0$. Da w_0 bis auf die Einschränkung $w_0 \neq \overline{z}$ beliebig war, und f holomorph ist folgt, $f = 0$, also $\big(\mathcal{D}(A' - z)^{-1}\big)^{\perp} = \{0\}$. Daher ist $\mathcal{R}(A' - z)$ dicht in $\tilde{\mathcal{H}}$. Definiert man $\tilde{A} := \overline{A'}$, dann gilt $\mathcal{R}(\tilde{A} - z) = \tilde{\mathcal{H}}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, und somit ist nach Lemma 2.1.1 die Relation $\tilde{A}$ selbstadjungiert in $\tilde{\mathcal{H}}$.
Sei $y \in \mathcal{H}$ beliebig, dann ist $\big(\binom{0}{y}; \binom{K(\overline{z},.)y}{\tilde{R}(z)y}\big) \in (\tilde{A} - z)^{-1}$ und somit

$$\tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} y = \tilde{P} \begin{pmatrix} K(\overline{z}, .)y \\ \tilde{R}(z)y \end{pmatrix} = \tilde{R}(z)y.$$

Also gilt $\tilde{R}(z) = \tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}|_{\mathcal{H}}$, d.h. $\tilde{R}(z)$ ist die von $\tilde{A}$ induzierte verallgemeinerte Resolvente.
Weiters ist der Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}$ minimal, denn für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $y \in \mathcal{H}$ gilt $(\tilde{A} - z)^{-1} y = \binom{K(\overline{z},.)y}{\tilde{R}(z)y}$. Nach Proposition 2.5.2 (iii) gilt $\operatorname{cls}\{K(\overline{z}, .)y,\ y \in \mathcal{H}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\} = \mathcal{P}$, also folgt

$$\tilde{\mathcal{H}} = \operatorname{cls}\big(\mathcal{H} \cup \{(\tilde{A} - z)^{-1} y :\ y \in \mathcal{H},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}\big). \tag{2.32}$$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit bis auf unitäre Äquivalenz zu zeigen. Angenommen es gibt zwei minimale Hilberträume $\tilde{\mathcal{H}}_{1,2} \supseteq \mathcal{H}$ und selbstadjungierte Relationen $\tilde{A}_{1,2}$ in $\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}$, sodass

$$\tilde{P}_2(\tilde{A}_2 - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = \tilde{R}(z) = \tilde{P}_1(\tilde{A}_1 - z)^{-1}|_{\mathcal{H}}. \tag{2.33}$$

Wir definieren für $D_{1,2} := \operatorname{span}\big(\mathcal{H} \cup \{(\tilde{A}_{1,2} - z)^{-1} y :\ y \in \mathcal{H}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}\big)$ den Operator $U : D_1 \to D_2$ durch $U(x) := x$ für $x \in \mathcal{H}$ und durch

$$U\big((I - \tilde{P}_1)(\tilde{A}_1 - z)^{-1} y\big) = (I - \tilde{P}_2)(\tilde{A}_2 - z)^{-1} y.$$

Für $f = x + (I - \tilde{P}_1) \sum (\tilde{A}_1 - z_i)^{-1} y_i$ und $g = u + (I - \tilde{P}_1) \sum (\tilde{A}_1 - z_i)^{-1} v_i$ erhält man mit Gleichung (2.30) und wegen (2.33)

$$\begin{aligned} (f, g)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = (x, u) + \sum_{i,j} \Big((I - \tilde{P}_1)(\tilde{A}_1 - z_i)^{-1} y_i, (I - \tilde{P}_1)(\tilde{A}_1 - z_j)^{-1} v_j\Big) = \\ = (x, u) + \sum_{i,j} \big(K(z_i, z_j) y_i, v_j\big) = \\ = (x, u) + \sum_{i,j} \Big((I - \tilde{P}_2)(\tilde{A}_2 - z_i)^{-1} y_i, (I - \tilde{P}_2)(\tilde{A}_2 - z_j)^{-1} v_j\Big) = (Uf, Ug)_{\tilde{\mathcal{H}}_2}. \end{aligned}$$

Damit ist U wohldefiniert und isometrisch auf der dichten Teilmenge D_1 von $\tilde{\mathcal{H}}_1$. Das Bild ist die dichte Teilmenge D_2 von $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Durch Fortsetzung erhält man einen unitären Operator $\tilde{U} : \tilde{\mathcal{H}}_1 \to \tilde{\mathcal{H}}_2$ mit $\tilde{U}|_{\mathcal{H}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Außerdem haben wir U so definiert, dass für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tilde{A}_1 - z)^{-1} x = \tilde{U}\big((I - \tilde{P}_1)(\tilde{A}_1 - z)^{-1} x + \tilde{P}_1(\tilde{A}_1 - z)^{-1} x\big) = \\ = (I - \tilde{P}_2)(\tilde{A}_2 - z)^{-1} x + \tilde{R}(z)x = (\tilde{A}_2 - z)^{-1} x = (\tilde{A}_2 - z)^{-1} \tilde{U} x. \end{aligned}$$

Ist nun $x = (\tilde{A}_1 - w)^{-1}y$ für $y \in \mathcal{H}$ und ein $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so folgt für $z \neq w$

$$\tilde{U}(\tilde{A}_1 - z)^{-1}x = \tilde{U}\Big[\frac{(\tilde{A}_1 - z)^{-1}y - (\tilde{A}_1 - w)^{-1}y}{z - w}\Big] =$$
$$= \frac{(\tilde{A}_2 - z)^{-1}\tilde{U}y - (\tilde{A}_2 - w)^{-1}\tilde{U}y}{z - w} = (\tilde{A}_2 - z)^{-1}(\tilde{A}_2 - w)^{-1}\tilde{U}y =$$
$$= (\tilde{A}_2 - z)^{-1}\tilde{U}\big((\tilde{A}_1 - w)^{-1}x\big) = (\tilde{A}_2 - z)^{-1}\tilde{U}x.$$

Für $z = w$ erhält man diese Gleichung durch Grenzwertbildung. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $z_n \neq z$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, dann gilt wegen der Stetigkeit von $\tilde{U}$ sowie der Resolvente

$$\tilde{U}(\tilde{A}_1 - z)^{-1}x = \lim_{n\to\infty} \tilde{U}(\tilde{A}_1 - z_n)^{-1}x = \lim_{n\to\infty} (\tilde{A}_2 - z_n)^{-1}\tilde{U}x = (\tilde{A}_2 - z)^{-1}\tilde{U}x.$$

Wegen der Minimalität folgt schließlich $\tilde{U}(\tilde{A}_1 - z)^{-1} = (\tilde{A}_2 - z)^{-1}\tilde{U}$ und damit gilt $(U \times U)(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_2$. ❑

2.9.5 Lemma. *Sei Q eine Nevanlinna Funktion mit Werten in $L(\mathbb{C}^n)$. Weiters sei $X_1 := \ker \operatorname{Im} Q(i)$ sowie $X_2 := X_1^\perp$, d.h. $\mathbb{C}^n = X_1 \oplus X_2$, dann gilt*

$$Q(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}(z) \end{pmatrix} + C \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$$

wobei Q_{22} eine strikte Nevanlinna Funktion mit Werten in $L(X_2)$ ist und $C = C^* \in L(\mathbb{C}^n)$.

