Komplexe Analysis

für Technische Mathematik

SS 2023

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Holomorphie

1.1 Benötigte Resultate aus der Analysis über Riemann-Integrale

1.1.1 Satz. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so ist auch f Riemann-integrierbar, wobei*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x \,.$$

Entsprechendes gilt für gleichmäßig konvergente Netze von Funktionen.

1.1.2 Satz. *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $\langle Z, d\rangle$ und Y ein Banachraum. Für stetiges $f : [a,b] \times K \to Y$ ist dann auch die Funktion $F : K \to Y$ definiert durch*[1]

$$F(t) = \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}s\,,$$

stetig.

1.2 Differenzierbarkeit in mehreren Variablen

Wir wollen an die Analysis 2 erinnern, wo der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \to X$ definiert wurde. Dabei ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $(X, \|.\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1.2.1 Definition. Existiert für ein $x \in D$ der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + te_i) - f(x)\big)\,, \tag{1.1}$$

so heißt dieser die *partielle Ableitung* von f nach der Variablen x_i an der Stelle x. Hier ist e_i der i-te kanonische Basisvektor.

[1] Eine derartige Funktion heißt *Parameterintegral*.

Ist allgemeiner $v = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein sogenannter Richtungsvektor, und existiert für $x \in D$ der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x))$$

so heißt dieser die *Richtungsableitung* von f an der Stelle x in Richtung v. $\Diamond$

Offensichtlich gilt $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

1.2.2 Definition. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ definiert auf der offenen Menge D. Existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x),\ x \in D$, so heißt f *partiell differenzierbar* auf D.
Sind alle X-wertigen Funktionen $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = 1, \ldots, n$, darüber hinaus stetig auf D, so heißt f *stetig partiell differenzierbar*. Wir schreiben dafür $f \in C^1$ oder $f \in C^1(D)$. $\Diamond$

1.2.3 Lemma. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$, $v = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor und sei $x \in D$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $x + tv \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Falls $f \in C^1(D)$, so ist die Funktion $g : (-\delta, \delta) \to X$ definiert durch*

$$g(t) := f(x + tv),\quad t \in (-\delta, \delta)\ ,$$

stetig differenzierbar auf $(-\delta, \delta)$, dh. $g \in C^1(-\delta, \delta)$, wobei

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv)\ ,\ t \in (-\delta, \delta).$$

Beweis. Sei $t \in (-\delta, \delta)$, setze $y = x + tv$, und wähle $\rho > 0$ so klein, dass[2] $U_{\rho \cdot \|v\|_\infty}(y) \subseteq D$. Betrachte die Vektoren

$$v_0 := 0,\ v_i := \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_i e_i,\ \ i = 1, \ldots, n\ .$$

Offensichtlich gilt $v_n = v$ sowie $v_i = v_{i-1} + \mu_i e_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Da die ganze Kugel mit Radius $\rho \cdot \|v\|_\infty$ und Mittelpunkt y in D liegt, sind alle Punkte $y + sv_i$ in D für $|s| < \rho$, und damit auch alle Verbindungsstrecken zwischen ihnen (Kugeln sind konvex).
Da $\tau \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + sv_{i-1} + \tau e_i)$ genau die Ableitung von $\tau \mapsto f(y + sv_{i-1} + \tau e_i)$ ist, gilt für $|s| < \rho$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$g(t+s) - g(t) = f(y+sv) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} [f(y + sv_i) - f(y + sv_{i-1})] = \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{s\mu_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + sv_{i-1} + \tau e_i)\, d\tau\ ,$$

und daher

$$\frac{g(t+s) - g(t)}{s} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s} \int_0^{s\mu_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y + sv_{i-1} + \tau e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right) d\tau\ .$$

[2] Wir versehen hier praktischerweise $\mathbb{R}^n$ mit $\|.\|_\infty$.

Da die Norm eines Banachraumwertigen Integrals kleiner oder gleich dem Integral über die Norm der Funktion ist, ist die Norm obigen Ausdruckes kleiner oder gleich

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \sup_{\tau\in[-|s\mu_i|,|s\mu_i|]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + sv_{i-1} + \tau e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right\| .$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen in y konvergiert dieser Ausdruck gegen 0, wenn $s \to 0$.

❏

1.2.4 Korollar. *Für eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ mit $f \in C^1(D)$ existieren alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ für $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Für $v = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ gilt dabei*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) . \tag{1.4}$$

Insbesondere ist auch $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ eine stetige Funktion von D nach X.

Die Tatsache, dass für festes x die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ in (1.4) linear von v abhängt, legt folgende Begriffsbildung nahe.

1.2.5 Definition. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ stetig partiell differenzierbar, und $x \in D$. Dann bezeichne $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, X)$ die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) .$$

Sie heißt die *Ableitung* von f im Punkt x. ◊

Nach Korollar 1.2.4 ist $df(x)v$ gerade $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, also die Richtungsableitung von f in x in Richtung v. Insbesondere gilt $df(x)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

1.2.6 Fakta.

1. Wir wissen, dass Netze in $\mathbb{R}^m$ genau dann konvergieren, wenn sie komponentenweise konvergieren. Für $X = \mathbb{R}^m$ (versehen mit zB. $\|.\|_\infty$) ist somit die Tatsache, dass eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, (stetig) partiell differenzierbar ist, äquivalent dazu, dass jede ihrer Komponenten f_k (stetig) partiell differenzierbar ist.

2. Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar, und $x \in D$, und zerlegen wir $f(x)$ in seine Komponenten, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$, so hat $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$ als Matrix die Darstellung

$$df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} .$$

   Ist dabei $m = 1$, d.h. f ist $\mathbb{R}$-wertig, so nennt man den Vektor $df(x)^T$ auch den *Gradienten* und schreibt auch $\operatorname{grad} f(x)$ dafür.

3. Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ eine affine Abbildung, also von der Form $x \mapsto x_0 + Ax$ mit $x_0 \in X$ und einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to X$, so hat man

$$df(x)e_i = \lim_{t\to 0} \frac{x_0 + A(x + te_i) - (x_0 + A(x))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{A(te_i)}{t} = A(e_i)\ ,$$

und damit $df(x) = A$ für alle $x \in D$. Das ist eine Verallgemeinerung der Tatsache, dass im Eindimensionalen die Ableitung einer linearen Funktion $kx + d$ konstant gleich der Steigung k ist.

1.2.7 Proposition. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ mit $f \in C^1(D)$.*

$\leadsto$ *Versieht man $L(\mathbb{R}^n, X)$ mit der Abbildungsnorm ($\mathbb{R}^n$ versehen mit $\|.\|_\infty$ und X mit der darauf gegebenen Norm $\|.\|$)[3], so ist die Abbildung*

$$df : D \subseteq \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, X),\ \ x \mapsto df(x)$$

stetig.

$\leadsto$ *Für festes $x \in D$ gilt*

$$f(x + z) = f(x) + df(x)z + \|z\|_\infty \epsilon(z)\ , \tag{1.5}$$

wenn $x + z \in D \setminus \{x\}$, mit einer Funktion[4] $\epsilon : (D \setminus \{x\} - x) \to X$ so, dass $\lim_{z\to 0} \epsilon(z) = 0$.

Beweis.

$\leadsto$ Für $x, y \in D$ gilt

$$\| df(x) - df(y) \| = \sup_{\|v\|_\infty \le 1} \| df(x)v - df(y)v \| =$$

$$\sup_{|\mu_1|,\dots,|\mu_n|\le 1} \left\| \sum_{j=1}^n \mu_j (df(x)e_j - df(y)e_j) \right\| \le \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right\|\ .$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt $df(y) \to df(x)$ für $y \to x$.

$\leadsto$ Wir setzen ($x \in D$ und $z \ne 0$ mit $x + z \in D$)

$$\epsilon(z) := \frac{1}{\|z\|_\infty}\ (\ f(x + z) - f(x) - df(x)z\ )\ .$$

Gilt $U_\rho(x) = x + U_\rho(0) \subseteq D$ und $0 < \|z\| < \rho$, so ist $\epsilon(z)$ definiert, und wir haben wegen (1.3) mit $t = 0$, $s = \|z\|_\infty$, $v = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T := \frac{z}{\|z\|_\infty}$, wobei offensichtlich $\max_{j=1,\dots,n} |\mu_j| = \|v\|_\infty = 1$,

$$\| \epsilon(z) \| = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \int_0^{s\mu_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + sv_{i-1} + \tau e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) d\tau \right\| \le$$

[3] Versieht man $\mathbb{R}^n$ dagegen mit $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ oder einer anderen äquivalenten Norm, so ist die resultierende Abbildungsnorm auf $L(\mathbb{R}^n, X)$ zwar eine andere aber zur eingangs definierten Abbildungsnorm auf $L(\mathbb{R}^n, X)$ äquivalent.

[4] Man beachte, dass $D \setminus \{x\} - x$ eine Menge der Bauart $U_\delta(0) \setminus \{0\}$ enthält.

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \sup_{\tau \in [-|s\mu_i|, |s\mu_i|]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + sv_{i-1} + \tau e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{\|y\|_\infty \leq \|z\|_\infty} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| .$$

Dieser Ausdruck konvergiert wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen für $z \to 0$ gegen 0.

❑

Da, wie aus der Funktionalanalysis bekannt, auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, kann man in (1.5) $\|.\|_\infty$ durch irgendeine andere Norm auf $\mathbb{R}^n$ ersetzen.
Man kann auch umgekehrt starten.

1.2.8 Definition. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ und $x \in D$. Gibt es ein $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, X)$ so, dass (1.5) mit einer X-wertigen Funktion ϵ definiert auf $U_\rho(0) \setminus \{0\} \subseteq D - x$ für ein gewisses $\rho > 0$, wobei $\lim_{z \to 0} \epsilon(z) = 0$ erfüllt ist, so heißt f bei x *differenzierbar*.
f heißt *stetig differenzierbar*, wenn f bei allen $x \in D$ differenzierbar und die Abbildung $x \mapsto df(x)$ stetig auf D ist. ◊

Aus (1.5) folgt unmittelbar

1.2.9 Korollar. *Ist $f : D \to X$ bei $x \in D$ differenzierbar, so ist f dort auch stetig.*

1.2.10 Fakta.

1. Wir haben oben gesehen, dass jede stetig partiell differenzierbare Funktion stetig differenzierbar ist.

2. Ist f bei x differenzierbar, so existieren wegen $(0 \neq v \in \mathbb{R}^n,\ s \in \mathbb{R},\ sv \in U_\rho(0))$

$$\frac{f(x + sv) - f(x)}{s} = df(x)v + \operatorname{sgn}(s)\|v\|_\infty \epsilon(sv) \stackrel{s \to 0}{\longrightarrow} df(x)v ,$$

   auch alle Richtungsableitungen, insbesondere alle partiellen Ableitungen, wobei $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v$.

   Man sieht damit auch, dass $df(x)$ eindeutig durch f bestimmt ist, es also kein weiters $\tilde{d}f(x) \in L(\mathbb{R}^n, X)$ mit $\tilde{d}f(x) \neq df(x)$ geben kann, das auch (1.5) erfüllt.

3. Ist f stetig differenzierbar, so sind auch die partiellen Ableitungen stetig, da ja

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right\| = \| df(x)e_i - df(y)e_i \| \leq \| df(x) - df(y) \| \cdot \|e_i\|_\infty .$$

   Somit folgt aus stetig differenzierbar die Eigenschaft stetig partiell differenzierbar.

Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

1.2.11 Satz. *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist.*

1.3 Komplexe Differenzierbarkeit

1.3.1 Bemerkung. Vektorräume X,Y über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ lassen sich klarerweise auch als Vektorräume über $\mathbb{R}$ auffassen. Ist dabei $A : X \to Y$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so ist A sicherlich auch $\mathbb{R}$-linear. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen sicher nicht, wie etwa das Beispiel der Vektorräume $X = \mathbb{C} = Y$ und $A(\xi + \mathrm{i}\eta) = 3\xi + \mathrm{i}\eta$ zeigt.
Wir fragen also, wann eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : X \to Y$ auch $\mathbb{C}$-linear ist. Eine offensichtlich notwendige Bedingung ist

$$A(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}A(x), \quad \text{für alle} \;\; x \in X \, . \tag{1.6}$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, da wegen der $\mathbb{R}$-Linearität $A(x+y) = A(x)+A(y)$ für $x, y \in X$ und da $(\xi, \eta \in \mathbb{R}, \;\; x \in X)$

$$A\big((\xi + \mathrm{i}\eta)x\big) = A(\xi x) + A(\mathrm{i}\eta x) = A(\xi x) + \mathrm{i}A(\eta x) = \xi A(x) + \mathrm{i}\eta A(x) = (\xi + \mathrm{i}\eta)A(x) \, .$$

Für ein $\mathbb{R}$-lineares $A : X \to Y$ gilt (1.6) sicher schon, wenn $A(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}A(x)$ für alle x aus einer Basis von X (als Vektorraum über $\mathbb{R}$) gilt.
Da $1, \mathrm{i}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ (über $\mathbb{R}$) abgibt, trifft im Falle $X = \mathbb{C}$ Gleichung (1.6) genau dann zu, wenn

$$A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}A(1) \, . \tag{1.7}$$

In dem Fall ist wegen

$$A((\xi + \mathrm{i}\eta)) = A((\xi + \mathrm{i}\eta) \cdot 1) = (\xi + \mathrm{i}\eta) \cdot A(1) \tag{1.8}$$

die Abbildung A nichts anderes, als die skalare Multiplikation mit dem Vektor $A(1) \in Y$.
Im Spezialfall $X = Y = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ können wir jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right)$ anschreiben. Wegen $1 \cong (1, 0)^T, \;\; i \cong (0, 1)^T$ und weil für $\xi + i\eta \cong (\xi, \eta)^T$ aus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{i}(\xi + \mathrm{i}\eta) = -\eta + \mathrm{i}\xi \cong \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} ,$$

bedeutet Bedingung (1.7) dann gerade

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{21} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} .$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass A von der speziellen Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

ist. Wegen (1.8) stellt A gerade die Multiplikation mit der festen komplexen Zahl $A(1) = a + \mathrm{i}b$ dar. ◊

Nun sei $f : D \to Y$ eine Funktion, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2 \;\; \cong \mathbb{C}$ offen ist und wobei Y ein Banachraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ ist.
Ist f in einem Punkt $z = x + \mathrm{i}y \cong (x, y)^T \in D$ differenzierbar im Sinne von Definition 1.2.8, so ist $df(z)$ dabei eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \;\; \cong \mathbb{C}$ nach Y mit

$$df(z)v = \frac{\partial f}{\partial v}(z) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z) \in Y, \;\; \text{für alle} \;\; v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2 \; (\cong \mathbb{C}) \, .$$

Gemäß (1.7) ist somit $df(z)$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z)\,, \tag{1.10}$$

denn es gilt ja $1 \cong (1,0)^T$, $\mathrm{i} \cong (0,1)^T$, wenn man komplexe Zahlen als Elemente von $\mathbb{R}^2$ betrachtet. In dem Fall gilt dann wegen (1.8) für $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$df(z)v = (v_1 + \mathrm{i}v_2)\cdot df(z)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (v_1 + \mathrm{i}v_2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(z)\,. \tag{1.11}$$

1.3.2 Bemerkung. Ist $Y = \mathbb{C}$ und setzen wir $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$, so gilt

$$df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z)\end{pmatrix}\,,$$

und die Vektorgleichung (1.10) lässt sich als

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z),\ \frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z)$$

schreiben. Man spricht von den *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.* ◊

1.3.3 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $f : D \to Y$ eine Funktion. Für ein $z \in D$ sind folgende beiden Aussagen äquivalent*

- *f ist bei z im Sinne von Definition 1.2.8 differenzierbar so, dass $df(z)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist bzw. äquivalent dazu, dass* (1.10) *gilt.*
- *Der Grenzwert – man spricht von der* komplexen Ableitung –

$$\frac{df}{dz}(z) = f'(z) := \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert in Y.