Beweis. Nach Satz 2.4.2 besitzt $Q(z)$ folgende Integraldarstellung im schwachen Sinn

$$Q(z) = A + Bz + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1}\Big)(t^2 + 1)d\Sigma(t),$$

wobei A, B selbstadjungierte Operatoren sind, B positiv ist und Σ ein operatorwertiges Maß ist. Daraus folgt die Existenz von Konstanten $c, d > 0$, sodass für festes $z \in \mathbb{C}^+$ gilt (vgl. Korollar 2.4.4)

$$c \operatorname{Im} Q(z) \leq B + \Sigma(\mathbb{R}) \leq d \operatorname{Im} Q(z). \tag{2.34}$$

Für ein festes $z \in \mathbb{C}^+$ erhält man wegen (2.34) für den Kern von $\operatorname{Im} Q(z)$ weiter

$$\ker \operatorname{Im} Q(z) = \{x \in \mathbb{C}^n : (\operatorname{Im} Q(z)x, x) = 0\} = \ker(B+\Sigma(\mathbb{R})) = \ker B \cap \ker \Sigma(\mathbb{R}).$$

Also ist der Kern unabhängig von z, d.h. es gilt $X_1 = \ker \operatorname{Im} Q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$. Somit gilt $\ker B \supseteq X_1$ und daher $\mathcal{R}(B) \subseteq X_2$. Analog erhält man $\mathcal{R}(\Sigma(\Delta)) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(\mathbb{R})) \subseteq X_2$. Da B selbstadjungiert ist besitzt B folgende Blockoperatordarstellung $B = \left(\begin{smallmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{smallmatrix}\right)$ und wegen $\mathcal{R}(B) \subseteq X_2$ gilt $B_{11} = B_{12} = 0$. Das selbe Argument ist auch für $\Sigma(\Delta)$ anwendbar: also erhält man

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \Sigma(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}(\Delta) \end{pmatrix}.$$

Definiert man

$$Q_{22}(z) := zB_{22} + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1}\Big)(t^2 + 1)d\Sigma_{22}(t),$$

im schwachen Sinn, dann ist nach Satz 2.4.2 $Q_{22}(z)$ eine Nevanlinna Funktion. Setzt man $C := A$, so gilt

$$Q(z) = C + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $Q_{22}(z)$ eine strikte Nevanlinna Funktion ist. Nach Korollar 2.4.4 ist dies genau dann der Fall, wenn $B_{22} + \Sigma_{22}(\mathbb{R}) \gg 0$ gilt. Offensichtlich sind B_{22} und $\Sigma_{22}(\mathbb{R})$ positive Operatoren. Wegen

$$\underbrace{\ker(B_{22} + \Sigma_{22}(\mathbb{R}))}_{\subseteq X_2} \subseteq \ker(B + \Sigma(\mathbb{R})) = X_1$$

folgt $\ker(B_{22} + \Sigma_{22}(\mathbb{R})) = \{0\}$. Also ist $0 \in \rho(B_{22} + \Sigma_{22}(\mathbb{R}))$, da $\mathbb{C}^n$ endlich dimensional ist. Somit ist $B_{22} + \Sigma_{22}(\mathbb{R})$ strikt positiv. ❑

2.9.6 Lemma. *Ist $T = A + iB \in L(\mathcal{H})$ wobei $A, B \in L(\mathcal{H})$ selbstadjungierte Operatoren sind und $B \gg 0$, dann existiert der inverese Operator T^{-1}.*

Beweis. Da B strikt positiv ist existiert die ebenfalls strikt positive Wurzel $B^{1/2}$ und daher auch $B^{-1/2}$. Somit läßt sich T schreiben als

$$T = B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2} + i)B^{1/2}.$$

Da $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ selbstadjungiert ist, folgt $\sigma(B^{-1/2}AB^{-1/2}) \subseteq \mathbb{R}$, also $0 \notin \sigma(T)$, d.h. T ist invertierbar. ❑

2.9.7 Satz (Kreĭn'sche Formel)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, S eine (abgeschlossene) symmetrische Relation in $\mathcal{H}$ mit Defektindizes $(n, n), n \in \mathbb{N}$. Weiters sei A eine feste kanonische selbstadjungierte Erweiterung von S, $\Gamma_z : \mathbb{C}^n \to \mathcal{R}(S - \overline{z})^\perp$ die Defektfamilie von (S, A) und Q die Q-Funktion von $(S, A, (\Gamma_z)_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}})$. Ist $\tilde{R}(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, eine verallgemeinerte Resolvente von S, dann existiert genau eine orthogonale Projektion $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $\dim \mathcal{R}(P) = m \leq n$ und genau eine (operatorwertige) Nevanlinna Funktion $M(z) \in L(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}^{m\times m}$, sodass*

$$\tilde{R}(z) = (A - z)^{-1} - \Gamma_z P\big(PQ(z)P + \tilde{M}(z)\big)^{-1} P\Gamma_{\overline{z}}^*, \tag{2.35}$$