Treffen diese Aussagen zu, so heißt f in z komplex differenzierbar *und es gilt*

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -\mathrm{i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(z)\,. \tag{1.12}$$

Treffen diese Aussagen bei allen $z \in D$ zu, so gilt $f \in C^1(D)$ genau dann, wenn $z \mapsto f'(z)$ als Abbildung von D nach Y stetig ist.

Beweis. Gemäß Definition 1.2.8 und wegen der Äquivalenz der Normen $\|.\|_2 = |.|$ und $\|.\|_\infty$ auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist f bei z genau dann differenzierbar, wenn

$$f(z+h) = f(z) + df(z)h + |h|\varepsilon(h),\ h \neq 0\,, \tag{1.13}$$

für irgendeine Funktion $\varepsilon : (D - z)\setminus\{0\} \to Y$ mit $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Der Ausdruck $df(z)h$ ist dabei die Anwendung von $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$, interpretiert als Element $\binom{h_1}{h_2}$ von $\mathbb{R}^2$, auf lineare Abbildung $df(z) \in L(\mathbb{R}^2, Y)$
Ist dabei (1.10) erfüllt, so folgt aus (1.11), dass $df(z)h = h\cdot g(z)$ mit $g(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -\mathrm{i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(z) \in Y$. Daraus erhält man

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z) + \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\cdot\varepsilon(h) = g(z)\,,$$

da $\|\frac{|h|}{h}\cdot\varepsilon(h)\| = \|\varepsilon(h)\| \to 0$ für $h \to 0$.
Falls umgekehrt der komplexe Grenzwert $g(z) := \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existiert, so folgt mit $\varepsilon(h) := \frac{h}{|h|}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right)$ für $h \neq 0$ unmittelbar

$$f(z+h) = f(z) + h\cdot g(z) + |h|\,\varepsilon(h),\ h \neq 0\ ,$$

mit $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Da die Ableitung $df(z)$ eindeutig ist, folgt hieraus $df(z)h = h\cdot g(z)$ und damit die $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z)$.
Die letzte Aussage folgt unmittelbar aus (1.12).

❑

1.3.4 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und Y ein Banachraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to Y$ heißt *holomorph* auf D, falls sie in allen Punkten $z \in D$ komplex differenzierbar ist und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ stetig ist. Ist dabei $D = \mathbb{C}$, also $f : \mathbb{C} \to Y$ holomorph, so nennt man f *ganz*.
$H(D, Y)$ bezeichnet die Menge aller holomorphen Abbildungen $f : D \to Y$. Falls $Y = \mathbb{C}$, so schreiben wir kurz $H(D)$ dafür. ◊

Wir werden später sehen, dass bei dieser Definition die Forderung an f, stetig differenzierbar zu sein, durch die schwächere Bedingung an f, nur differenzierbar zu sein, ersetzt werden kann.

1.3.5 Beispiel.

(i) Ist $y \in Y$ fest, und gilt $f(z) = y,\ z \in \mathbb{C}$, so ist f an allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = 0\ (\in Y)\ .$$

Da $z \mapsto 0$ als Abbildung von $\mathbb{C}$ nach Y stetig ist, ist f holomorph.

(ii) Für die Funktion $f : z \mapsto z$, dh. $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, gilt an jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)-z}{h} = 1\ .$$

Da die konstante 1-Funktion stetig ist, folgt die Holomorphie von f.

(iii) Für die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ als Abbildung von $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nach $\mathbb{C}$ gilt an jedem Punkt $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{z+h}-\frac{1}{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z-(z+h)}{hz(z+h)} = -\frac{1}{z^2}\ .$$

Da $z \mapsto -\frac{1}{z^2}$ als Abbildung von $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nach $\mathbb{C}$ stetig ist, folgt die Holomorphie von f.

◊

1.3.6 Proposition. *Seien $D, G \subseteq \mathbb{C}$ offen, Y ein komplexer Banachraum, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ und seien $f, f_1, f_2 : D \to Y$, $\phi : D \to \mathbb{C}$ sowie $g : G \to Y$ stetige Funktionen, so gelten folgende Aussagen:*

- *Sind f_1 und f_2 in $z \in D$ komplex differenzierbar, so ist es auch $\alpha f_1 + \beta f_2 : D \to Y$, wobei $(\alpha f_1 + \beta f_2)'(z) = \alpha f_1'(z) + \beta f_2'(z)$. Sind f_1 und f_2 holomorph auf D, so ist es auch $\alpha f_1 + \beta f_2$.*

- *Sind ϕ und f in $z \in D$ komplex differenzierbar, so ist es auch $\phi \cdot f : D \to Y$, wobei $(\phi \cdot f)'(z) = \phi'(z)f(z) + \phi(z)f'(z)$ (*Produktregel*). Sind f und ϕ holomorph auf D, so ist es auch $\phi \cdot f$.*

- *Gilt $z \in D$ sowie $\phi(z) \in G$ und ist ϕ im Punkt $z \in D$ und ist g im Punkt $\phi(z)$ komplex differenzierbar, so ist $g \circ \phi : \phi^{-1}(G) \to Y$[5] im Punkt z komplex differenzierbar, wobei $(g \circ \phi)'(z) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z))$ (*Kettenregel*). Sind ϕ und g holomorph, so ist es auch $g \circ \phi : \phi^{-1}(G) \to Y$.*

Beweis. Diese Ableitungsregeln zeigt man fast genauso, wie die fürs reelle Differenzieren. Beispielsweise gilt für $z \in D$ mit $\phi(z) \in G$ so, dass ϕ im Punkt z und g im Punkt $\phi(z)$ komplex differenzierbar ist, für $|h|$ hinreichend klein

$$\frac{g \circ \phi(z+h) - g \circ \phi(z)}{h} = \frac{\phi(z+h) - \phi(z)}{h} \cdot r(\phi(z+h)) \,,$$

wobei $r : G \to Y$ durch $r(w) = \frac{g(w) - g(\phi(z))}{w - \phi(z)}$ für $w \neq \phi(z)$ und $r(\phi(z)) := g'(\phi(z))$ definiert ist. Wegen der komplexen Differenzierbarkeit von g ist r bei $\phi(z)$ stetig, wodurch

$$\lim_{h\to 0} \frac{g \circ \phi(z+h) - g \circ \phi(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(z+h) - \phi(z)}{h} \cdot r(\lim_{h\to 0} \phi(z+h)) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z)) \,.$$

Sind ϕ und g holomorph, so gilt für alle $z \in \phi^{-1}(G)$, dass $(g \circ \phi)'(z) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z))$, wobei die rechte Seite als Produkt stetiger Funktionen stetig ist. Also ist auch $(g \circ \phi)'$ stetig.

❑

Man beachte, dass aus der Holomorphie von $z \mapsto \frac{1}{z}$ und aus der Kettenregel auch folgt, dass mit $\phi : D \to \mathbb{C}$ auch die Funktion $\frac{1}{\phi} : \{z \in D : \phi(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei

$$\left(\frac{1}{\phi}\right)'(z) = -\frac{\phi'(z)}{\phi(z)^2} \,.$$

Daraus und aus der Produktregel folgt auch, dass mit $f : D \to Y$, $\phi : D \to \mathbb{C}$ auch $\frac{f}{\phi} : \{z \in D : \phi(z) \neq 0\} \to Y$ holomorph ist, wobei (*Quotientenregel*)

$$\left(\frac{f}{\phi}\right)'(z) = \frac{\phi(z)f'(z) - \phi'(z)f(z)}{\phi(z)^2} \,.$$

1.3.7 Beispiel.

(*i*) Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgt aus $(z \mapsto z)' = 1$ zusammen mit der Produktregel, dass auch $z \mapsto z^n$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, wobei $(z \mapsto z^n)'(w) = nw^{n-1}$.

(*ii*) Durch wiederholte Anwendung von Proposition 1.3.6 folgt, dass alle Polynome $f(z) = a_0 + za_1 + \cdots + z^n a_n$ mit festen $a_0, \ldots, a_n \in Y$ auf $\mathbb{C}$ holomorph sind. Dabei gilt $f'(z) = a_1 + 2za_2 + \cdots + nz^{n-1}a_n$.

[5] Man beachte, dass $\phi^{-1}(G) = \{z \in D : \phi(z) \in G\}$ als Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion ϕ selber offen ist.

(*iii*) Mit obigen Regeln zeigt man allgemeiner auch, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{w\}$ mit ($N \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ und $a_{-N}, \ldots, a_N \in Y$ fest)

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{N} (z-w)^n a_n$$

holomorph ist, wobei

$$f'(z) = \sum_{n=-N}^{N} n(z-w)^{n-1} a_n \,.$$

(*iv*) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist auch holomorph, wobei $\exp'(z) = \exp(z)$. Um das einzusehen sei an die Analysis erinnert. Von dort wissen wir, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp(x+\mathrm{i}y) = \exp(\mathrm{i}y)\frac{\partial}{\partial x}\exp(x) = \exp(x+\mathrm{i}y) \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\exp(x+\mathrm{i}y) = \exp(x)\frac{\partial}{\partial y}\exp(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\exp(x+\mathrm{i}y)\,.$$

Da diese Funktionen auf $\mathbb{C}$ stetig sind, folgt $\exp \in C^1(\mathbb{C})$. Da offensichtlich auch (1.10) erfüllt ist, folgt aus Lemma 1.3.3 die Holomorphie von exp, wobei wegen (1.12) $\exp'(z) = \exp(z)$.

Ähnlich zeigt man auch, dass sin und cos auf $\mathbb{C}$ holomorph sind.

◊

1.4 Wege

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Weges und der damit zusammenhängenden Konzepte wiederholen. Die Beweise sind hier der Vollständigkeit halber angegeben.

1.4.1 Definition.

- Ein *Weg* γ im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung von einem Intervall $[a,b]$ nach $\mathbb{R}^n$. Ist γ stetig, so sprechen wir von einem *stetigen Weg*.

- Dabei heißen zwei Wege $\gamma : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$ und $\rho : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$ äquivalent, falls sie Umparametrisierungen voneinander sind, also falls es eine streng monoton wachsende Bijektion $\alpha : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ derart gibt, dass $\rho \circ \alpha = \gamma$.[6] Wir schreiben auch $\gamma \sim \rho$ dafür.

- Ist γ ein Weg, so sei $\gamma- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ der Weg $[a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(a+b-t)$, also der in der Gegenrichtung durchlaufene Weg.

- Sind $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$ zwei (stetige) Wege mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, so sei $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a_1,b_2] \to \mathbb{R}^n$ die (stetige) Funktion mit

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)|_{[a_1,b_1]} = \gamma_1, \quad (\gamma_1 \oplus \gamma_2)|_{[a_2,b_2]} = \gamma_2\,.$$

[6] Eine solche Bijektion α ist immer stetig. Umgekehrt ist eine stetige Bijektion $\alpha : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

- Sind $x_0, \dots, x_m$ Punkte aus $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1}x_m}$ den stetigen Weg $\gamma : [0, m] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = x_{j-1} + (t - (j-1))(x_j - x_{j-1})$, wenn $t \in [j-1, j],\ j = 1, \dots, m$. Solche Wege nennt man *Polygonzüge*.

- Im Fall $m = 1$ nennt man $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ die *gerade Strecke* von x_0 nach x_1 und schreibt auch $\overrightarrow{x_0x_1}$ dafür.

◊

1.4.2 Beispiel. Sind $x_0, \dots, x_m$ Punkte aus $\mathbb{R}^n$, und definiert man die Wege $\widetilde{x_{j-1}x_j} : [j-1, j] \to \mathbb{R}^n,\ j = 1, \dots, m$, durch $\widetilde{x_{j-1}x_j}(t) := x_{j-1} + (t-(j-1))(x_j - x_{j-1}),\ t \in [j-1, j]$, so sind offenbar $\widetilde{x_{j-1}x_j}$ und $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ äquivalent, und

$$\widetilde{x_0x_1} \oplus \dots \oplus \widetilde{x_{m-1}x_m} = \overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1}x_m} .$$

◊

Um einem Weg eine Länge $\ell(\gamma)$ zuzuordnen, liegt es nahe, das zuerst bei den einfachsten Arten von Wegen, nämlich den geraden Strecken $\gamma = \overrightarrow{xy}$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ zu tun:

$$\ell(\gamma) := \|x - y\|_2 .$$

Die Länge eines beliebigen Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ approximiert man dadurch, dass man eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[a, b]$[7] nimmt und die Länge des dazugehörigen Polygonzugs

$$\overrightarrow{\gamma(\xi_0)\gamma(\xi_1)}, \dots, \overrightarrow{\gamma(\xi_{n(\mathcal{Z})-1})\gamma(\xi_{n(\mathcal{Z})})} \tag{1.14}$$

nämlich

$$L(\mathcal{Z}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2$$

berechnet. Die Länge ist dann das Supremum von $L(\mathcal{Z})$ über die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$:

$$\ell(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} L(\mathcal{Z}) . \tag{1.15}$$

Der Fall $\ell(\gamma) = +\infty$ kann dabei auftreten. Ist jedoch $\ell(\gamma) < +\infty$, so spricht man von einem *rektifizierbaren Weg*.

1.4.3 Fakta.

1. Ist $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ eine gerade Strecke, so gilt für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$

$$L(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \|(\xi_j - \xi_{j-1})(x_1 - x_0)\|_2 = \|x_1 - x_0\|_2 .$$

   Also ist unser Zugang zur Weglänge in sich konsistent.

2. Da $\mathfrak{Z}$ bezüglich $\subseteq$ eine gerichtete Menge ist, und da wegen der Dreiecksungleichung, $\|\gamma(w) - \gamma(u)\|_2 \le \|\gamma(w) - \gamma(v)\|_2 + \|\gamma(v) - \gamma(u)\|_2$, aus $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$ folgt, dass $L(\mathcal{Z}_1) \le L(\mathcal{Z}_2)$, kann man $\ell(\gamma)$ als Limes eines monoton wachsenden Netzes über $(\mathfrak{Z}, \subseteq)$ schreiben.

[7] $\mathcal{Z}$ ist also eine endliche Teilmenge von $[a, b]$, die a und b enthält.

3. Ist γ nicht konstant, also $\exists\, t_1, t_2 : \ \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, so folgt $L(\{a, b, t_1, t_2\}) \geq \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_2 > 0$, und damit $\ell(\gamma) > 0$. Ist dagegen γ konstant, so folgt sofort aus der Definition $\ell(\gamma) = 0$. In jedem Fall gilt
$$\ell(\gamma) \geq L(\{a, b\}) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2$$

4. Da sich die Zerlegungen der Definitionsbereiche von äquivalenten Wegen bijektiv entsprechen, überzeugt man sich leicht, dass äquivalente Wege die selbe Länge haben. Genauso leicht sieht man $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$.

5. Aus der Monotonie (vgl. 2) folgt für ein endliches $A \subseteq [a, b]$ unmittelbar, dass auch
$$\ell(\gamma) = \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z},\ \mathcal{Z}\supseteq A} L(\mathcal{Z})\,.$$
Da $\mathfrak{Z}_A := \{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z} : \mathcal{Z} \supseteq A\}$ mit $\subseteq$ zu einer gerichteten Menge wird, und da $L(\mathcal{Z})$ monoton von $\mathcal{Z}$ abhängt, gilt auch
$$\ell(\gamma) = \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\mathcal{Z})\,.$$

6. Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ so, dass $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a_1, b_2] \to \mathbb{R}^n$ definiert ist. Weiters seien $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ bzw. $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ bzw. $[a_1, b_2]$.