wobei $\tilde{M}(z) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M(z) \end{smallmatrix}\right)$ eine Abbildung von $\mathbb{C}^{n-m}\times\mathbb{C}^m$ in sich ist. Ist umgekehrt $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine Projektion mit $\dim \mathcal{R}(P) = m \leq n$ und $M(z) \in L(\mathbb{C}^m)$ eine Navanlinna Funktion, dann ist $\tilde{R}(z)$ definiert durch (2.35) *eine verallgemeinerte Resolvente von S, wobei $\tilde{M}(z) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M(z) \end{smallmatrix}\right)$ eine Abbildung von $\mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ in sich ist.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Schritt 1: Zunächst zeigt man, dass $\ker\big(\tilde{R}(z) - (A - z)^{-1}\big) \supseteq \mathcal{N}_{\overline{z}}^\perp$ und $\mathcal{R}\big(\tilde{R}(z) - (A - z)^{-1}\big) \subseteq \mathcal{N}_z$ gilt. Sei also $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ fest und $x \in \mathcal{R}(S - z) = \mathcal{N}_{\overline{z}}^\perp$, d.h. es gibt $(f; g) \in S$, sodass $x = g - zf$. Weiters sei $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supseteq S$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S in einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$. Dann gilt $(S - z)^{-1} \subseteq (\tilde{A} - z)^{-1}$ sowie $(S - z)^{-1} \subseteq (A - z)^{-1}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Big(\tilde{R}(z) - (A - z)^{-1}\Big)x &= \tilde{P}(\tilde{A} - z)^{-1}x - (A - z)^{-1}x = \\ &= \tilde{P}\underbrace{(S - z)^{-1}x}_{=f} - \underbrace{(S - z)^{-1}x}_{=f} = f - f = 0\end{aligned}$$

und es folgt $\ker\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big) \supseteq \mathcal{N}_{\overline{z}}^{\perp}$. Wegen Lemma 1.2.5 (ii) und Satz 2.9.4 (i) erhält man weiter

$$\mathcal{R}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)^{\perp} = \ker\big(\tilde{R}(\overline{z})-(A-\overline{z})^{-1}\big) \supseteq \mathcal{N}_z^{\perp}$$

und damit gilt $\mathcal{R}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big) \subseteq \mathcal{N}_z$.

Schritt 2: Bezeichnet man mit $P_z : \mathcal{H} \to \mathcal{N}_z$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{N}_z$ und $E_z : \mathcal{N}_z \to \mathcal{H}$ die kanonische Einbettungsabbildung. Also läßt sich jedes $x \in \mathcal{H}$ schreiben als $x = P_{\overline{z}}x + (I - P_{\overline{z}})x$, und wegen $(I-P_{\overline{z}})x \in \mathcal{R}(S-z)$ folgt nach dem vorigen Beweisschritt

$$\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)x = \big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)P_{\overline{z}}x.$$

Sei weiters $\Gamma_z^{\times} : \mathcal{N}_z \to \mathbb{C}^n$ die Einschränkung von $\Gamma_z^* \in L(\mathcal{H}, \mathbb{C}^n)$ auf $\mathcal{N}_z$, dann gilt $\Gamma_z^* = \Gamma_z^{\times} P_z$. Man erhält weiters

$$\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)P_{\overline{z}} = \big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)(\Gamma_{\overline{z}}^{\times})^{-1} \underbrace{\Gamma_{\overline{z}}^{\times} P_{\overline{z}}}_{=\Gamma_{\overline{z}}^*}.$$

Nach dem ersten Beweisschritt ist $\mathcal{R}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big) \subseteq \mathcal{N}_z$ und daher ist Γ_z^{-1} von links anwendbar. Es ergibt sich

$$\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)P_{\overline{z}} = \Gamma_z\Gamma_z^{-1}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)(\Gamma_{\overline{z}}^{\times})^{-1}\Gamma_{\overline{z}}^* = \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*,$$

wobei der Operator $\Psi(z)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\Psi(z) := \Gamma_z^{-1}P_z\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)E_{\overline{z}}(\Gamma_{\overline{z}}^{\times})^{-1} \in L(\mathbb{C}^n). \tag{2.36}$$

Man beachte, dass P_z und $E_{\overline{z}}$ hier eingefügt wurden, damit auch die Definitions- bzw. Zielmengen in dieser Gleichung zusammenpassen und daher die Adjungierte unmittelbar ausgedrückt werden kann! Insgesamt gilt somit die Gleichung $\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)x = \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*x$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also folgt

$$\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big) = \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*. \tag{2.37}$$

Schritt 3: In diesem Schritt zeigt man, dass für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ stets $\Psi(z)^* = \Psi(\overline{z})$ gilt und die Abbildung $z \mapsto \Psi(z)$ analytisch ist. Offensichtlich gilt

$$\Psi(z)^* = \Gamma_{\overline{z}}^{-1}P_{\overline{z}}\big(\tilde{R}(\overline{z})-(A-\overline{z})^{-1}\big)E_z\Gamma_z^{-\times} = \Psi(\overline{z}).$$

Nach Definition der Defektfamilie gilt $\Gamma_z = \big(I+(z-i)(A-z)^{-1}\big)\Gamma_i$ und mit Proposition 2.1.5 folgt für den inversen Operator

$$\Gamma_z^{-1}|_{\mathcal{N}_z} = \Gamma_i^{-1}P_i\big(I-(z-i)(A-i)^{-1}\big)|_{\mathcal{N}_z}.$$

Daraus folgt

$$\Gamma_z^{-1}P_z\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big) = \Gamma_i^{-1}P_i\big(I-(z-i)(A-i)^{-1}\big)\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big).$$

Daher ist die Abbildung $z \mapsto \Gamma_z^{-1}P_z\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)$ analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{C}^n$ dann gilt $\Psi(z)x = \Gamma_z^{-1}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)\Gamma_{\overline{z}}^{-\times}x$. Nun definiert man $y := \Gamma_{\overline{z}}^{-\times}x \in \mathcal{N}_{\overline{z}} \subseteq \mathcal{H}$. Für $\tilde{y} \in \mathcal{H}$ ergibt sich

$$\Gamma_z^{-1}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)y = \Gamma_z^{-1}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)\tilde{y},$$

genau dann wenn $P_{\overline{z}}(\tilde{y}-y)=0$. Dies ist äquivalent zu

$$P_{\overline{z}}y = P_{\overline{z}}\tilde{y} \;\Leftrightarrow\; \Gamma_{\overline{z}}^{-\times}x = P_{\overline{z}}\tilde{y} \;\Leftrightarrow\; x = \Gamma_{\overline{z}}^{\times}P_{\overline{z}}\tilde{y} = \Gamma_{\overline{z}}^{*}\tilde{y}.$$

Nach Korollar 2.1.8 (ii) gilt $\Gamma_{\overline{z}} = \big(I + (\overline{z}-i)(A-\overline{z})^{-1}\big)\Gamma_i$ und somit folgt $\Gamma_{\overline{z}}^*\tilde{y} = \Gamma_i^*\big(I+(z+i)(A-z)^{-1}\big)\tilde{y}$.
Definiert man $\tilde{y}_z := \big(I-(z+i)(A+i)^{-1}\big)\Gamma_i^{-\times}x$, dann ist die Abbildung $z \mapsto \tilde{y}_z$ analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und man erhält mit Proposition 2.1.5

$$\Gamma_{\overline{z}}^*\tilde{y}_z = \Gamma_i^*\big(I+(z+i)(A-z)^{-1}\big)\big(I-(z+i)(A+i)^{-1}\big)\Gamma_i^{-\times}x = \Gamma_i^*P_i\Gamma_i^{-\times}x = x.$$

Daher ist auch die Abbildung

$$z \mapsto \Psi(z)x = \Gamma_z^{-1}\big(\tilde{R}(z)-(A-z)^{-1}\big)\tilde{y}_z$$

für alle $x \in \mathbb{C}^n$ analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Somit ist $z \mapsto \Psi(z)$ analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Schritt 4: Aus Gleichung (2.37) folgt $\tilde{R}(z) = (A-z)^{-1} + \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*$. Durch einsetzen in Gleichung (2.29) erhält man für den Kern $K(w,z)$ mit Hilfe der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}
K(w,z) &= \frac{\tilde{R}(z)-\tilde{R}(w)^*}{z-\overline{w}} - \tilde{R}(z)\tilde{R}(w)^* = \frac{\Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^* - \Gamma_{\overline{w}}\Psi(\overline{w})\Gamma_w^*}{z-\overline{w}} - \\
&- (A-z)^{-1}\Gamma_{\overline{w}}\Psi(\overline{w})\Gamma_w^* - \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*(A-\overline{w})^{-1} - \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\Psi(\overline{w})\Gamma_w^* = \\
&= \frac{1}{z-\overline{w}}\Big[\Gamma_z\Psi(z)\underbrace{\Gamma_{\overline{z}}^*\big(I-(z-\overline{w})(A-\overline{w})^{-1}\big)}_{=\Gamma_w^*} - \\
&\quad - \underbrace{\big(I+(z-\overline{w})(A-z)^{-1}\big)\Gamma_{\overline{w}}}_{=\Gamma_z}\Psi(\overline{w})\Gamma_w^*\Big] - \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\Psi(\overline{w})\Gamma_w^* = \\
&= \Gamma_z\underbrace{\Big[\frac{\Psi(z)-\Psi(w)^*}{z-\overline{w}} - \Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\Psi(\overline{w})\Big]}_{=:K_\Psi(w,z)\in L(\mathbb{C}^n)}\Gamma_w^*.
\end{aligned}$$

Nach Korollar 2.1.8 ist Γ_z für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ injektiv und daher ist wegen Lemma 2.5.5 der Kern K_Ψ positiv.

Schritt 5: Nun zeigen wir: Ist $\Psi : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to L(\mathbb{C}^n)$ und gilt $\Psi(\overline{z}) = \Psi(z)^*$, für die analytische Abbildung $z \mapsto \Psi(z)$, und ist K_Ψ ein positiver Kern, so ist

$$\tilde{R}(z) := (A-z)^{-1} + \Gamma_z\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*,$$

eine verallgemeinerte Resolvente von S. Klarerweise ist $\tilde{R}(z)$ analytisch in z, und es gilt $\tilde{R}(\overline{z}) = \tilde{R}(z)^*$. Nach Lemma 2.5.5 ist der Kern

$$K(w,z) = \Gamma_z K_\Psi(w,z)\Gamma_w^* \geq 0$$

ebenfalls positiv auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Daher gibt es nach Satz 2.9.4 einen Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ und eine lineare Relation $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ in $\tilde{\mathcal{H}}$, sodass $\tilde{R}(z) = \tilde{P}(\tilde{A}-z)^{-1}|_{\mathcal{H}}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{A} \supseteq S$ gilt, d.h. dass $\tilde{R}(z)$ verallgemeinerte Resolvente von S ist.

Sei also $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ fest und $x \in \mathcal{R}(S-z)$. Wegen $\Gamma_{\overline{z}}^* = \Gamma_{\overline{z}}^{\times} P_{\overline{z}}$ folgt $\Gamma_{\overline{z}}^* x = 0$ und somit gilt

$$\tilde{P}(\tilde{A}-z)^{-1}x = \tilde{R}(z)x = (A-z)^{-1}x + \underbrace{\Gamma_z \Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^* x}_{=0} = (S-z)^{-1}x, \tag{2.38}$$

da A eine Erweiterung von S ist. Nach Lemma 1.5.14 (vi) gilt

$$V := \mathcal{C}_z(S) = I + (z-\overline{z})(S-z)^{-1}$$

und nach Korollar 1.5.21 (i) ist V isometrisch. Aus Gleichung (2.38) folgt

$$Vx = \big(I + (z-\overline{z})(S-z)^{-1}\big)x = \tilde{P}\underbrace{\big(I + (z-\overline{z})(\tilde{A}-z)^{-1}\big)}_{=:\tilde{U}=\mathcal{C}_z(\tilde{A})}x, \tag{2.39}$$

wobei wegen Korollar 1.5.21 (ii) $\tilde{U}$ unitär ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(x,x) = (Vx,Vx) = (\tilde{P}\tilde{U}x, \tilde{P}\tilde{U}x) + \big((I-\tilde{P})\tilde{U}x, (I-\tilde{P})\tilde{U}x\big) - \\ - \big((I-\tilde{P})\tilde{U}x, (I-\tilde{P})\tilde{U}x\big) = (\tilde{U}x, \tilde{U}x) - \big((I-\tilde{P})\tilde{U}x, (I-\tilde{P})\tilde{U}x\big) = \\ = (x,x) - \big((I-\tilde{P})\tilde{U}x, (I-\tilde{P})\tilde{U}x\big)\end{aligned}$$

und daher folgt $\big((I-\tilde{P})\tilde{U}x, (I-\tilde{P})\tilde{U}x\big) = 0$, d.h. $(I-\tilde{P})\tilde{U}x = 0$, also erhält man $\tilde{U}x = \tilde{P}\tilde{U}x = Vx$ für $x \in \mathcal{R}(S-z)$. Somit ist die Projektion $\tilde{P}$ in Gleichung (2.39) überflüssig und daher gilt $\tilde{A} \supseteq S$. Also ist $\tilde{R}(z)$ verallgemeinerte Resolvente von S.