   Für $A = \{a_2\}$ und $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ gilt offenbar $\mathcal{Z} \cap [a_1, b_1] \in \mathfrak{Z}_1$ und $\mathcal{Z} \cap [a_2, b_2] \in \mathfrak{Z}_2$, wobei
$$L(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \mathcal{Z}) = L(\gamma_1, \mathcal{Z} \cap [a_1, b_1]) + L(\gamma_2, \mathcal{Z} \cap [a_2, b_2])\,.$$
   Wegen $\mathfrak{Z}_j = \{\mathcal{Z} \cap [a_j, b_j] : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A\}$ gilt für $j = 1, 2$ auch
$$\ell(\gamma_j) = \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\gamma_j, \mathcal{Z} \cap [a_j, b_j]) = \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\gamma_j, \mathcal{Z} \cap [a_j, b_j])\,,$$
   womit (siehe 5)
$$\ell(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \mathcal{Z}) =$$
$$\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\gamma_1, \mathcal{Z} \cap [a_1, b_1]) + \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_A} L(\gamma_2, \mathcal{Z} \cap [a_2, b_2]) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$$
   in dem Sinn, dass die linke Seite genau dann endlich ist, wenn die rechte Seite endlich ist, dh. wenn $\ell(\gamma_1) < +\infty$ und $\ell(\gamma_2) < +\infty$.

7. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, und betrachte den in (1.14) erwähnten Polygonzug $p : [0, n(\mathcal{Z})] \to \mathbb{R}^n$,
$$p(t) = \gamma(\xi_{j-1}) + \frac{t - \xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}}(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})), \quad t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]\,. \tag{1.16}$$
   Da dieser Weg eine Zusammensetzung von geraden Strecken – genauer eine Zusammensetzung von zu geraden Strecken äquivalenten Wegen – ist, folgt aus dem letzten Punkt, dass $\ell(p) = L(\mathcal{Z})$.

1.4.4 Lemma. *Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg, so ist die Funktion $\ell(x) := \ell(\gamma|_{[a,x]}),\ x \in [a, b]$ monoton wachsend. Ist γ bei x rechts stetig (links stetig, stetig), so ist auch ℓ dort rechts stetig (links stetig, stetig)*[8].

[8] Rechts stetig bedeutet $\lim_{s\to x+} \ell(s) = \ell(x)$ und links stetig $\lim_{s\to x-} \ell(s) = \ell(x)$

Beweis. $x \mapsto \ell(\gamma|_{[a,x]})$ ist offensichtlich monoton wachsend; vgl. Fakta 1.4.3, 6. Sei γ in einem Punkt $x \in [a,b)$ rechts stetig. Somit gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(x) - \gamma(s)\|_2 < \epsilon$ für alle $s \in [x, x+\delta]$.
Wegen $\ell(\gamma|_{[x,b]}) \leq \ell(\gamma) < +\infty$ gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_0$ von $[x,b]$ mit

$$\ell(\gamma|_{[x,b]}) - \epsilon < L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) \leq \ell(\gamma|_{[x,b]}) .$$

Da die $L(\mathcal{Z})$ monoton von $\mathcal{Z}$ abhängen, können wir $\mathcal{Z}_0$ so wählen, dass die erste Stützstelle ξ rechts von x einen Abstand kleiner oder gleich δ hat.
Offenbar ist $\mathcal{Z}_0 \cap [\xi, b]$ eine Zerlegung von $[\xi, b]$, wobei $L(\gamma|_{[\xi,b]}, \mathcal{Z}_0 \cap [\xi, b]) = L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) - \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2$. Also gilt

$$L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) - \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2 \leq \ell(\gamma|_{[\xi,b]})$$

und daher

$$\begin{aligned} \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) \leq \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) + \Big(\ell(\gamma|_{[\xi,b]}) - (L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) - \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2)\Big) = \\ \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2 + \ell(\gamma|_{[x,b]}) - L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) < 2\epsilon . \end{aligned}$$

Also ist $\ell(\gamma|_{[x,\xi]}) < 2\epsilon$. Wegen der Monotonie gilt auch $\ell(\gamma|_{[a,s]}) - \ell(\gamma|_{[a,x]}) = \ell(\gamma|_{[x,s]}) \leq \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) < 2\epsilon$, wenn $s \in [x, \xi]$.
Die Linksstetigkeit zeigt man analog.

❑

Konkret ausrechnen lässt sich die Weglänge für stetig differenzierbare Wege.

1.4.5 Satz. *Falls $\gamma \in C^1[a,b]$, so ist γ rektifizierbar, und $\ell(x)$ ist differenzierbar mit der Ableitung $\|\gamma'(x)\|_2$. Dabei gilt*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 \, \mathrm{d}x .$$

Beweis. Wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2 = \left\| \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t .$$

Also $L(\mathcal{Z}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$, und damit $\ell(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$.
Für $a \leq x < y \leq b$ gilt

$$\|\gamma(y) - \gamma(x)\|_2 \leq \ell(\gamma|_{[x,y]}) \leq \int_x^y \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t .$$

Dividiert man diese Ungleichung durch $(y - x)$ und lässt $x \to y$ streben, so konvergiert die linke und die rechte Seite gegen $\|\gamma'(y)\|_2$; also auch der Ausdruck $\frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x}$ in der Mitte, und damit $\ell'(y)^- = \|\gamma'(y)\|_2$. Lässt man $y \to x$ streben, so sieht man genauso $\ell'(x)^+ = \|\gamma'(x)\|_2$, und insgesamt $\ell'(x) = \|\gamma'(x)\|_2$, $x \in [a,b]$, wobei wir an den Rändern die jeweiligen einseitigen Grenzwerte meinen.

❑

Die Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist offenbar stetig und stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j\}_{j=0}^{n(\mathcal{Z})}$ derart gibt, dass $\gamma|_{[\xi_{j-1},\xi_j]} \in C^1[\xi_{j-1}, \xi_j]$ für $j = 1, \dots, n(\mathcal{Z})$. Wendet man Satz 1.4.5 insgesamt $n(\mathcal{Z})$-mal auf $\gamma|_{[\xi_{j-1},\xi_j]}$, $j = 1, \dots, n(\mathcal{Z})$ an, so erhalten wir

1.4.6 Korollar. *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, so ist dieser rektifizierbar mit $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 \,\mathrm{d}x$.*

1.5 Wegintegrale

Ist X ein Banachraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und bezeichnet $L(\mathbb{R}^n, X)$ den Raum aller $\mathbb{R}$-linearen (und wegen der endlichen Dimension von $\mathbb{R}^n$ automatisch beschränkten) Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach X, so nennt man eine Abbildung $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ von einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $L(\mathbb{R}^n, X)$ ein *Vektorfeld*.
Ist nun $\gamma : [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine Riemannsche Zerlegung, so setzen wir

$$W(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\gamma(\alpha_j))\,(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1}))\,. \tag{1.17}$$

1.5.1 Definition. Konvergiert das Netz $(W(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ in X, so nennen wir seinen Grenzwert

$$\int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} W(\mathcal{R})$$

das *Wegintegral* von ϕ längs des Weges γ.
Ist $f : [a,b] \to L(\mathbb{R}^n, X)$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so setzen wir für $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$

$$P(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)\big(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\big)\,.$$

Das *Riemann-Stieltjes Integral* $\int_a^b f\,dg$ ist definiert als $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} P(\mathcal{R})$, falls dieser Limes in X existiert. $\Diamond$

Wegintegrale sind spezielle Riemann-Stieltjes Integrale, da $P(\mathcal{R}) = W(\mathcal{R})$ und in Folge $\int_a^b f\,dg = \int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x$, wenn $g = \gamma$ und $f = \phi \circ \gamma$.

1.5.2 Fakta.

1. Ist $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \beta : [a,b] \to D$ ein zu $\tilde{\gamma}$ äquivalenter Weg mit einer streng monoton wachsenden Bijektion $\beta : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Ist $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine Riemann-Zerlegung von $[a,b]$, so ist $\beta(\mathcal{R}) := \left((\beta(\xi_j))_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta(\alpha_j))_{j=1}^{n(\mathcal{R})}\right)$ eine solche von $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ und umgekehrt.

   Beim Grenzübergang $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ liegt die gerichtete Menge $(\mathfrak{R}, \preceq)$ zu Grunde, wobei $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow |\mathcal{R}_1| \geq |\mathcal{R}_2|$. Diese gerichtete Menge gestattet Teilfolgen, wobei $(W(\mathcal{R}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Teilfolge des Netzes $(W(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ ist, wenn $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$.

   Da β und β^{-1} beide stetig und daher gleichmäßig stetig sind, gilt $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} |\beta(\mathcal{R}_n)| = 0$. Außerdem gilt $W(\mathcal{R}) = W(\beta(\mathcal{R}))$. Mit Hilfe der Charakterisierung der Konvergenz eines Netzes vermöge Teilfolgen folgt

   $$\int_{\tilde{\gamma}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch das andere existiert und diese übereinstimmen.

Ist $\gamma-$ der in die Gegenrichtung durchlaufene Weg, so entsprechen sich die Riemann-Summen auch bijektiv, wobei die korrespondierenden Summen $W(\mathcal{R})$ nur im Vorzeichen unterscheiden, und somit $\int_{\gamma-} \phi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\gamma \phi(x)\, \mathrm{d}x$ gilt.

2. Ist unser Weg stetig und rektifizierbar ($\ell(\gamma) < +\infty$), und ist ϕ stetig, so existiert das Integral.

   Das folgt aus der allgemeineren Tatsache, dass $\int_a^b f\, dg$ existiert, falls f stetig auf $[a, b]$ und g rektifizierbar ist. Der Beweis für diese Tatsache ist ähnlich, wie der Beweis für die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums.

   Beweis. Sind $\mathcal{R}_1 = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_1)}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)})$ und $\mathcal{R} = ((\eta_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ zwei Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ derart, dass die Stützstellen von $\mathcal{R}$ die von $\mathcal{R}_1$ umfassen.

   Ist $j \in \{1, \dots, n(\mathcal{R}_1)\}$, so gibt es Indizes $k(j-1) < k(j)$ mit

$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} \underbrace{< \eta_{k(j-1)+1} < \cdots < \eta_{k(j)-1} <}_{k(j)-k(j-1)-1 \text{ viele}} \eta_{k(j)} = \xi_j \,.$$

   Aus $g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) = \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})$ folgt

$$\|P(\mathcal{R}) - P(\mathcal{R}_1)\| \le$$

$$\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \left\| f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) - \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} f(\beta_k)(g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})) \right\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} \|f(\alpha_j) - f(\beta_k)\| \cdot \|g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})\|_2 \,.$$

   Dabei ist $\|f(\alpha_j) - f(\beta_k)\|$ die Abbildungsnorm auf $L(\mathbb{R}^n, X)$, wenn $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm versehen ist.

   Wegen $|\alpha_j - \beta_k| \le (\xi_j - \xi_{j-1}) \le |\mathcal{R}_1|,\ k \in \{k(j-1)+1, \dots, k(j)\}$ folgt

$$\|P(\mathcal{R}) - P(\mathcal{R}_1)\| \le \sum_{k=1}^{n(\mathcal{R})} \rho(|\mathcal{R}_1|) \cdot \|g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})\|_2 \le \rho(|\mathcal{R}_1|) \cdot \ell(g) \,, \qquad (1.18)$$

   wobei $\rho(\delta) := \sup_{s,t\in[a,b],|s-t|\le\delta} \|f(s) - f(t)\|$.

   Sind nun $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ zwei beliebige Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ und wählt man $\mathcal{R}$ so, dass die Stützstellen von $\mathcal{R}$ sowohl die von $\mathcal{R}_1$ also auch die von $\mathcal{R}_2$ umfasst, so folgt aus (1.18) je einmal angewandt auf $\mathcal{R}_1$ und auf $\mathcal{R}_2$, der Dreiecksungleichung sowie der Monotonie von ρ

$$\|P(\mathcal{R}_1) - P(\mathcal{R}_2)\| \le \big(\rho(|\mathcal{R}_1|) + \rho(|\mathcal{R}_2|)\big) \cdot \ell(g) \,.$$

   Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt $\lim_{\delta\to 0} \rho(\delta) = 0$, woraus folgt, dass $(P(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ ein Cauchy-Netz und daher konvergent ist.

❑

3. Als Grenzwert von Netzen mit Werten im Banachraum X erfüllen Wegintegrale ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$):

$$\int_\gamma (\mu\phi(x) + \nu\psi(x))\,\mathrm{d}x = \mu \int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x + \nu \int_\gamma \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Entsprechend sind Riemann-Stieltjes Integrale linear nicht nur in f, sondern auch in g.

4. Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to D,\ \gamma_2 : [a_2, b_2] \to D$ zwei stetige und rektifizierbare Wege mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, und ist $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ stetig, dann gilt

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} \phi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.19}$$

Allgemeiner folgt für ein stetiges $f : [a, c] \to L(\mathbb{R}^n, X)$, ein rektifizierbares $g : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ und ein $b \in (a, c)$, dass

$$\int_a^c f\,dg = \int_a^b f\,dg + \int_b^c f\,dg\,.$$

Beweis. Die Voraussetzungen gewährleisten, dass alle Integrale existieren. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so klein, dass $\|P(\mathcal{R}_1) - \int_a^b f\,dg\| < \epsilon$, $\|P(\mathcal{R}_2) - \int_b^c f\,dg\| < \epsilon$ und $\|P(\mathcal{R}) - \int_a^c f\,dg\| < \epsilon$ für jede Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}_1$ von $[a, b]$, jede Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}_2$ von $[b, c]$ und jede Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$ von $[a, c]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|, |\mathcal{R}| < \delta$.

Sind $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ zwei beliebige Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ bzw. $[b, c]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2| < \delta$, so sei $\mathcal{R}$ jene Riemann-Zerlegungen von $[a, c]$, deren Stütz- und Zwischenstellen genau jene von $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ umfasst. Dann gilt $|\mathcal{R}| < \delta$ und $P(\mathcal{R}) = P(\mathcal{R}_1) + P(\mathcal{R}_2)$. Somit folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int_a^b f\,dg + \int_b^c f\,dg - \int_a^c f\,dg \right\| \le$$

$$\left\| P(\mathcal{R}_1) - \int_a^b f\,dg \right\| + \left\| P(\mathcal{R}_2) - \int_b^c f\,dg \right\| + \left\| P(\mathcal{R}) - \int_a^c f\,dg \right\| < 3\epsilon\,.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt die behauptete Gleichheit.

❑

5. Es gilt

$$\|P(\mathcal{R})\| \le \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \|f(\alpha_j)\| \cdot \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \le$$

$$\sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \le \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| \cdot \ell(g).$$

Daraus sieht man, dass für konstantes g das Riemann-Stieltjes Integral existiert und verschwindet. Entsprechend verschwindet das Wegintegral über einen konstanten Weg.