Schritt 6: Die Funktion Ψ ist eine Nevanlinna Funktion in $\mathbb{C}^n$, denn es gilt

$$0 \leq K_\Psi(w,z) \leq \frac{\Psi(z) - \Psi(\overline{w})}{z - \overline{w}}.$$

Angenommen, Ψ ist eine strikte Nevanlinna Funktion, dann ist nach Lemma 2.9.6 — man beachte, dass für eine operatorwertige Nevanlinna Funktion sowohl $\operatorname{Re} Q(z)$ als auch $\operatorname{Im} Q(z)$ selbstadjungierte Operatoren sind — $\Psi(z)$ für $z \in \mathbb{C}^+$ invertierbar. Wegen $\Psi(\overline{z}) = \Psi(z)^*$ ist $\Psi(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ invertierbar. Nun gilt

$$\begin{aligned}K_\Psi(w,z) &= \Psi(z)\Big[\frac{\Psi(\overline{w})^{-1} - \Psi(z)^{-1}}{z-\overline{w}} - \Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\Big]\Psi(\overline{w}) = \\ &= \Psi(z)\Big[\frac{\Psi(\overline{w})^{-1} - \Psi(z)^{-1}}{z-\overline{w}} - \frac{Q(z) - Q(\overline{w})}{z-\overline{w}}\Big]\Psi(\overline{w}) = \\ &= \Psi(z)\frac{(-Q(z) - \Psi(z)^{-1}) - (-Q(\overline{w}) - \Psi(\overline{w})^{-1})}{z-\overline{w}}\Psi(\overline{w}).\end{aligned}$$

Definiert man $M(z) := -Q(z) - \Psi(z)^{-1}$, dann gilt $M(\overline{z}) = M(z)^*$ und die Abbildung $z \mapsto M(z)$ ist analytisch für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Man erhält

$$K_\Psi(w,z) = \Psi(z)\frac{M(z) - M(w)^*}{z-\overline{w}}\Psi(w)^*,$$

und da $\Psi(z)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ invertierbar ist, folgt nach Lemma 2.5.5, dass der Kern $\frac{M(z)-M(w)^*}{z-\overline{w}}$ ebenfalls positiv ist, d.h. M ist eine Nevanlinna Funktion. Weiters gilt $\Psi(z) = -(Q(z) + M(z))^{-1}$.

Sei Ψ keine strikte Nevanlinna Funktion. Nach Lemma 2.9.5 existiert eine strikte Nevanlinna Funktion $\tilde{\Psi}_{22}$ und ein selbstadjungierter Operator $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^n)$, sodass

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{22}(z) \end{pmatrix} + C, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Diese Blockdarstellung ist bezüglich der Zerlegung $\ker \operatorname{Im} \Psi(i) \oplus \ker \operatorname{Im} \Psi(i)^\perp$. Sei $z \in \mathbb{C}^+$. Da der Kern $K_\Psi(w, z)$ positiv ist, folgt

$$\frac{\Psi(z) - \Psi(z)^*}{z - \overline{z}} \geq \Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{z}}\Psi(z)^* \geq 0.$$

Also gilt für $x \in \ker \operatorname{Im} \Psi(z) = \ker \operatorname{Im} \Psi(i)$

$$\|\Gamma_{\overline{z}}\Psi(z)^*x\|^2 = (\Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{z}}\Psi(z)^*x, x) = 0,$$

d.h. $\Gamma_{\overline{z}}\Psi(z)^*x = 0$. Da $\Gamma_{\overline{z}}$ bijektiv ist, erhält man $\Psi(\overline{z})x = Cx = C_{11}x + C_{12}^*x = 0$. Somit ist C von der Gestalt $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}$. Definiert man $\Psi_{22}(z) := \tilde{\Psi}_{22}(z) + C_{22}$, so folgt

$$K_\Psi(w, z) = \Psi(z)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\Psi_{22}(z)^{-1} - (-\Psi_{22}(w)^{-1})^*}{z - \overline{w}} \end{pmatrix} - \Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\right]\Psi(w)^*.$$

Schreibt man den Ausdruck $\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}$ durch die Q-Funktion ebenfalls in Blockschreibweise, so erhält man

$$\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}} = \frac{Q(z) - Q(w)^*}{z - \overline{w}} = \begin{pmatrix} \frac{Q_{11}(z) - Q_{11}(w)^*}{z - \overline{w}} & * \\ * & \frac{Q_{22}(z) - Q_{22}(w)^*}{z - \overline{w}} \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Gestalt von $\Psi(z)$ gilt $\Psi(z) = \Psi(z)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, also folgt weiter

$$K_\Psi(w, z) = \Psi(z)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \frac{-\Psi_{22}(z)^{-1} - Q_{22}(z) - (-\Psi_{22}(w)^{-1} - Q_{22}(w))^*}{z - \overline{w}} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\Psi(w)^* = \Psi(z)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\Psi_{22}(z)^{-1} - Q_{22}(z) - (-\Psi_{22}(w)^{-1} - Q_{22}(w))^*}{z - \overline{w}} \end{pmatrix}\Psi(w)^*.$$

Definiert man $M(z) := -\Psi_{22}(z)^{-1} - Q_{22}(z) \in L(X_2)$, dann gilt

$$K_\Psi(w, z) = \Psi(z)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(z) - M(w)^*}{z - \overline{w}} \end{pmatrix}\Psi(w)^*.$$

Da $K_\Psi(w, z)$ ein positiver Kern ist folgt mit Lemma 2.5.5 auch $\frac{M(z) - M(w)^*}{z - \overline{w}} \geq 0$, d.h. $M(z)$ ist eine Nevanlinna Funktion. Weiters gilt $\Psi_{22}(z) = -(M(z) + Q_{22}(z))^{-1}$ und daraus ergibt sich

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(M(z) + Q_{22}(z))^{-1} \end{pmatrix} = -P\big(PQ(z)P + \tilde{M}(z)\big)^{-1}P,$$

wobei $\tilde{M}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M(z) \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^n)$ ist.