Existiert das Riemann-Stieltjes Integral, so ist seine Norm kleiner oder gleich $\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| \cdot \ell(g)$. Existiert das Wegintegral, so gilt entsprechend bzw.

$$\| \int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x\| \leq \sup_{t\in[a,b]} \|\phi\circ\gamma(t)\| \cdot \ell(\gamma)\,. \tag{1.20}$$

6. Ist $\gamma : [0,1] \to D$ eine gerade Strecke, also $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$, und ist ϕ stetig, so gilt $W(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1})\phi(\gamma(\alpha_j))(x_1 - x_0)$ und daher

$$\int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \phi(tx_1+(1-t)x_0)(x_1-x_0)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left(\int_0^1 \phi(tx_1 + (1-t)x_0)\,\mathrm{d}t\right)}_{\in L(\mathbb{R}^n,X)}(x_1-x_0)\,.$$

1.5.3 Bemerkung. Die Stetigkeit eines Vektorfeldes $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X) = L_b(\mathbb{R}^n, X)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \phi(x)e_j$, $j = 1,\dots,n$, wie man unmittelbar aus folgender Abschätzung erkennt:

$$\max_{j=1,\dots,n} \|\phi(x)e_j - \phi(y)e_j\|_X \leq \|\phi(x) - \phi(y)\| = \sup_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|_2=1} \|(\phi(x) - \phi(y))v\|_X$$
$$\leq \sum_{j=1}^n \|\phi(x)e_j - \phi(y)e_j\|_X\,.$$

◊

Um konkret Riemann-Stieltjes Integrale bzw. in Folge Wegintegrale auszurechnen dient am besten folgender Satz.

1.5.4 Satz. *Ist $g \in C^1[a,b]$ und f stetig, so folgt*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ist $\gamma \in C^1[a,b]$ und ϕ stetig, so gilt

$$\int_\gamma \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \phi(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dasselbe gilt für stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege g bzw. γ.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt ($\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$)

$$P(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_{\mathcal{R}}(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei $f_{\mathcal{R}}(t)$ die stückweise konstante Funktion mit $f_{\mathcal{R}}(t) = f(\alpha_j)$, $t \in [\xi_{j-1}, \xi_j)$, $j = 1,\dots,n(\mathcal{R})$, und $f_{\mathcal{R}}(b) = f(\alpha_{n(\mathcal{R})})$ ist. Für $t \in [\xi_{j-1}, \xi_j)$, $1 \leq j < n(\mathcal{R})$, bzw. für $t \in [\xi_{n(\mathcal{R})-1}, \xi_{n(\mathcal{R})}]$ gilt

$$\|f_{\mathcal{R}}(t)\,g'(t) - f(t)\,g'(t)\| \leq$$
$$\|f_{\mathcal{R}}(t) - f(t)\| \cdot \|g'(t)\|_2 = \|f(\alpha_j) - f(t)\| \cdot \|g'(t)\|_2 \leq \rho(|\mathcal{R}|) \cdot \max_{s\in[a,b]} \|g'(s)\|_2\,,$$

wobei $\rho(\delta) := \sup_{s,t\in[a,b],|s-t|\leq\delta} \|f(s)-f(t)\|$. Somit gilt $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} f_{\mathcal{R}}(t)\, g'(t) = f(t)\, g'(t)$ und zwar gleichmäßig in $t \in [a,b]$. Somit erhalten wir

$$\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} P(\mathcal{R}) = \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} \int_a^b f_{\mathcal{R}}(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} f_{\mathcal{R}}(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Für stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurven folgt die Behauptung aus dem gerade bewiesenen und Fakta 1.5.2, 4.

❑

1.5.5 Beispiel. Für ein stetiges $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ und zwei Punkten $x_0, x_1 \in D$ derart, dass die gerade Strecke $\overrightarrow{x_0x_1}$ ganz in D verläuft, also $\overrightarrow{x_0x_1}(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \in D$ für $t \in [0,1]$ gilt, erhalten wir $\overrightarrow{x_0x_1}'(t) = x_1 - x_0$, womit wegen Satz 1.5.4

$$\int_{\overrightarrow{x_0x_1}} \phi(v)\, \mathrm{d}v = \int_0^1 \phi\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big)\, (x_1 - x_0)\, \mathrm{d}t = \Big(\int_0^1 \phi\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big)\, \mathrm{d}t\Big)(x_1 - x_0)\,.$$

Für einen Polygonzug $\gamma = \overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1}x_m} : [0,m] \to \mathbb{R}^n$ ist $\gamma|_{[j-1,j]}$ für jedes $j = 1, \dots, m$ äquivalent zur Strecke $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$, weshalb wegen Fakta 1.5.2, 4 und 1,

$$\int_\gamma \phi(v)\, \mathrm{d}v = \sum_{j=1}^m \int_{\overrightarrow{x_{j-1}x_j}} \phi(v)\, \mathrm{d}v = \sum_{j=1}^m \int_0^1 \phi\big(x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})\big)\, (x_j - x_{j-1})\, \mathrm{d}t\,.$$

◊

1.6 Komplexe Wegintegrale

1.6.1 Definition. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$, Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $f : D \to Y$ eine Funktion und $\gamma : [a,b] \to D$ ein Weg, so ist das *komplexe Wegintegral* definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1}))\, f(\gamma(\alpha_j))\,, \tag{1.21}$$

falls dieser Limes existiert. ◊

Man beachte, dass die Summanden in (1.21) Produkte komplexer Zahlen mit Vektoren aus Y sind. Zum Vergleich sind die Summanden in (1.17) Elemente aus X, die man erhält, wenn man $(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})) \in \mathbb{R}^n$ auf die lineare Abbildung $\phi(\gamma(\alpha_j)) \in L(\mathbb{R}^n, X)$ anwendet.
Um dennoch komplexe Wegintegrale als Wegintegrale betrachten zu können, sei an Bemerkung 1.3.1 erinnert. Dort haben wir gesehen, dass wir für festes $y \in Y$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \zeta \mapsto \zeta y$ von $\mathbb{C}$ nach Y auch als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach Y interpretieren können, wobei $A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}A(1)$.
Definieren wir also $\phi_f : D \to L(\mathbb{C}, Y)$ durch $\phi_f(z) = (\zeta \mapsto \zeta f(z))$, so können wir (1.21) als

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi_f(\gamma(\alpha_j))\, (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})) = \int_\gamma \phi_f(x)\, \mathrm{d}x \tag{1.22}$$

anschreiben, wobei $(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1}))$ jetzt Element von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ zu interpretieren ist, der auf $\phi_f\big(\gamma(\alpha_j)\big) \in L(\mathbb{C}, Y)$ angewandt wird. Wegen (1.20) lässt sich die Norm eines komplexen Wegintegrals folgendermaßen abschätzen:

$$\left\| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right\| \le \max_{t\in[a,b]} \|f\circ\gamma(t)\| \cdot \ell(\gamma)\,. \tag{1.23}$$

Für stetiges f sowie stetiges und rektifizierbares γ existiert gemäß Fakta 1.5.2, 2, das Integral in (1.22). Ist γ sogar stetig und stückweise stetig differenzierbar, so folgt aus Satz 1.5.4

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \phi_f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \phi_f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \gamma'(t)\cdot f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.24}$$

Im Fall $Y = \mathbb{C}$ hat $\phi_f : D \to L(\mathbb{C},\mathbb{C})$ die Matrixdarstellung

$$\phi_f(z) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) & -\operatorname{Im} f(z) \\ \operatorname{Im} f(z) & \operatorname{Re} f(z) \end{pmatrix},$$

wenn wir $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ und $L(\mathbb{C},\mathbb{C})$ mit $\mathbb{R}^{2\times 2}$ daher identifizieren; vgl. (1.9). Im Fall $Y = \mathbb{C}$ kann man das Riemann-Integral in (1.24) auch als Lebesguesches Integral nach dem Lebesgueschen Maß betrachten, was bei Konvergenzaussagen von Vorteil sein kann.

1.7 Zusammenhängende Mengen und Gebiete

Ehe wir uns weiter mit Vektorfeldern beschäftigen, wollen wir uns die Struktur von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ anschauen. Dazu sei zunächst an den Begriff einer zusammenhängenden Teilmenge E eines topologischen Raumes (insbesondere metrischen Raumes) erinnert.

1.7.1 Definition. Eine Teilmenge E eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, wenn man E nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen schreiben kann. Dabei heißen A und B *getrennt*, wenn $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. ◊

1.7.2 Bemerkung. Für $A, B \subseteq X$ und $C := A \cup B$ gilt für den Abschluss von A in C bzgl. der Spurtopologie $\mathcal{T}|_C$ bekannterweise $\overline{A}^{\mathcal{T}|_C} = \overline{A} \cap C = A \cup (B \cap \overline{A})$. Entsprechendes gilt für B.
Insbesondere sind disjunkte Mengen A und B genau dann getrennt, wenn A und B beide in $A \cup B$ bzgl. der Spurtopologie abgeschlossen sind. Durch Komplementbildung in $A \cup B$ erkennt man dann auch, dass disjunkte Mengen A und B genau dann getrennt sind, wenn A und B beide in $A \cup B$ bzgl. der Spurtopologie offen sind. ◊

1.7.3 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Für ein zusammenhängendes $E \subseteq X$ ist auch $f(E)$ zusammenhängend.*

Beweis. Mit $f : X \to Y$ ist auch $f|_E : E \to f(E)$ stetig, wobei E und $f(E)$ jeweils mit der Spurtopologie versehen sind. Wäre $f(E)$ nicht zusammenhängend, also $f(E) = A \cup B$ mit in $f(E)$ abgeschlossenen und disjunkten $A, B \neq \emptyset$, dann erhielten wir im Widerspruch zur Voraussetzung

$$E = f|_E^{-1}(A) \cup f|_E^{-1}(B)$$

mit nichtleeren, in E abgeschlossenen und disjunkten $f|_E^{-1}(A)$, $f|_E^{-1}(B)$. ❑

1.7.4 Lemma. *Sei E eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$. Sind $A, B \subseteq X$ getrennt mit $E \subseteq A \cup B$, so gilt $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$.*

Beweis. Offensichtlich sind $A \cap E$ und $B \cap E$ als Teilmengen zweier getrennter Mengen getrennt. Wegen $E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$ und da E zusammenhängend ist, folgt $A \cap E = \emptyset$ oder $B \cap E = \emptyset$, also $E \subseteq B$ oder $E \subseteq A$. ❑

1.7.5 Korollar. *Sind E_i, $i \in I$, zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes derart, dass für ein gewisses $k \in I$ und allen $i \in I$ die Mengen E_k und E_i nicht getrennt[9] sind, so ist auch $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Gilt $E = A \cup B$ mit getrennten A und B, so erhalten wir $E_i \subseteq A$ oder $E_i \subseteq B$ für jedes $i \in I$ wegen Lemma 1.7.4. Für $i = k$ gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E_k \subseteq A$. Im Fall $E_i \subseteq B$ für nur ein $i \in I$ wären E_k und E_i im Widerspruch zur Voraussetzung getrennt. Somit muss E ganz in A enthalten sein, und daher $B = \emptyset$. ❑

1.7.6 Korollar. *Mit E ist auch jede Teilmenge C eines topologischen Raumes, welche die Inklusionskette $E \subseteq C \subseteq \overline{E}$ erfüllt, zusammenhängend.*

Beweis. Gilt $C = A \cup B$ mit getrennten A und B, so erhalten wir $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$ wegen Lemma 1.7.4. Im ersten Fall folgt $B = C \cap B \subseteq \overline{E} \cap B \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$. Im zweiten Fall schließt man entsprechend auf $A = \emptyset$. ❑

1.7.7 Korollar. *Für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ist die durch*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, E \subseteq X \ \text{ zusammenhängend mit } \ x, y \in E\,,$$

auf X definierte Relation eine Äquivalenzrelation. Für jedes $x \in X$ ist dabei die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die größte zusammenhängende Menge, welche x enthält. Zudem ist $[x]_\sim$ abgeschlossen. Man nennt $[x]_\sim$ die x enthaltende Zusammenhangskomponente *von X.*

Beweis. Die Relation ist reflexiv, da einpunktige Mengen immer zusammenhängend sind. Die Symmetrie von $\sim$ ist offensichtlich. Aus $x \sim y, y \sim z$ folgt $x, y \in E$ und $y, z \in F$ für zusammenhängende E und F. Gemäß Korollar 1.7.5 ist dann $E \cup F$ zusammenhängend, wobei $x, z \in E \cup F$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Schließlich ist für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \bigcup_{\substack{x \in E \\ E \text{ ist zusammenhängend}}} E\,,$$

wegen Korollar 1.7.5 zusammenhängend. Klarerweise ist diese Menge dann auch die größte zusammenhängende Menge, die x enthält, wodurch $[x]_\sim$ gemäß Korollar 1.7.6 auch abgeschlossen sein muss. ❑

1.7.8 Definition. Offene und zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißen *Gebiete*. ◊

1.7.9 Lemma. *Für ein offenes $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) *D ist zusammenhängend – also ein Gebiet.*

(*ii*) *Je zwei Punkte x, y aus D sind durch einen stetigen Weg in D verbindbar[10].*

---

[9]Diese Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn E_k mit allen E_i einen nichtleeren Schnitt hat.

[10]Das bedeutet, dass es einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \to D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.

(iii) *Je zwei Punkte aus D sind durch einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg in D verbindbar.*

(iv) *Je zwei Punkte aus D sind durch einen Polygonzug in D verbindbar.*

(v) *Je zwei Punkte aus D sind durch einen achsenparallelen*[11] *Polygonzug in D verbindbar.*

Beweis. Die Schlüsse (v) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) sind offensichtlich richtig. Gelte nun (ii) und sei x irgendein fester Punkt aus D. Zu jedem $y \in D$ gibt es einen stetigen Weg $\gamma_y : [a_y, b_y] \to D$ mit $\gamma_y(a_y) = x$ und $\gamma_y(b_y) = y$. Es folgt

$$D = \bigcup_{y \in D} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in D} \gamma_y([a_y, b_y]) \subseteq D \, .$$

Also ist D die Vereinigung der, wie aus der Analysis 1 bekannt, zusammenhängenden Mengen $\gamma_y([a_y, b_y])$, $y \in D$. Nach unserer Wahl von γ_y haben diese Mengen zumindest den Punkt x gemein. Nach Korollar 1.7.5 ist D zusammenhängend; also gilt (i).
Sei nun D zusammenhängend und $x \in D$ wieder fest. Wir bezeichnen mit A die Menge aller Punkte $y \in D$, die mit x durch einen achsenparallelen Polygonzug in D verbindbar sind. Da $\overrightarrow{xx}$ auch ein solcher ist, folgt $x \in A$, also $A \neq \emptyset$. Klarerweise ist $B := D \setminus A$ die Menge aller $y \in D$, die mit x nicht durch einen achsenparallelen Polygonzug in D verbindbar sind.
Sei $y \in A$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y)$ – definiert bezüglich der $\|.\|_\infty$-Norm auf $\mathbb{R}^n$ – ganz in D enthalten ist. Ist nun $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$ ein achsenparalleler Polygonzug von x nach y in D, daher $x_0 = x$ und $x_m = y$, und $z \in U_\delta(y)$, so gilt $z = y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ mit $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| < \delta$ und daher ist

$$\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}, \underbrace{\overrightarrow{y\,(y + \lambda_1 e_1)}, \dots, \overrightarrow{(y + \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_{n-1} e_{n-1})\,(y + \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n)}}_{\text{verläuft in } U_\delta(y)}$$

ein achsenparalleler Polygonzug von x nach z in D. Also ist $z \in A$ und daher $U_\delta(y) \subseteq A$. Somit ist A offen, und kein Punkt y aus A kann Häufungspunkt von B sein, da ja $U_\delta(y)$ keine Punkte aus B enthält. Also gilt $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
Sei nun $y \in B$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y) \subseteq D$. Ist $z = y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in U_\delta(y)$ und wäre $z \in A$ mit einem achsenparallelen Polygonzug $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$ von $x_0 = x$ nach $x_m = z$ in D, so wäre

$$\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}, \underbrace{\overrightarrow{z\,(y + \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_{n-1} e_{n-1})}, \dots, \overrightarrow{(y + \lambda_1 e_1)\,y}}_{\text{verläuft in } U_\delta(y)}$$

ein achsenparalleler Polygonzug von x nach y in D, und daher $y \in A$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $z \in B$ und somit $U_\delta(y) \subseteq B$. Also ist auch B offen, und kein Punkt y aus B kann Häufungspunkt von A sein, da ja $U_\delta(y)$ keine Punkte aus A enthält. Somit gilt auch $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Da D zusammenhängend ist, und da $A \neq \emptyset$, muss $B = \emptyset$ bzw. $D = A$, was aber genau bedeutet, dass alle Punkte aus D mit x durch einen achsenparallelen Polygonzug verbindbar sind. Klarerweise sind dann auch zwei beliebige Punkte aus D durch einen achsenparallelen Polygonzug – zumindest via x – verbindbar, und wir haben (v) nachgewiesen.