Schritt 7: Angenommen es sei eine Projektion $P : \mathbb{C}^n \to X_2 \leq \mathbb{C}^n$ und eine Nevanlinna Funktion $M(z) \in L(X_2)$ gegeben. Definiert man

$$\Psi(z) := -P\big(PQ(z)P + \tilde{M}(z)\big)^{-1}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\big(M(z) + Q_{22}(z)\big)^{-1} \end{pmatrix},$$

dann bleibt zu zeigen, dass der Kern $K_\Psi(w, z)$ positiv ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} K_\Psi(w, z) &= \frac{\Psi(z) - \Psi(w)^*}{z - \overline{w}} - \Psi(z)\Gamma_{\overline{z}}^*\Gamma_{\overline{w}}\Psi(w)^* = \\ &= \Psi(z)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(z)-M(w)^*}{z-\overline{w}} \end{pmatrix}\Psi(w)^* \geq 0, \end{aligned}$$

nach Lemma 2.5.5. Somit wäre der Satz vollständig bewiesen. ❑

2.10 Nevanlinna-Pick Problem

Gegeben seinen endlich viele paarweise verschiedene Punkte in der oberen Halbebene $M = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \mathbb{C}^+$ sowie (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^+$. Nach Korollar 2.7.3 gibt es genau dann eine Nevanlinna Funktion $\tilde{q}$ mit $\tilde{q}(z_j) = w_j$, $j = 1, \ldots, n$, wenn die Pick-Matrix

$$\mathbb{P} = \left(\frac{w_i - \overline{w}_j}{z_i - \overline{z}_j}\right)_{i,j=1}^n$$

positiv semidefinit ist.

In diesem Abschnitt wollen wir für den Fall, dass Lösungen existieren, diese mit Hilfe der Kreĭn'schen Formel charakterisieren. Grundlegend dafür ist folgendes Lemma:

2.10.1 Lemma. *Sei $\mathbb{P} \geq 0$ und $q : M \to \mathbb{C}^+$ definiert durch $q(z_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Betrachtet man nun den von dem positiven Kern*

$$K_q(w, z) := \frac{q(z) - \overline{q(w)}}{z - \overline{w}},\ z, w \in M,$$

erzeugten KRHR $\mathcal{H} := \mathcal{H}(K_q)$, dann gilt

(i) $\dim \mathcal{H} = \operatorname{rank} \mathbb{P} = n - \operatorname{def} \mathbb{P}$,

(ii) Die Relation (vgl. Lemma 2.6.1)

$$S := \Big\{\Big(\sum_{\zeta \in M} K_q(\zeta, .)x_\zeta; \sum_{\zeta \in M} \overline{\zeta} K_q(\zeta, .)x_\zeta\Big) :\ x_\zeta \in \mathbb{C}, \sum_{\zeta \in M} x_\zeta = 0\Big\}$$

ist symmetrisch. Sie hat Defektindex $(0, 0)$, wenn $\mathbb{P}$ singulär ist, und Defektindex $(1, 1)$, wenn $\mathbb{P}$ regulär ist.

Beweis.

ad (i) : Man betrachte den Raum $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem inneren Produkt $[x,y] := (\mathbb{P}x,y) \geq 0$ für $x,y \in \mathbb{C}^n$. Hier bezeichnet $(.,.)$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$. Definiert man weiters eine Abbildung ϕ durch

$$\phi : \begin{cases} \quad\mathbb{C}^n & \to \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} & \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i K_q(z_i,.), \end{cases}$$

dann ist ϕ linear und surjektiv. Weiters ist $\phi : \big(\mathbb{C}^n, [.,.]\big) \to \big(\mathcal{H}, (.,.)\big)$ isometrisch, denn es gilt

$$\begin{aligned} \big(\phi(e_i), \phi(e_j)\big)_{\mathcal{H}} &= \big(K(z_i,.), K(z_j,.)\big)_{\mathcal{H}} = K(z_i,z_j) = \\ &= \frac{w_i - \overline{w}_j}{z_i - \overline{z}_j} = (\mathbb{P}e_i, e_j) = [e_i, e_j]. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\tilde{\phi}$ die von ϕ auf $\mathbb{C}^n / \ker \mathbb{P}$ induzierte Abbildung, also

$$\tilde{\phi} : \big(\mathbb{C}^n / \ker \mathbb{P}, [.,.]\big) \to \big(\mathcal{H}, (.,.)_{\mathcal{H}}\big),$$

dann ist $\tilde{\phi}$ wohldefiniert, da für $k \in \ker \mathbb{P}$ und $f \in \mathcal{R}(\phi) = \mathcal{H}$, mit $f = \phi(x)$, gilt

$$\big(\phi(k), f\big)_{\mathcal{H}} = \big(\phi(k), \phi(x)\big)_{\mathcal{H}} = [k,x] = 0,$$

d.h. $\phi(\ker \mathbb{P}) = \{0\}$. Offensichtlich ist $\tilde{\phi}$ surjektiv und sogar eine Isometrie. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\phi}$ injektiv ist. Angenommen es gibt $x \in \mathbb{C}^n$, sodass $\tilde{\phi}(x + \ker \mathbb{P}) = 0$. Dann gilt auch $\phi(x) = 0$ und man erhält

$$(\mathbb{P}x, y) = [x,y] = \big(\phi(x), \phi(y)\big)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall y \in \mathbb{C}^n,$$

und somit folgt $x \in \ker \mathbb{P}$. Daher ist $\tilde{\phi}$ ein isometrischer Isomorphismus und es gilt

$$\operatorname{rank} \mathbb{P} = \dim \mathbb{C}^n / \ker \mathbb{P} = \dim \mathcal{H}.$$

ad (ii) : Dass die Relation S symmetrisch ist, folgt aus Lemma 2.6.1. Zunächst zeigt man, dass S gleiche Defektindizes hat. Die Cayley Transformierte $\mathcal{C}_\mu(S)$ ist isometrisch in $\mathcal{H}$, nach Korollar 1.5.21 (i). Insbesondere bildet sie $\mathcal{R}(S-\mu)$ auf $\mathcal{R}(S-\overline{\mu})$ ab und da $\mathcal{H}$ endlich dimensional ist folgt $\mathcal{R}(S-\mu)^\perp = \mathcal{R}(S-\overline{\mu})^\perp$. Also hat S Defektindex (m,m) mit $m \in \mathbb{N}$.
Ist $\mathbb{P}$ regulär, dann gilt nach dem ersten Teil des Lemmas $\dim \mathcal{H} = \operatorname{rank} \mathbb{P} = n$. Nach Proposition 2.5.2 (iii) ist $\{K_q(z,.) :\ z \in M\}$ eine Basis von $\mathcal{H}$. Somit gilt für $\overline{z} \notin M$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S-z) &= \Big\{ \sum_{i=1}^n K_q(z_i,.)(\overline{z}_i - z)x_i :\ x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Big\} = \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^n K_q(z_i,.)y_i :\ y_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\overline{z}_i - z} = 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Also hat $\mathcal{R}(S-z)$ Kodimension 1 und daher S Defektindex $(1,1)$.
Ist $\mathbb{P}$ singulär, dann ist $\{K_q(z,.) :\ z \in M\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{H}$, aber