❑

[11] Das ist ein Polygonzug $\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_1 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$, wo $x_j - x_{j-1}$ ein skalares Vielfaches eines gewissen kanonischen Basisvektors $e_{i(j)}$ für $j = 1, \dots, m$ ist.

1.7.10 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so lassen sich je zwei Punkte x, y aus D durch die gerade Strecke $\overrightarrow{xy}$ verbinden. Gemäß Lemma 1.7.9 ist somit D ein Gebiet. Insbesondere sind alle offenen Kugeln bzgl. jeder möglichen Norm in $\mathbb{R}^n$ Gebiete. ◊

Um beliebigen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Struktur geben zu können, benötigen wir folgendes Lemma.

1.7.11 Proposition. *Für ein offenes $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die Äquivalenzklassen $[x]_\sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ aus Korollar 1.7.7 angewandt auf $X = D$ (versehen mit der Spurtopologie der Euklidischen Topologie) offen und daher Gebiete. In D sind diese bzgl. der Spurtopologie auch abgeschlossen.*
Insbesondere, lässt sich D als disjunkte Vereinigung von Gebieten schreiben.

Beweis. Für $y \in [x]_\sim \subseteq D$ sei $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(y) \subseteq D$. Wegen Korollar 1.7.5 zusammen mit Beispiel 1.7.10 ist $[x]_\sim \cup U_\epsilon(y)$ zusammenhängend. Da $[x]_\sim$ die größte zusammenhängende Teilmenge von D ist, welche x enthält, folgt $[x]_\sim \cup U_\epsilon(y) = [x]_\sim$, also $U_\epsilon(y) \subseteq [x]_\sim$.
Wir haben somit gezeigt, dass $[x]_\sim$ offen und daher ein Gebiet ist. Seine Abgeschlossenheit folgt aus Korollar 1.7.7. ❑

1.8 Gradientenfelder

Wir wollen eingangs ein mehrdimensionales Analogon der Tatsache, dass $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, für Wegintegrale herleiten. Dafür sei bemerkt, dass für ein stetig differenzierbares $f : D \to X$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Banachraum X die Ableitung $df : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Vektorfeld ist.

1.8.1 Satz. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, X ein Banachraum und $f : D \to X$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to D$ gilt*

$$\int_\gamma df(v)\,\mathrm{d}v = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis. Sind $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1[t_{j-1}, t_j]$, so folgt aus der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_\gamma df(v)\,\mathrm{d}v &= \int_a^b df(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^l \big(f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))\big) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).\end{aligned}$$ ❑

1.8.2 Definition. Vektorfelder $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$, die Ableitungen df stetig differenzierbarer Funktionen $f : D \to X$ sind, heißen *Gradientenfelder*. Jedes stetig differenzierbare $f : D \to X$ mit $df = \phi$ nennt man *Stammfunktion* von ϕ. ◊

1.8.3 Korollar. *Für ein Gebiet D und ein Gradientenfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ist die Stammfunktion $f \in C^1(D)$ von ϕ bis auf eine additive Konstante aus X eindeutig.*

Beweis. Gilt $df_1 = \phi = df_2$ für zwei $C^1(D)$-Funktionen f_1, f_2, so folgt für beliebige $x, y \in D$ aus Satz 1.8.1, angewandt auf $0 = df_1 - df_2 = d(f_1 - f_2)$ und irgendeinen geeigneten Weg $\gamma : [a, b] \to D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ (vgl. Lemma 1.7.9), dass $(f_1 - f_2)(x) = (f_1 - f_2)(y)$. Infolge ist $f_1 - f_2$ auf D konstant. ❑

1.8.4 Beispiel. Die Tatsache, dass ϕ ein Gradientenfeld ist, hängt entscheidend von seinem Definitionsbereich D ab. In der Tat gilt etwa für das Vektorfeld

$$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \phi((\xi, \eta)^T) = \Big(\frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}\,, \ \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \Big)$$

und den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$,

$$\int_\gamma \phi(v)\,\mathrm{d}v \neq 0\,.$$

Wegen $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ erkennen wir aus Satz 1.8.1, dass $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ kein Gradientenfeld sein kann.
Macht man den Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von ϕ aber kleiner, etwa $D = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi > 0\}$, so ist ϕ sehr wohl ein Gradientenfeld. ◊

Die in Satz 1.8.1 angegebene Eigenschaft, dass Wegintegrale über Gradientenfelder nicht vom konkreten Weg abhängen, ist für Gradientenfelder nicht nur notwendig sondern auch hinreichend; siehe Satz 1.8.6. Um das zu zeigen, wollen wir folgende spezielle Polygonzüge betrachten.
Zu $c, x \in \mathbb{R}^n$ und einer *Permutation* σ von $\{1, \ldots, n\}$, also einer Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sei $\gamma^\sigma_{c,x} : [0, n] \to \mathbb{R}^n$ der achsenparallele Polygonzug

$$\overrightarrow{y_0 y_1}, \overrightarrow{y_1 y_2}, \ldots, \overrightarrow{y_{n-1} y_n}\,,$$

von $c = y_0$ nach $x = y_n$, wobei

$$y_k := c + \sum_{j=1}^{k} (x_{\sigma(j)} - c_{\sigma(j)}) e_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{k} x_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)} + \sum_{j=k+1}^{n} c_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)}, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

$\gamma^\sigma_{c,x}$ ist der achsenparallele Polygonzug mit Startpunkt c und Endpunkt x, wobei von c nach x zuerst in Richtung der Koordinate $\sigma(1)$, dann in Richtung der Koordinate $\sigma(2)$ und so weiter bis Koordinate $\sigma(n)$ gegangen wird.
Ist $D = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nichtleerer offener Quader mit $-\infty \le a_j < b_j \le +\infty$, $c \in D$ fest, $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation und $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetiges Vektorfeld, so haben wir gemäß Beispiel 1.5.5

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^\sigma_{c,x}} \phi(v)\,\mathrm{d}v &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \phi\big(y_{k-1}(x) + t(x_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)}) e_{\sigma(k)}\big)\,(x_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)}) e_{\sigma(k)}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{\sigma(k)}}^{x_{\sigma(k)}} \phi\big(\sum_{j=1}^{k-1} x_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)} + s e_{\sigma(k)} + \sum_{j=k+1}^{n} c_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)}\big)\, e_{\sigma(k)}\,\mathrm{d}s \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

1.8.5 Lemma. *Seien $D = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $-\infty \le a_j < b_j \le +\infty$, $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ stetig und $c \in D$ fest. Falls für alle $x \in D$ das Wegintegral*

$$f(x) := \int_{\gamma^\sigma_{c,x}} \phi(v)\,\mathrm{d}v$$

unabhängig von der Permutation $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist, so ist $f : D \to X$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $df = \phi$.

Beweis. Für $m \in \{1, \dots, n\}$ und irgendeiner Permutation σ mit $\sigma(n) = m$ hängt wegen $\sigma(j) \neq m$ für $j < n$ nur der Summand mit $k = n$ rechts in (1.25) ab von der Variablen x_m. Ableiten nach dieser Variablen ergibt nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = \phi\Big(\sum_{j=1}^{n-1} x_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)} + x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}\Big)\, e_{\sigma(n)} = \phi(x) e_m \,.$$

Da dieser Ausdruck für jedes m stetig in x ist, gilt $f \in C^1(D)$, wobei $df = \phi$. ❑

1.8.6 Satz. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Vektorfeld. ϕ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn ϕ stetig und derart ist, dass Wegintegrale von ϕ über achsenparallele Polygonzüge nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen.*

Beweis. Für ein Gradientenfeld folgt besagte Eigenschaft unmittelbar aus Satz 1.8.1.
Sei umgekehrt $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetiges Vektorfeld derart, dass Wegintegrale von ϕ über achsenparallele Polygonzüge nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Gemäß Proposition 1.7.11 können wir D als disjunkte Vereinigung von gewissen Gebieten θ schreiben. Wir greifen aus jedem solchen Gebiet θ ein festes $x_\theta \in \theta$ heraus und definieren für $x \in \theta$

$$f(x) = \int_{\rho_x^\theta} \phi(v)\, \mathrm{d}v \,,$$

wobei $\rho_x^\theta : [a, b] \to \theta$ irgendein achsenparalleler Polygonzug mit $\rho_x^\theta(b) = x$ und $\rho_x^\theta(a) = x_\theta$ ist; vgl. Lemma 1.7.9. Wegen der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit und weil jedes $x \in D$ in irgendeinem solchen Gebiet liegt, ist auf diese Art und Weise eine Funktion $f : D \to X$ wohldefiniert.
Ist $c \in D$, θ das Gebiet mit $c \in \theta$ und $\delta > 0$ mit $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c) \subseteq \theta$, so folgt für $x \in U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)$ und jede Permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ aus der Wegunabhängigkeit

$$f(x) = \int_{\rho_c^\theta} \phi(v)\, \mathrm{d}v + \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v)\, \mathrm{d}v \,.$$

Da nur das zweite Wegintegral rechts von x abhängt, ist f auf $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)$ gemäß Lemma 1.8.5 stetig differenzierbar mit $df|_{U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)} = \phi|_{U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)}$. Da die stetige Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt $f \in C^1(D)$ mit $df = \phi$. ❑

1.8.7 Bemerkung. Die Voraussetzung in Satz 1.8.6, dass $\int_{\gamma_1} \phi(v)\, \mathrm{d}v = \int_{\gamma_2} \phi(v)\, \mathrm{d}v$ für je zwei achsenparallele Polygonzüge γ_1 und γ_2 mit gleichen Anfangs- und Endpunkten, ist äquivalent dazu, dass $\int_\gamma \phi(v)\, \mathrm{d}v = 0$ für alle geschlossenen, achsenparallelen Polygonzüge γ; siehe Definition 1.4.1. Das sieht man leicht, indem man $\gamma = \tilde{\gamma}_1 \oplus (\tilde{\gamma}_2 -)$ betrachtet, wobei $\tilde{\gamma}_j$ derart äquivalent zu γ_j ist, dass sich $\tilde{\gamma}_1 \oplus (\tilde{\gamma}_2 -)$ bilden lässt. ◊

1.8.8 Definition. Ein Vektorfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ heißt *stetig differenzierbar*, falls für alle $j = 1, \dots, n$ die Funktion $D \ni x \mapsto \phi(x) e_j \in X$ stetig differenzierbar ist. ◊

Wegen Bemerkung 1.5.3 sind stetig differenzierbare Vektorfelder auch stetig.

1.8.9 Lemma (*). *Ein Vektorfeld $\phi : D \to L_b(\mathbb{R}^n, X)$ ist genau dann stetig differenzierbar im Sine von Definition 1.8.8, wenn ϕ als Abbildung von D in den Banachraum $L_b(\mathbb{R}^n, X)$, versehen mit der Abbildungsnorm, stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Wegen Satz 1.2.11 ist die stetige Differenzierbarkeit von ϕ als Abbildung von D in den Banachraum $L_b(\mathbb{R}^n, X)$ äquivalent dazu, dass für $i = 1, \dots, n$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x) \in L_b(\mathbb{R}^n, X)$ für alle $x \in D$ existieren und stetig von x abhängen. Da für $j = 1, \dots, n$ die Abbildung $A \mapsto Ae_j$ von $L_b(\mathbb{R}^n, X)$ nach X linear und beschränkt ist, existiert mit $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)$ auch $\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(x) \in X$ und stimmt mit $(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x))e_j$ überein. Da letztere Funktion nach Bemerkung 1.5.3 stetig von x abhängt, sind also für $j = 1, \dots, n$ die Funktionen $x \mapsto \phi(x)e_j$ von D nach X alle stetig differenzierbar.
Seien umgekehrt alle diese Funktionen $D \ni x \mapsto \phi(x)e_j \in X$ stetig differenzierbar. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes feste $x \in D$ wird durch

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(x)$$

eine lineare Abbildung $B(x) : \mathbb{R}^n \to X$ definiert, die bekannterweise beschränkt ist. Wegen

$$\|B(x) - B(y)\| = \sup_{\|v\|_\infty \le 1} \left\| (B(x) - B(y))v \right\|_X \le \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(y) \right\|$$

ist $B : D \to L_b(\mathbb{R}^n, X)$ stetig. Schließlich ist wegen

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{t}(\phi(x + te_i) - \phi(x)) - B(x) \| &= \sup_{\|v\|_\infty \le 1} \left\| \left(\frac{1}{t}(\phi(x + te_i) - \phi(x)) - B(x) \right) v \right\|_X \\
&= \sup_{|\mu_1|, \dots, |\mu_n| \le 1} \left\| \sum_{j=1}^n \mu_j \left(\frac{1}{t}(\phi(x + te_i)e_j - \phi(x)e_j) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(x) \right) \right\|_X \\
&\le \sum_{j=1}^n \left\| \left(\frac{1}{t}(\phi(x + te_i)e_j - \phi(x)e_j) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(.)e_j)(x) \right) \right\|_X \xrightarrow{t \to 0} 0\,,
\end{aligned}$$

$B(x)$ nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)$. ❑

Ist für ein offenes $D \subseteq \mathbb{R}^n$ das stetig differenzierbares Vektorfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ Ableitung einer Funktion $f : D \to X$, also $\phi = df$, so liegt f in $C^2(D)$ und wegen des Satzes von Schwarz gilt für $x \in D$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)e_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)e_i\,.$$

Somit ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(.)e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(.)e_i \quad \text{für alle} \quad i, j \in \{1, \dots, n\}\,, \tag{1.26}$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass ϕ ein Gradientenfeld ist. Für offene Quader ist diese Bedingung auch hinreichend.

1.8.10 Lemma. *Seien $D = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $-\infty \le a_j < b_j \le +\infty$, $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $c \in D$ fest. Gilt* (1.26) *auf ganz D, so stellt*

$$f(x) := \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v)\, \mathrm{d}v$$

für $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to X$ mit $df = \phi$ dar.