keine Basis. Daher existieren $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, die nicht alle verschwinden, sodass $\mathcal{H} \ni \sum_{i=1}^n K_q(z_i, .)\alpha_i = 0$. Weiters kann jedes $f \in \mathcal{H}$ geschrieben werden als $f = \sum_{i=1}^n K_q(z_i, .)y_i$, wobei $y_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.
Im folgenden sei $\overline{z} \notin M$. Ist $\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\overline{z}_i - z} = 0$, so folgt $f \in \mathcal{R}(S - z)$. Sei nun $\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\overline{z}_i - z} \neq 0$. Für alle $\beta \in \mathbb{C}$ gilt $f = \sum_{i=1}^n K_q(z_i, .)(y_i - \beta\alpha_i)$. Daraus ergibt sich weiter

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta\alpha_i)}{\overline{z}_i - z} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\overline{z}_i - z} - \beta \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z}.$$

Falls $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z} \neq 0$, so wählt man $\beta = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\overline{z}_i - z}$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta\alpha_i)}{\overline{z}_i - z} = 0,$$

d.h. $f \in \mathcal{R}(S - z)$. Es bleibt noch der Fall $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z} = 0$ zu untersuchen. Wegen $\overline{z} \notin M$ erhält man

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z} = 0 \;\Leftrightarrow\; p(z) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\overline{z}_j - z) = 0.$$

Da mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, sodass $\alpha_i \neq 0$ ist $p(z) \not\equiv 0$ und der Grad von p ist kleiner oder gleich $n - 1$. Somit hat $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\overline{z}_i - z} = 0$ höchstens $(n - 1)$ verschiedene Lösungen. Daher folgt $\mathcal{R}(S - z) = \mathcal{H}$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, also hat S Defektindex $(0, 0)$. ❑

Der nächste Satz liefert einen Zusammenhang zwischen den Lösungen des Nevanlinna-Pick Problems und selbstadjungierten Erweiterungen von S.

2.10.2 Satz. *Sei q eine spezielle Lösung des Nevanlinna-Pick Problems, K_q, $\mathcal{H}(K_q)$, $S \subseteq S^*$ wie im vorigen Lemma und $\overline{\mu}_0 \in M$ fest. Dann gilt*

(i) Ist $\tilde{R}(z)$ verallgemeinerte Resolvente von S, so ist

$$\tilde{q}(z) := q(\overline{\mu}_o) + (z - \overline{\mu}_0)\Big(K_q(\overline{\mu}_0, .), (I + (\overline{z} - \overline{\mu}_0)\tilde{R}(\overline{z}))K_q(\overline{\mu}_0, .)\Big)_{\mathcal{H}(K_q)} \tag{2.40}$$

eine Lösung des Nevanlinna-Pick Problems.

(ii) Ist $\tilde{q}$ Lösung des Nevanlinna-Pick Problems, so existiert in eindeutiger Weise eine verallgemeinerte Resolvente von S, sodass Gleichung (2.40) *gilt.*

Beweis.

ad (i) : Für $\overline{\lambda} \in M$ definiert man $\gamma(\lambda) := K_q(\overline{\lambda}, .) \in \mathcal{H}(K_q)$. Für $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu} \in M$ gilt

$$\Big(K_q(\overline{\lambda}, .) - K_q(\overline{\mu}, .); \lambda K_q(\overline{\lambda}, .) - \mu K_q(\overline{\mu}, .)\Big) \in S.$$

Daraus ergibt auf Grund der Rechenregeln für lineare Relationen

$$\big(\gamma(\mu); \gamma(\lambda)\big) \in \big[I + (\lambda - \mu)(S - \lambda)^{-1}\big].$$

Sei $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ und $S \subseteq \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ selbstadjungiert in $\tilde{\mathcal{H}}$ ist. Jetzt definiert man für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und ein festes $\overline{\mu}_0 \in M$

$$\tilde{\gamma}(z) := \big(I + (z - \mu_0)(\tilde{A} - z)^{-1}\big)\gamma(\mu_0) \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

Weiters ist $\tilde{\gamma}$ eine Fortsetzung von γ, denn für $\overline{z} \in M$ gilt

$$\big(\gamma(\mu_0); \tilde{\gamma}(z)\big) \in \big(I+(z-\mu_0)(\tilde{A}-z)^{-1}\big) \supseteq \big(I+(z-\mu_0)(S-z)^{-1}\big) \ni \big(\gamma(\mu_0); \gamma(z)\big).$$

Andererseits gilt für $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in M$

$$\frac{q(\overline{\lambda}) - \overline{q(\overline{\mu})}}{\overline{\lambda} - \overline{\overline{\mu}}} = K_q(\overline{\mu}, \overline{\lambda}) = \big(K_q(\overline{\mu}, .), K_q(\overline{\lambda}, .)\big) = (\gamma(\mu), \gamma(\lambda))$$

und somit

$$q(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda} - \mu)(\gamma(\mu), \gamma(\lambda)) + \overline{q(\overline{\mu})}.$$

Daraus ergibt sich wegen $\overline{q(\overline{\mu})} = (\mu - \overline{\mu})(\gamma(\mu), \gamma(\mu)) + q(\overline{\mu})$ weiter

$$q(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda} - \mu)(\gamma(\mu), \gamma(\lambda)) + (\mu - \overline{\mu})(\gamma(\mu), \gamma(\mu)) + q(\overline{\mu}).$$

Unter Verwendung von Lemma 2.1.6 erhält man

$$\begin{aligned} q(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda} - \mu)(\gamma(\mu), T_{\mu,\lambda}\gamma(\mu)) + (\mu - \overline{\mu})(\gamma(\mu), \gamma(\mu)) + q(\overline{\mu}) = \\ = \Big(\big[(\overline{\lambda} - \mu)T_{\overline{\mu},\overline{\lambda}} + (\mu - \overline{\mu})I\big]\gamma(\mu), \gamma(\mu)\Big) + q(\overline{\mu}) = (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(\gamma(\overline{\lambda}), \gamma(\mu)) + q(\overline{\mu}). \end{aligned}$$