Beweis. Im Fall $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ gilt nach (1.25)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_k}^{x_k} \phi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + s e_k + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\Big)\, e_k \, \mathrm{d}s\,.$$

Für $m \in \{1, \dots, n\}$ hängen die Summanden zu $k = 1, \dots, m-1$ nicht von x_m ab, weshalb

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{c_k}^{x_k} \phi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + s e_k + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\Big)\, e_k \, \mathrm{d}s\,.$$

Beim Summanden $k = m$ tritt x_m nur in der oberen Integralgrenze auf, weswegen seine Ableitung nach x_m mit $\phi\big(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j\big) e_m$ übereinstimmt.
Bei den Sumanden mit $k > m$ tritt x_m nur im Integranden auf. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von ϕ können wir die Ableitung nach x_m und das Integral vertauschen. Zusammen mit (1.26) erhalten wir für den k-ten Summanden mit $k > m$

$$\int_{c_k}^{x_k} \frac{\partial}{\partial x_m} \phi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + s e_k + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\Big)\, e_k \, \mathrm{d}s = \int_{c_k}^{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + s e_k + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\Big)\, e_m \, \mathrm{d}s\,,$$

was nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\phi\big(\sum_{j=1}^{k} x_j e_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\big) - \phi\big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + \sum_{j=k}^{n} c_j e_j\big) e_m$ ergibt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = \Big(&\phi\Big(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j\Big) \\
&+ \sum_{k=m+1}^{n} \Big(\phi\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j e_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e_j\Big) - \phi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} x_j e_j + \sum_{j=k}^{n} c_j e_j\Big)\Big)\Big) e_m \\
= {}& \phi(x)\, e_m
\end{aligned}$$

für alle $m \in \{1, \dots, n\}$. Nach der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit dieses Ausdruckes gilt $f \in C^2(D)$ und $df = \phi$. ❑

1.8.11 Beispiel. Auf $D = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0,\ \eta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ sei das Vektorfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 2}$ definiert durch

$$\phi\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \Big(-\frac{\tan\eta}{\xi^2} + 2\xi\eta + \xi^2,\ \frac{1}{\xi\cos^2\eta} + \xi^2 + \eta^2\Big)\,.$$

ϕ ist stetig differenzierbar, wobei

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\phi\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} e_1 = -\frac{1}{\xi^2\cos^2\eta} + 2\xi = \frac{\partial}{\partial\xi}\phi\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} e_2\,,$$

und erfüllt damit die Voraussetzungen von Lemma 1.8.10 bis auf die Tatsache, dass D ein Quader ist. Also sind wir zu diesem Zeitpunkt nicht sicher, ob es sich tatsächlich um ein Gradientenfeld handelt, geschweige denn haben wir die Stammfunktion explizit in der Hand. Um diese zu finden, nehmen wir einmal unbestimmt $f : D \to \mathbb{R}$ so an, dass $df = \phi$; also

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = -\frac{\tan\eta}{\xi^2} + 2\xi\eta + \xi^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial\eta}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{1}{\xi\cos^2\eta} + \xi^2 + \eta^2\,.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \int \Big(-\frac{\tan\eta}{\xi^2} + 2\xi\eta + \xi^2\Big)\,\mathrm{d}\xi + c(\eta) = \frac{\tan\eta}{\xi} + \xi^2\eta + \frac{\xi^3}{3} + c(\eta)$$

mit einer C^2-Funktion $c(\eta)$, die nur von η abhängt. Wir leiten diesen Ausdruck nach η ab, verwenden die zweite Gleichung von oben und erhalten

$$\frac{1}{\xi\cos^2\eta} + \xi^2 + c'(\eta) = \frac{\partial f}{\partial\eta}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{1}{\xi\cos^2\eta} + \xi^2 + \eta^2\,.$$

Also muss $c(\eta)$ von der Gestalt $c(\eta) = \frac{\eta^3}{3} + c$ sein. Wir sehen durch Nachprüfen, dass

$$f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{\tan\eta}{\xi} + \xi^2\eta + \frac{\xi^3+\eta^3}{3} + c\,.$$

tatsächlich $\phi = df$ auf ganz D erfüllt und somit eine Stammfunktion von ϕ ist. Insbesondere ist ϕ auf ganz D ein Gradientenfeld. ◊

1.8.12 Beispiel. Für das Vektorfeld $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definiert durch

$$\phi\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \Big(\frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}\,,\ \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} \Big)$$

rechnet man elementar nach, dass $\frac{\partial}{\partial\eta}\phi((\xi,\eta)^T)e_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}\phi((\xi,\eta)^T)e_2$ gilt.
Wir haben in Beispiel 1.8.4 mit Hilfe eines geeigneten Wegintegrals gezeigt, dass ϕ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein Gradientenfeld ist. Wir wollen diese Tatsache hier auf eine andere Art und Weise nochmals verifizieren. Dazu nehmen wir an, dass es doch ein $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\mathrm{d}g = \phi$ und leiten daraus einen Widerspruch her. Addieren wir eine geeignete Konstante, so können wir $g((1,0)^T) = 0$ annehmen.
Auf die obere Halbebene $(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$ eingeschränkt ist ϕ gemäß Lemma 1.8.10 ein Gradientenfeld mit Stammfunktion f darauf. Der Ansatz

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

ergibt durch unbestimmte Integration $f((\xi,\eta)^T) = -\arctan\big(\frac{\xi}{\eta}\big) + c(\eta)$. Wir leiten nach η ab und erhalten die Gleichung

$$\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} + c'(\eta) = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\,,$$

also $c'(\eta) = 0$, womit $c(\eta)$ konstant ist. Da gemäß Korollar 1.8.3 die Stammfunktion eines Vektorfeldes eindeutig ist, und da $g|_{(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)}$ auch eine solche Stammfunktion von $\phi|_{(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)}$ ist, folgt

$$g|_{(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)} = -\arctan\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big) + c\,.$$

Lassen wir in dieser Gleichung $(\xi,\eta)^T \in (-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$ gegen $(1,0)^T$ streben, so folgt $0 = -\frac{\pi}{2} + c$. Lassen wir in obiger Gleichung dann $(\xi,\eta)^T \in (-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$ gegen $(-1,0)^T$ streben, so schließen wir auf $g((-1,0)^T) = \frac{\pi}{2} + c = \pi$.

Auf der unteren Halbebene $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,0)$ erhalten wir ganz ähnlich $-\arctan\left(\frac{\xi}{\eta}\right)+d$ als Stammfunktion, und somit

$$g|_{(-\infty,+\infty)\times(-\infty,0)} = -\arctan\left(\frac{\xi}{\eta}\right) + d\,.$$

Lassen wir hier $(\xi,\eta)^T \in (-\infty,+\infty)\times(-\infty,0)$ gegen $(-1,0)^T$ streben, so konvergiert $\frac{\xi}{\eta}$ gegen $-\infty$, wodurch wir $\pi = g((-1,0)^T) = -\frac{\pi}{2} + d$, also $d = \frac{3\pi}{2}$ erhalten. Lassen wir schließlich $(\xi,\eta)^T \in (-\infty,+\infty)\times(-\infty,0)$ gegen $(1,0)^T$ streben, so folgt der Widerspruch $0 = g((1,0)^T) = \frac{\pi}{2} + d = 2\pi$. $\diamond$

1.9 Homotopie und einfacher Zusammenhang

Etwas schwächer als Gradientenfeld ist der folgende Begriff.

1.9.1 Definition. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so heißt ein stetiges Vektorfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein *lokales Gradientenfeld*, wenn es zu jedem $x \in D$ ein offenes $D(x) \subseteq D$[12] mit $x \in D(x)$ derart gibt, dass $\phi|_{D(x)} : D(x) \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Gradientenfeld ist. $\diamond$

Dass die Begriffe lokales Gradientenfeld und Gradientenfeld nicht äquivalent sind, haben wir etwa in Beispiel 1.8.12 gesehen.
Da für offene $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c \in D$ immer $\prod_{j=1}^n (c_j - \delta, c_j + \delta) = U_\delta^{\|.\|_\infty}(c) \subseteq D$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ gilt, erhalten wir aus Lemma 1.8.10

1.9.2 Korollar. *Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist jedes stetig differenzierbare und* (1.26) *erfüllende Vektorfeld $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein lokales Gradientenfeld.*

Ehe wir den wichtigen Satz 1.9.6 beweisen können, brauchen wir noch eine grundlegende Begriffsbildung.

1.9.3 Definition. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ zwei stetige Wege. Eine stetige Abbildung $\Gamma : [a,b]\times[c,d] \to D \quad (c,d \in \mathbb{R}, c < d)$ mit

$$\Gamma(t,c) = \gamma_0(t) \quad \text{und} \quad \Gamma(t,d) = \gamma_1(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b]\,,$$

heißt *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1 in D.
Haben γ_0 und γ_1 gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt, also $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, dann heißen diese Wege *homotop* in D, wenn es eine Homotopie $\Gamma : [a,b]\times[c,d] \to D$ zwischen γ_0 und γ_1 in D gibt mit

$$\Gamma|_{\{a\}\times[c,d]} \equiv \gamma_0(a), \quad \Gamma|_{\{b\}\times[c,d]} \equiv \gamma_0(b)\,.$$

Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn je zwei stetige Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten homotop in D sind.
Zwei stetige Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$, welche geschlossen sind, also $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ und $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ erfüllen, heißen *radial-homotop* in D, falls für eine gewisse Homotopie $\Gamma : [a,b]\times[c,d] \to D$ zwischen γ_0 und γ_1

$$\Gamma|_{\{a\}\times[c,d]} \equiv \Gamma|_{\{b\}\times[c,d]}\,.$$

Ein stetiger und geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to D$ heißt *null-homotop* in D, falls γ in D zu einem konstanten Weg radial-homotop ist. $\diamond$

[12] Klarerweise kann man $D(x)$ kleiner machen und daher immer als ϵ-Kugel bezüglich der $\|.\|_2$- oder der $\|.\|_\infty$-Norm annehmen.

1.9.4 Fakta.

1. Ist $\Gamma : [a,b] \times [c,d] \to D$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, so auch $\hat{\Gamma} : [a,b] \times [0,1] \to D$, wobei
$$\hat{\Gamma}(t,s) = \Gamma(t, sd + (1-s)c)\,.$$
Also kann man für Homotopien immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $[c,d] = [0,1]$.

2. Für feste Anfangs- und Endpunkte ist homotop in D zu sein eine Äquivalenzrelation. Genauso ist für geschlossene Wege in D die Beziehung radial-homotop zu sein eine Äquivalenzrelation.

3. Man überzeugt sich unschwer, dass stetige Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt genau dann homotop sind, wenn es eine stetige Abbildung $\Lambda : \overline{\mathbb{D}} \to D$ derart gibt, dass $\gamma_0(t) = \Lambda(\exp(i\pi t))$ und $\gamma_1(t) = \Lambda(\exp(-i\pi t))$.
Etwas herausfordernder – aber nicht viel – ist der Nachweis der Tatsache, dass $\gamma_0, \gamma_1 : [-1,+1] \to D$ genau dann in D radial-homotop sind, wenn es eine stetige Abbildung $\Lambda : \overline{2\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D} \to D$ derart gibt, dass $\gamma_k(t) = \Lambda((k+1)\exp(i\pi t))$ für $k = 0, 1$.
Schließlich ist ein stetiger und geschlossener Weg $\gamma : [-1,+1] \to D$ genau dann in D null-homotop, wenn es eine stetige Abbildung $\Lambda : \overline{\mathbb{D}} \to D$ derart gibt, dass $\gamma_0(t) = \Lambda(\exp(i\pi t))$.

4. Aus dem letzten Punkt erkennt man leicht, dass ein stetiger und geschlossener Weg $\gamma : [-1,+1] \to D$ in D genau dann null-homotop ist, falls $\gamma_0 := \gamma|_{[0,1]}$ und $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(-t),\ t \in [0,1]$ homotop sind.
Damit erhalten wir, dass ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn jeder stetige, geschlossene Weg in D null-homotop in D ist.

1.9.5 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ zwei stetige Wege mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt derart, dass die Konvexkombinationen
$$\gamma_\alpha(t) := \alpha \cdot \gamma_1(t) + (1-\alpha) \cdot \gamma_0(t)$$
für alle $\alpha \in [0,1]$ und alle $t \in [a,b]$ in D liegen, so stellt $\Gamma(t,\alpha) := \gamma_\alpha(t)$ eine stetige Abbildung von $[a,b] \times [0,1]$ nach D dar. Somit sind γ_0 und γ_1 homotop in D.
Insbesondere sind konvexe und offene D einfach zusammenhängende Gebiete; siehe dazu auch Beispiel 1.7.10. ◊

1.9.6 Satz. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ ein lokales Gradientenfeld. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten, die homotop sind, so gilt*
$$\int_{\gamma_0} \phi(v)\, dv = \int_{\gamma_1} \phi(v)\, dv\,.$$
Dieselbe Gleichheit gilt, wenn $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare und geschlossene Wege sind, welche dazu noch radial-homotop sind. Schließlich gilt für einen geschlossenen, null-homotopen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to D$
$$\int_\gamma \phi(v)\, dv = 0\,.$$

Beweis. Sei $\Gamma : [a,b]\times[0,1] \to D$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 wie in Definition 1.9.3. Wir behaupten zunächst, dass es ein $\rho > 0$ derart gibt, dass für alle $x \in K := \Gamma([a,b] \times [0,1])$ immer $U_\rho(x) \subseteq D$ und $\phi|_{U_\rho(x)}$ ein Gradientenfeld ist.
Anderenfalls gibt es nämlich zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ derart, dass[13] $U_{\frac{1}{n}}(x_n) \nsubseteq D$ oder $\phi|_{U_{\frac{1}{n}}(x_n)}$ kein Gradientenfeld ist. Da K als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist, hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$. Voraussetzungsgemäß gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_{2\delta}(x) \subseteq D$ derart, dass $\phi|_{U_{2\delta}(x)}$ ein Gradientenfeld ist. Für alle hinreichend großen $j \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n(j)} \in U_\delta(x)$ und als Folge der Dreiecksungleichung dann auch $U_\delta(x_{n(j)}) \subseteq U_{2\delta}(x) \subseteq D$. Also ist für alle hinreichend großen j das Vektorfeld $\phi|_{U_\delta(x_{n(j)})}$ ein Gradientenfeld, womit $0 < \delta < \frac{1}{n(j)}$ im Widerspruch zu $\frac{1}{n(j)} \to 0$ für $j \to \infty$.
Gemäß da auf kompakten Mengen die Stetigkeit zur gleichmäßigen Stetigkeit äquivalent ist, gibt es ein $\eta > 0$ mit

$$\max\{|t-t'|, |s-s'|\} < \eta \;\Rightarrow\; \|\Gamma(t,s) - \Gamma(t',s')\|_\infty < \rho\,. \tag{1.27}$$

Seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$, $0 = s_0 < s_1 \cdots < s_p = 1$ derart, dass für alle $j,k = 1,\dots,p$ die Ungleichung $|t_j - t_{j-1}|, |s_k - s_{k-1}| < \eta$ gilt. Also verlaufen für $j,k = 1,\dots,p$ die Polygonzüge

$$\alpha_{jk} := \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1})\,\Gamma(t_{j-1}, s_k)}, \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_k)\,\Gamma(t_j, s_k)}$$

und

$$\beta_{jk} := \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1})\,\Gamma(t_j, s_{k-1})}, \overrightarrow{\Gamma(t_j, s_{k-1})\,\Gamma(t_j, s_k)}$$

ganz in $U_\rho(\Gamma(t_j, s_k)) \subseteq D$. Mit Satz 1.8.1 folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\alpha_{jk}} \phi(v)\,\mathrm{d}v - \int_{\beta_{jk}} \phi(v)\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_{k-1})\,\Gamma(t_{j-1},s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v + \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_k)\,\Gamma(t_j,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v \\
&\qquad - \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_{k-1})\,\Gamma(t_j,s_{k-1})}} \phi(v)\,\mathrm{d}v - \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_j,s_{k-1})\,\Gamma(t_j,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v\,.
\end{aligned}$$

Aufsummieren über j und k ergibt

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{j,k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_{k-1})\,\Gamma(t_{j-1},s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v + \sum_{j,k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_k)\,\Gamma(t_j,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v \\
&- \sum_{j,k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_{k-1})\,\Gamma(t_j,s_{k-1})}} \phi(v)\,\mathrm{d}v - \sum_{j,k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_j,s_{k-1})\,\Gamma(t_j,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v\,.
\end{aligned}$$

Nach Indexverschiebungen ($k \rightsquigarrow k+1$ bzw. $j \rightsquigarrow j-1$) in den letzten beiden Summen kürzen sich die meisten Summanden der ersten (zweiten) Summe mit welchen aus der vierten (dritten) Summe. Übrig bleibt

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_0,s_{k-1})\,\Gamma(t_0,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v + \sum_{j=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_p)\,\Gamma(t_j,s_p)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v \\
&- \sum_{j=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_0)\,\Gamma(t_j,s_0)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v - \sum_{k=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_p,s_{k-1})\,\Gamma(t_p,s_k)}} \phi(v)\,\mathrm{d}v\,.
\end{aligned}$$

[13] Bezüglich $\|.\|_\infty$.