Für ein festes $\overline{\mu}_0 \in M$ gelangt man zu einer Fortsetzung von q auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\tilde{q}(z) := (z - \overline{\mu}_0)\big(\tilde{\gamma}(z), \gamma(\mu_0)\big)_{\tilde{\mathcal{H}}} + q(\overline{\mu}_0). \tag{2.41}$$

Nun zeigt man, dass $\tilde{q}$ eine Nevanlinna Funktion ist. Klarerweise ist $\tilde{q}$ analytisch. Wieder mit Lemma 2.1.6 ergibt sich für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\tilde{q}(\lambda) - \overline{\tilde{q}(\mu)} = \\ &= (\lambda - \overline{\mu}_0)\big(\tilde{\gamma}(\lambda), \gamma(\mu_0)\big) - (\overline{\mu} - \mu_0)\big(\gamma(\mu_0), \tilde{\gamma}(\mu)\big) - (\mu - \overline{\mu})(\gamma(\mu), \gamma(\mu)) = \\ &= \Big(\big[(\lambda - \overline{\mu}_0)T_{\mu_0,\lambda} - (\overline{\mu} - \mu_0)T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}} - (\mu - \overline{\mu})I\big]\gamma(\mu_0), \gamma(\mu_0)\Big) = \\ &= \big((\lambda - \overline{\mu})T_{\overline{\mu}_0,\overline{\mu}}T_{\mu_0,\lambda}\gamma(\mu_0), \gamma(\mu_0)\big) = \big((\lambda - \overline{\mu})\tilde{\gamma}(\lambda), \tilde{\gamma}(\mu)\big). \end{aligned}$$

Führt man den Grenzübergang $\lambda \to \overline{\mu}$, so folgt $\tilde{q}(\overline{\mu}) = \overline{\tilde{q}(\mu)}$, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Wegen

$$\frac{\tilde{q}(\lambda) - \overline{\tilde{q}(\lambda)}}{\lambda - \overline{\lambda}} = \big(\tilde{\gamma}(\lambda), \tilde{\gamma}(\lambda)\big) \geq 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

foglt auch $\operatorname{Im} \tilde{q}(\lambda) \geq 0$ falls $\lambda \in \mathbb{C}^+$, also ist $\tilde{q}$ eine Nevanlinna Funktion. Durch umformen von Gleichung (2.41) erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{q}(z) &:= (z - \overline{\mu}_0)\big(T_{\mu_0,z}\gamma(\mu_0), \gamma(\mu_0)\big)_{\tilde{\mathcal{H}}} + q(\overline{\mu}_0) = \\ &= (z - \overline{\mu}_0)\big(\gamma(\mu_0), (I + (\overline{z} - \overline{\mu}_0)(\tilde{A} - \overline{z})^{-1})\gamma(\mu_0)\big)_{\tilde{\mathcal{H}}} + q(\overline{\mu}_0) = \\ &= (z - \overline{\mu}_0)\big(K_q(\overline{\mu}_0, .), (I + (\overline{z} - \overline{\mu}_0)\tilde{R}(\overline{z}))K_q(\overline{\mu}_0, .)\big)_{\mathcal{H}(K_q)} + q(\overline{\mu}_0). \end{aligned}$$

ad (ii) : Sei $\tilde{q}$ eine Lösung des Nevanlinna-Pick Problems, dann gilt $\tilde{q}(z_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$ und der Kern

$$\tilde{K}(w,z) := \frac{\tilde{q}(z) - \overline{\tilde{q}(w)}}{z - \overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

ist positiv. Auf $M := \{z_1, \ldots, z_n\}$ stimmt dieser Kern mit K_q überein. Sei $\mathcal{H}(\tilde{K})$ der zu $\tilde{K}$ gehörige KRHR und betrachtet man die Abbildung

$$\iota : \begin{cases} \mathcal{H}(K_q) \to \mathcal{H}(\tilde{K}) \\ \sum_{i=1}^n K_q(z_i, .)x_i \mapsto \sum_{i=1}^n \tilde{K}(z_i, .)x_i. \end{cases}$$

Für $f, g \in \mathcal{H}(K_q)$ erhält man

$$(\iota f, \iota g)_{\mathcal{H}(\tilde{K})} = \sum_{i,j} \tilde{K}(z_i, z_j)x_i\overline{y}_j = \sum_{i,j} K_q(z_i, z_j)x_i\overline{y}_j = (f,g)_{\mathcal{H}(K_q)}, \quad x_i, y_i \in \mathcal{G}.$$

Daher ist $\mathcal{H}(K_q)$ isometrisch eingebettet in $\mathcal{H}(\tilde{K})$. Die Relation

$$A := \Big\{ \Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} K_q(\zeta, .)x_\zeta; \sum_{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} \overline{\zeta} K_q(\zeta, .)x_\zeta \Big) : \ x_\zeta \in \mathbb{C}, \sum_{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} x_\zeta = 0 \Big\} \subseteq \mathcal{H}(\tilde{K})^2,$$

ist im wesentlichen selbstadjungiert, d.h. $\tilde{A} := \overline{A}$ ist selbstadjungiert in $\mathcal{H}(\tilde{K})$. ❑

2.10.3 Bemerkung. Sei q eine Lösung des Nevanlinna-Pick Problems. Dann nennt man Lösungen $\tilde{q}$ definiert durch (2.40) eine *kanonische Lösung* des Nevanlinna-Pick Problems, falls die verallgemeinerte Resolvente durch eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von S induziert wird.

2.10.4 Satz. *Ist $\mathbb{P}$ regulär und sei $q_1(z)$ eine kanonische Lösung des Nevanlinna-Pick Problems. Dann ist für jede Nevanlinna Funktion $m(z)$ auch*

$$\tilde{q}(z) = q_1(z) - (z - \overline{\mu}_0)(z - \mu_0)\big(K_q(\overline{\mu}_0, .\gamma(\overline{z})\big)_{\mathcal{H}(K_q)} \frac{\big(\gamma(z), K_q(\overline{\mu}_0, .)\big)_{\mathcal{H}(K_q)}}{q_1(z) + m(z)}$$

eine Lösung des Nevanlinna-Pick Problems und man erhält dadurch alle Lösungen.

Literaturverzeichnis

[Con1] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[Con2] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Rud1] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[Rud2] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[Yos] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*. Second edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1968.

Index