Im Fall, dass γ_0 und γ_1 gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten haben und homotop sind, gilt $\Gamma(t_0, s) = \Gamma(a, s) = \gamma_0(a)$ und $\Gamma(t_p, s) = \Gamma(b, s) = \gamma_0(b)$ für alle $s \in [0, 1]$. Also sind die geraden Strecken $\overrightarrow{\Gamma(t_0, s_{k-1})\, \Gamma(t_0, s_k)}$ und $\overrightarrow{\Gamma(t_p, s_{k-1})\, \Gamma(t_p, s_k)}$ konstant. Somit verschwinden alle Wegintegrale in der ersten und in der vierten Summe.
In dem Fall, dass γ_0 und γ_1 geschlossen und radial-homotop sind, gilt $\Gamma(t_0, s) = \Gamma(a, s) = \Gamma(b, s) = \Gamma(t_p, s)$, weshalb sich alle Wegintegrale in der ersten und in der vierten Summe wegheben.
In jedem Fall erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_p)\, \Gamma(t_j,s_p)}} \phi(v)\, \mathrm{d}v = \sum_{j=1}^{p} \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_0)\, \Gamma(t_j,s_0)}} \phi(v)\, \mathrm{d}v\,. \tag{1.28}$$

Für jedes $j = 1, \ldots, p$ sind aber $\gamma_0|_{[t_{j-1},t_j]}$ und $\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_0)\, \Gamma(t_j, s_0)}$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege, welche denselben Anfangspunkt $\gamma_0(t_{j-1}) = \Gamma(t_{j-1}, s_0)$ und denselben Endpunkt $\gamma_0(t_j) = \Gamma(t_j, s_0)$ haben. Aus (1.27) folgt zudem, dass beide Wege innerhalb von $U_\rho(\gamma_0(t_j)) \subseteq D$ verlaufen, worauf ϕ ein Gradientenfeld ist. Wegen Satz 1.8.1 stimmen die Wegintegrale von ϕ über diese beiden Wege überein:

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1},s_0)\, \Gamma(t_j,s_0)}} \phi(v)\, \mathrm{d}v = \int_{\gamma_0|_{[t_{j-1},t_j]}} \phi(v)\, \mathrm{d}v\,.$$

Wir erhalten nach dem Aufsummieren über die j, dass die rechte Seite in (1.28) mit $\int_{\gamma_0} \phi(v)\, \mathrm{d}v$ übereinstimmt. Entsprechend zeigt man, dass die linke Seite in (1.28) mit $\int_{\gamma_1} \phi(v)\, \mathrm{d}v$ übereinstimmt. Also folgt die behauptete Gleichheit. ❑

Wenn D ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, dann sind je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt immer homotop. Somit folgt aus Satz 1.9.6 und Satz 1.8.6

1.9.7 Korollar. *Ist D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist $\phi : D \to L(\mathbb{R}^n, X)$ genau dann ein lokales Gradientenfeld wenn es ein Gradientenfeld ist.*

1.10 Holomorphie und Gradientenfelder

1.10.1 Fakta. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $f : D \to Y$ eine stetige Funktion und $\phi_f : D \to L(\mathbb{R}^2, Y)$ das durch $\phi_f(x) = (z \mapsto z \cdot f(x))$ definierte Vektorfeld.

1. Wegen $\phi_f(z)e_1 = f(z)$ und $\phi_f(z)e_2 = \mathrm{i}f(z)$ bedeutet die Tatsache, dass ϕ_f ein Gradientenfeld ist, nichts anderes, als dass es ein stetig differenzierbares $F : D \to Y$ mit $\frac{\partial}{\partial x}F = f$ und $\frac{\partial}{\partial y}F = \mathrm{i}f$ auf D gibt. Letzeres ist nach Lemma 1.3.3 äquivalent dazu, dass $F' = f$ für ein holomorphes $F : D \to Y$.

   Im Fall eines Gebietes D ist Stammfunktion F nach Korollar 1.8.3 bis auf eine additive Konstate eindeutig bestimmt.

2. Durch Lokalisation des vorherigen Punktes erhalten wir:

   ϕ_f ein ist genau dann ein lokales Gradientenfeld, wenn es zu jedem $w \in D$ ein offenes $D(w) \subseteq D$ mit $w \in D(w)$ und ein holomorphes $F : D(w) \to Y$ mit $F' = f|_{D(w)}$.

3. Trifft die Aussage aus dem vorherigen Punkt zu, so ist im Fall eines einfach zusammenhängenden $D \subseteq \mathbb{C}$ das lokale Gradientenfeld ϕ_f nach Korollar 1.9.7 sogar ein Gradientenfeld, womit wir in der Situation von 1 mit einer bis auf eine additive Konstate eindeutig bestimmten Stammfunktion $F : D \to Y$ sind.

4. Für ein holomorphen $f : D \to Y$ gilt wegen $\phi_f(z)e_1 = f(z)$ und $\phi_f(z)e_2 = \mathrm{i}f(z)$
$$\frac{\partial}{\partial y}\phi_f(z)e_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_f(z)e_2 \,.$$
Insbesondere ist ϕ_f stetig differenzierbar und infolge von Korollar 1.9.2 auf jedem w enthaltenden und in D enthaltenen offenen Rechteck sogar ein lokales Gradientenfeld, weshalb sich ϕ_f als lokales Gradientenfeld herausstellt.

1.10.2 Satz (*Cauchyscher Integralsatz*)**.** *Seien Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to Y$ holomorph. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten, die homotop in D sind, so gilt*
$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \,. \tag{1.29}$$
Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare sowie geschlossene Wege, die radial-homotop in D sind, so gilt ebenfalls (1.29).
Ist $F : D \to Y$ holomorph mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$, – nach Fakta 1.10.1, 3, gibt es für einfach zusammenhängendes D immer so ein F – dann gilt
$$F(z) - F(w) = \int_{\gamma} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{1.30}$$
für alle $z, w \in D$. Hier ist die rechte Seite ein komplexes Wegintegral und γ irgendein stetiger, stückweise stetig differenzierbarer und in D verlaufender Weg mit Anfangspunkt w und Endpunkt z. Insbesondere verschwindet das Integral in (1.30) *im Fall eines geschlossenen γ.*

Beweis. Wegen (1.22) gilt $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_0} \phi_f(v)\,\mathrm{d}v$ und $\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} \phi_f(v)\,\mathrm{d}v$. Also folgt die erste Aussage wegen Fakta 1.10.1, 4, sofort aus Satz 1.9.6.
Ist $F : D \to Y$ holomorph mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$, so ist gemäß Fakta 1.10.1, 1, die Funktion $F : D \to Y$ eine Stammfunktion des Gradientenfeldes ϕ_f, was gemäß Satz 1.8.1 die Beziehung (1.30) bedingt. ❑

1.10.3 Beispiel. Man betrachte eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, die nirgends verschwindet. Wir werden in Korollar 1.11.2 sehen, dass mit f auch f' auch holomorph ist, womit auch $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ auf D holomorph ist.
Für ein einfach zusammenhängends Gebiet D hat diese Funktion nach Satz 1.10.2 eine Stammfunktion $G : D \to \mathbb{C}$ mit $G' = \frac{f'}{f}$. Wegen $(\exp \circ G)'(z) = \exp(G(z)) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ erhalten wir
$$\left(\frac{f}{\exp \circ G}\right)'(z) = \frac{f'(z)\exp(G(z)) - f(z)\exp(G(z))\frac{f'(z)}{f(z)}}{\exp(2G(z))} = 0\,.$$
Gemäß der Eindeutigkeitsaussage in Fakta 1.10.1, 3, ist $\frac{f}{\exp \circ G}$ auf D konstant, womit $f = c \cdot (\exp \circ G)$ für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da man zu G eine komplexe Konstante dazu addieren kann, ohne die Eigenschaft $G' = \frac{f'}{f}$ zu verlieren, und da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv

ist, kann man G so wählen, dass $f = \exp \circ G$. Man nennt dann G einen *komplexen Logarithmus* der Funktion f.
Offenbar erfüllt mit G auch $H := G + 2\pi i k$ für ein festes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $f = \exp \circ H$. Falls umgekehrt $H : D \to \mathbb{C}$ die Gleichung $f = \exp \circ H$ erfüllt, so gilt $1 = \exp(H(z) - G(z))$ für alle $z \in D$. Somit ist $z \mapsto \frac{1}{2\pi i}(H(z) - G(z))$ eine $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ wertige, stetige Funktion. Da D zusammenhängend ist, und da das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktion ein Intervall ist, folgt $H = G + 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Zum Beispiel erkennt man für $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $f(z) = z$, dass es eine eindeutige holomorphe Funktion $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ gibt, die $\exp \circ \log(z) = z$ und $\log(1) = 0$ erfüllt. ◊

1.11 Cauchysche Integralformel

Für die Kugel $U_r(w)$ in $\mathbb{C}$ bzgl. $\|.\|_2 = |.|$ um w mit Radius r sei im Folgenden $\gamma_r^w : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r^w(t) = w + r\exp(it)$.

1.11.1 Satz (*Cauchysche Integralformel*)**.** *Sei $f : D \to Y$ holomorph. Für $w \in D$ gilt*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \, d\zeta \tag{1.31}$$

für jeden geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to D \setminus \{w\}$, der in $D \setminus \{w\}$ radial-homotop zu γ_ρ^w ist, wobei $\rho > 0$ mit $K_\rho(w) \subseteq D$.

Beweis. Betrachte die Funktion

$$G(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \; z \in D \setminus \{w\} .$$

Nach Proposition 1.3.6 ist $G : D \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Da $\lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ existiert, kann man G auf D durch $G(w) := f'(w)$ stetig fortsetzen.
Offenbar sind für $\epsilon \in (0, \rho]$ die Wege γ_ρ^w und γ_ϵ^w radial-homotop. Aus Satz 1.10.2 folgt

$$\int_{\gamma_\rho^w} G(\zeta) \, d\zeta = \int_{\gamma_\epsilon^w} G(\zeta) \, d\zeta,$$

Andererseits kann man die Norm der rechten Seite mit Hilfe von (1.23) nach oben abschätzen durch

$$\max_{t \in [0,2\pi]} \|G \circ \gamma_\epsilon^w(t)\| \cdot \ell(\gamma_\epsilon^w) \leq \sup_{\eta \in K_\rho(w)} \|G(\eta)\| \cdot 2\pi\epsilon .$$

Da G auf das kompakte $K_\rho(w)$ stetig fortgesetzt wurde, sind obige Suprema endlich. Damit geht der Ausdruck rechts für $\epsilon \searrow 0$ gegen Null. Weil komplexe Wegintegrale linear im Integranden sind, folgt

$$0 = \int_{\gamma_\rho^w} G(\zeta) \, d\zeta = \int_{\gamma_\rho^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \, d\zeta - \left(\int_{\gamma_\rho^w} \frac{1}{\zeta - w} \, d\zeta \right) \cdot f(w) .$$

Mit Hilfe von (1.24) berechnet man

$$\int_{\gamma_\rho^w} \frac{1}{\zeta - w} \, d\zeta = 2\pi i .$$

Somit folgt (1.31) für $\gamma = \gamma_\rho^w$. Ist γ in $D \setminus \{w\}$ radial-homotop zu γ_ρ^w, so folgt (1.31) wieder aus Satz 1.10.2.

❑

1.11.2 Korollar. *Ist $f : D \to Y$ holomorph, so ist auch $f' : D \to Y$ holomorph. Infolge sind alle Funktionen $f^{(n)} : D \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv definiert durch $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, holomorph auf D, womit $f \in C^\infty(D)$.*
Für jedes $w \in D$ und jeden geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to D \setminus \{w\}$, der zu γ_ρ^w mit $\rho > 0$ und $K_\rho(w) \subseteq D$ in $D \setminus \{w\}$ radial-homotop ist, gilt dabei

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} \, d\zeta \,. \tag{1.32}$$

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgende Aussage: Die n-te komplexe Ableitung $f^{(n)}$ von f auf D existiert und für jedes $w \in D$ und jeden in $D \setminus \{w\}$ zu γ_ρ^w mit $\rho > 0$ und $K_\rho(w) \subseteq D$ radial-homotopen geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to D \setminus \{w\}$ gilt (1.32). Für $n = 0$ folgt diese Aussage unmittelbar aus Satz 1.11.1.
Angenommen, diese Aussage ist richtig für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Seien $w \in D$, $\rho > 0$ mit $K_\rho(w) \subseteq D$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to D \setminus \{w\}$ mit den angeführten Eigenschaften.
Wir wählen $r \in (0, \frac{\rho}{2}]$ so klein, dass $K_{2r}(w) \cap \Gamma([0, 2\pi] \times [0, 1]) = \emptyset$, wobei $\Gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to D \setminus \{w\}$ die entsprechende Homotopie zwischen γ und γ_ρ^w ist, womit dann γ zu γ_ρ^w sogar in $D \setminus K_{2r}(w)$ radial homotop ist.
Für $z \in U_r(w)$ erkennt man elementar, dass γ_r^z in $D \setminus \{z\}$ zu γ_{2r}^w und daher auch zu γ_ρ^w radial-homotop ist. Insbesondere ist γ in $D \setminus \{z\}$ zu γ_r^z mit $K_r(z) \subseteq K_\rho(w) \subseteq D$ radial-homotop. Nach Induktionsvoraussetzung gilt neben (1.32) auch

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \,,$$

und somit

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w)}{z - w} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+2}} \, d\zeta = \tag{1.33}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}(z - w)} - \frac{1}{(\zeta - w)^{n+1}(z - w)} - \frac{n+1}{(\zeta - w)^{n+2}} \right) \cdot f(\zeta) \, d\zeta =$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{\sum_{j=0}^n (\zeta - w)^j (\zeta - z)^{n-j}}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - w)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\zeta - w)^{n+2}} \right) \cdot f(\zeta) \, d\zeta =$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{\sum_{j=0}^n (\zeta - z)^{n-j} ((\zeta - w)^{j+1} - (\zeta - z)^{j+1})}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - w)^{n+2}} \right) \cdot f(\zeta) \, d\zeta \,.$$

Dabei haben wir $(\zeta - w)^{j+1} - (\zeta - z)^{j+1} = (z - w) \sum_{k=0}^j (\zeta - w)^k (\zeta - z)^{j-k}$. Außerdem gilt für $\zeta = \gamma(t)$, dass $|\zeta - w| > 2r$ sowie $|\zeta - z| \geq |\zeta - w| - |z - w| > 2r - r = r$ und wegen der Kompaktheit von $\gamma([0, 2\pi])$ auch $|\zeta - w|, |\zeta - z| \leq C$ für ein von $z \in U_r(w)$ unabhängiges $C \geq 0$. Wenden wir diese Abschätzungen an, so ist die Norm von (1.33) wegen (1.23) kleiner oder gleich

$$\frac{n!}{2\pi} \ell(\gamma) \cdot \sup_{\zeta \in K_\rho(w)} \|f(\zeta)\| \cdot |z - w| \frac{1}{r^{n+1}(2r)^{n+2}} \sum_{j=0}^n C^{n-j} \sum_{k=0}^j C^k C^{j-k} \,,$$

und konvergiert somit gegen Null für $z \to w$. Also existiert $(f^{(n)})'(w)$, wobei

$$(f^{(n)})'(w) = \frac{(n+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+2}} \, d\zeta \, .$$

Da $w \in D$ beliebig war, existiert $f^{(n+1)}$ auf ganz D. Somit haben wir unsere Aussage durch vollständige Induktion bewiesen.
Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgt aus der Existenz von $f^{(n+2)} = (f^{(n+1)})'$ und der damit verbundenen reellen Differenzierbarkeit von $f^{(n+1)}$, dass die Funktion $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ stetig ist; vgl. Korollar 1.2.9. Gemäß Definition 1.3.4 ist daher $f^{(n)}$ auf D holomorph. $f \in C^\infty(D)$ folgt schließlich aus (1.12).

❑

Aus (1.32) zusammen mit (1.23) erhalten wir für $\gamma = \gamma_\rho^w$, wobei $\rho > 0$ mit $K_\rho(w) \subseteq D$, die Abschätzung

$$\|f^{(n)}(w)\| = \left\| \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} \, d\zeta \right\| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \ell(\gamma_\rho^w) \max_{\zeta \in \partial U_\rho(w)} \frac{\|f(\zeta)\|}{\rho^{n+1}} = \frac{n!}{\rho^n} \max_{\zeta \in \partial U_\rho(w)} \|f(\zeta)\| \tag{1.34}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.11.3 Satz (*Satz von Morera*)**.** *Sei Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to Y$ eine Funktion. f ist genau dann holomorph, wenn ϕ_f ein lokales Gradientenfeld ist, bzw. genau dann, wenn f stetig ist und es zu jedem $w \in D$ ein offenes $D(w) \subseteq D$ mit $w \in D(w)$ derart gibt, dass $\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen, achsenparallelen, in $D(w)$ verlaufenden Polygonzüge γ.*
Für $D(w)$ kann man jedes Quadrat mit Mittelpunkt w wählen, welches in D enthalten ist. Insbesondere hängt seine Wahl nicht von f ab.

Beweis. In Fakta 1.10.1, 4, haben wir gesehen, dass für ein holomorphes f das Vektorfeld ϕ_f ein lokales Gradientenfeld abgibt, wobei ϕ_f eingeschränkt auf jedem Quadrat $D(w) \subseteq D$ mit Mittelpunkt w sogar Gradientenfeld ist.
Wegen Satz 1.8.6 ist die Tatsache, dass ϕ_f ein lokales Gradientenfeld ist, äquivalent dazu, dass es zu jedem $w \in D$ ein offenes $D(w) \subseteq D$ mit $w \in D(w)$ derart gibt, dass $\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen, achsenparallele, in $D(w)$ verlaufenden Polygonzüge γ.
Wie wir in Fakta 1.10.1 gesehen haben, ist für ein lokales Gradientenfeld ϕ_f die auf jedem $D(w)$ existierende Stammfunktion F von ϕ_f holomorph und erfüllt $F' = f$ auf $D(w)$. Gemäß Korollar 1.11.2 ist mit F aber auch $F' = f$ auf $D(w)$ holomorph. Da w beliebig war, und da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, ist f auf D holomorph.

❑

1.11.4 Korollar. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist $f : [a,b] \times D \to Y$ stetig und derart, dass für alle $t \in [a,b]$ die Funktion $z \mapsto f(t,z)$ auf D holomorph ist, so bildet $F : D \to Y$ mit*

$$F(z) := \int_a^b f(t,z) \, \mathrm{d}t$$

eine holomorphe Funktion.

Beweis. Gemäß Satz 1.1.2 hängt F für jedes kompakte $K \subseteq D$ stetig von $z \in K$ ab. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, und da jede abgeschlossene, in D enthaltene Kugel um $z \in D$ kompakt ist, folgt die Stetigkeit auf ganz D.
Seien $w \in D$ und $D(w)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $w \in D(w) \subseteq D$. Ist γ ein geschlossener, achsenparalleler Polygonzug in $D(w)$, so folgt aus dem Satz von Fubini in der Version für Riemann-Integrale aus der Analysis 2 und Satz 1.11.3

$$\int_\gamma F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \int_a^b f(t,\zeta)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\zeta = \int_a^b \int_\gamma f(t,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Nach Satz 1.11.3 ist F folglich holomorph. ❑

1.12 Holomorphie und Analytizität

1.12.1 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f_n : D \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen, die* lokal gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : D \to Y$ konvergiert, dh. für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ konvergiert $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen $f|_K$. Dann ist auch f holomorph und $f_n^{(k)}$ konvergiert für $n \to \infty$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*
Ein entsprechende Aussage gilt für ein lokal gleichmäßig konvergentes Netz von holomorphen Funktionen.

Beweis. Wähle zu $w \in D$ die offene Menge $D(w)$ wie Satz 1.11.3. Gemäß dieses Satzes können wir sie sogar unabhängig von n so wählen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\gamma f_n(\zeta)\,d\zeta = 0\,,$$

wenn nur $\gamma : [0,m] \to D(w)$ ein geschlossener Polygonzug ist. $K := \gamma([0,m])$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt. Also konvergiert $\sup_{\zeta\in K} \|f(\zeta) - f_n(\zeta)\|$ für $n \to \infty$ gegen Null, was aber auch

$$\|\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta - \int_\gamma f_n(\zeta)\,d\zeta\| \leq \ell(\gamma) \sup_{\zeta\in K} \|f(\zeta) - f_n(\zeta)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ zur Folge hat. Nach Satz 1.11.3 ist f daher holomorph.
Ist $k \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq D$ kompakt, so gibt es endlich viele Kugeln $K_{2r_1}(w_1), \dots, K_{2r_l}(w_l) \subseteq D$ mit $K \subseteq U_{r_1}(w_1) \cup \dots \cup U_{r_l}(w_l)$. Für $z \in U_{r_j}(w_j)$ ist $\gamma_{2r_j}^{w_j}$ radial-homotop in D zu γ_ρ^z für $\rho > 0$ hinreichend klein. Somit gilt nach (1.32) und wegen $|z - \zeta| \geq r_j$ für $\zeta \in \partial U_{2r_j}(w_j)$

$$\|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\| = \left\| \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{2r_j}^{w_j}} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \right\| \leq$$
$$k!2r_j \frac{1}{r_j^{k+1}} \sup_{\zeta\in\partial U_{2r_j}(w_j)} \|f_n(\zeta) - f(\zeta)\|\,.$$

In Folge konvergiert $f_n^{(k)}$ gegen $f^{(k)}$ auf $U_{r_j}(w_j)$. Da K von endlich vielen solchen Kugeln überdeckt wird, konvergiert diese Funktionenfolge gleichmäßig auf K.
Der Beweis für Netze von holomorphen Funktionen verläuft genauso.

❑

1.12.2 Korollar. *Seien $a_n \in Y$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$ einen Konvergenzradius $R > 0$ hat. Für $w \in \mathbb{C}$ ist die Grenzfunktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n a_n$ auf $U_R(w)$ holomorph mit*

$$a_0 = f(w) \quad \textit{und} \quad a_n := \frac{f^{(n)}(w)}{n!}, \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Dabei ist $U_R(w)$ die offene Kugel bzgl. $|.|$, dh. $U_R(w) = \{z \in \mathbb{C} : |z-w| < R\}$.

Beweis. Für ein kompaktes $K \subseteq U_R(w)$ existiert $r = \max_{z \in K} |z-w|$ $(< R)$, da $z \mapsto |z-w|$ stetig auf der kompakten Menge K ist. Also gilt $K \subseteq K_r(w) \subseteq U_R(w)$.
Bekannterweise konvergiert die Funktionenfolge $z \mapsto \sum_{n=0}^{N}(z-w)^n a_n$ für $N \to \infty$ gleichmäßig auf $K_r(w)$ gegen $f(z)$; somit auch auf K. Da gemäß Beispiel 1.3.7 alle Polynome $\sum_{n=0}^{N}(z-w)^n a_n$ holomorph sind, ist nach Lemma 1.12.1 auch f auf $U_R(w)$ holomorph, wobei $f^{(k)}(w) = \lim_{N\to\infty}(z \mapsto \sum_{n=0}^{N}(z-w)^n a_n)^{(k)}(w) = k! \cdot a_k$.

❑

1.12.3 Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist eine Funktion $f : D \to Y$ genau dann holomorph, wenn f* analytisch *ist, also wenn es zu jedem $w \in D$ eine offene Kreisscheibe $U_\rho(w) \subseteq D$ bzgl. $|.|$ derart gibt, dass sich f darauf als Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n a_n$ mit Konvergenzradius $\geq \rho$ darstellen lässt.*
Dabei sind die Koeffizienten a_n eindeutig durch f auf folgende Weise gegebenen

$$a_0 = f(w) \quad \textit{und} \quad a_n := \frac{f^{(n)}(w)}{n!}, \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Das größtmögliche $\rho_w > 0$ derart, dass sich ein holomorphes f als Potenzreihe auf $U_{\rho_w}(w)$ darstellen lässt, ist $\rho_w = \sup\{r > 0 : U_r(w) \subseteq D\} = d(w, D^c)$, wobei $\rho_w = +\infty$, wenn $D = \mathbb{C}$.

Beweis. Lässt sich f um jedes w auf einem $U_{\rho_w}(w) \subseteq D$ lokal als Grenzfunktion einer Potenzreihe darstellen, so ist f dort gemäß Korollar 1.12.2 holomorph. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, muss f auf ganz D holomorph sein.
Sei nun $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und setze $\rho_w = \sup\{r > 0 : U_r(w) \subseteq D\}$. Offensichtlich gilt $\rho_w = d(w, D^c)$, und ρ_w ist das größte ρ_w mit $U_{\rho_w}(w) \subseteq D$. Für $\rho \in (0, \rho_w)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = \rho$ und für $z \in U_\rho(w)$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\zeta - w}\right)^n = \frac{1}{\zeta - w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}} = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Aus (1.31) folgt, weil $\gamma(t) = w + \rho\exp(\mathrm{i}t)$, $t \in [0, 2\pi]$ in $D \setminus \{z\}$ radial-homotop zu γ_ρ^z für hinreichend kleines $r > 0$ ist,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - w} \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\zeta-w}\right)^n \Big) \cdot f(\zeta)\, d\zeta =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\rho\exp(\mathrm{i}t)}\right)^n \Big) \cdot f(w + \rho\exp(\mathrm{i}t))\, \mathrm{d}t.$$

Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-w}{\rho\exp(\mathrm{i}t)}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-w|}{\rho}\right)^n < +\infty$ konvergiert die Reihe im obigen Riemann-

Integral gleichmäßig. Somit folgt[14]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z-w}{\rho \exp(\mathrm{i}t)}\right)^n \cdot f(w + \rho \exp(\mathrm{i}t))\, \mathrm{d}t =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}}\, d\zeta\right)}_{=:a_n}.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n a_n$ und stimmt mit $f(z)$ überein, wobei wegen (1.31) bzw. (1.32) $a_0 = f(w)$ und $a_n := \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.
Da obige Reihe konvergiert folgt schließlich, dass diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $R \geq |z - w|$ hat, und da $z \in U_\rho(w)$ beliebig war, gilt $R \geq \rho$. Da auch $\rho \in (0, \rho_w)$ beliebig war, folgt $R \geq \rho_w$.

❑

1.13 Nochmals komplexe Differenzierbarkeit

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass $f : D \to Y$ genau dann holomorph ist, wenn f bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar ist. Man kann also bei der Definition der Holomorphie in Definition 1.3.4 auf die Stetigkeit von f' verzichten.

1.13.1 Lemma. *Seien $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck, Y ein komplexer Banachraum, $f : R \to Y$ bei jedem $z \in R$ differenzierbar im Sinne von Definition 1.2.8 und gelte $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ für alle $z \in R$. Eine gemäß Lemma 1.3.3 äquivalente Forderung ist, dass f bei allen $z \in R$ komplex differenzierbar ist.*
Ist das Rechteck $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ in R enthalten, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\,, \tag{1.35}$$

wobei $\gamma_1 = \overrightarrow{\binom{\alpha_1}{\alpha_2}\binom{\beta_1}{\alpha_2}}, \overrightarrow{\binom{\beta_1}{\alpha_2}\binom{\beta_1}{\beta_2}}$ *und* $\gamma_2 = \overrightarrow{\binom{\alpha_1}{\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\beta_2}}, \overrightarrow{\binom{\alpha_1}{\beta_2}\binom{\beta_1}{\beta_2}}$.

Beweis. Aus der Differenzierbarkeit von f folgt seine Stetigkeit bei allen $z \in R$. Somit existieren obige komplexe Wegintegrale. Außerdem ist (1.35) dazu äquivalent, dass

$$I(Q) := \int_{\partial Q} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

verschwindet, wobei $Q = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ und ∂Q der geschlossene Polygonzug

$$\overrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\alpha_2\end{pmatrix}}, \overrightarrow{\begin{pmatrix}\beta_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}}, \overrightarrow{\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_2\end{pmatrix}}, \overrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}}$$

ist. Unterteilen wir Q in die vier gleich großen Rechtecke

$$Q^1_{kl} := [0, \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}] \times [0, \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}] + \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k \cdot \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}\\ l \cdot \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}\end{pmatrix}, \quad k, l = 0, 1\,,$$

[14] Insbesondere konvergiert diese Reihe!

so folgt

$$I(Q) = \int_{\partial Q} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k,l=0}^{1} \underbrace{\int_{\partial Q^1_{k,l}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}_{=:I(Q^1_{k,l})},$$

da sich die Wegintegrale über die inneren Polygonzüge wegheben und die über die äußeren Polygonzüge aufaddieren.
Im Fall $I(Q) \neq 0$ würde auch $I(Q^1_{k,l}) \neq 0$ für zumindest ein Paar $k, l \in \{0, 1\}$ gelten. Wir wählen $k_1, l_1 \in \{0, 1\}$ mit $\|I(Q^1_{k_1,l_1})\| \geq \|I(Q^1_{k,l})\|$ für alle $k, l \in \{0, 1\}$. Offenbar gilt

$$\|I(Q)\| \leq \sum_{k,l=0}^{1} \|I(Q^1_{k,l})\| \leq 4\|I(Q^1_{k_1,l_1})\|.$$

Wir unterteilen jedes der Rechtecke $Q^1_{k,l}$ wieder in vier gleich große Rechtecke und erhalten insgesamt die 16 Rechtecke $Q^2_{k,l},\ k, l = 0, \ldots, 3$. Unter den in $Q^1_{k_1,l_1}$ enthaltenen Rechtecken aus $\{Q^2_{k,l} : k, l = 0, \ldots, 3\}$ wählen wir eines, nämlich $Q^2_{k_2,l_2}$ mit $k_2, l_2 \in \{0, \ldots, 3\}$, derart aus, dass $\|I(Q^2_{k_2,l_2})\|$ maximal ist, womit $\|I(Q^1_{k_1,l_1})\| \leq 4\|I(Q^2_{k_2,l_2})\|$.
Setzen wir diese Prozedur fort, so haben wir im n-ten Schritt Q in 4^n Rechtecke

$$Q^n_{k,l} := [0, \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^n}] \times [0, \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2^n}] + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot \frac{\beta_1-\alpha_1}{2^n} \\ l \cdot \frac{\beta_2-\alpha_2}{2^n} \end{pmatrix}, \quad k, l = 0, \ldots, 2^n - 1,$$

unterteilt, auf dass $\sum_{k,l=0}^{2^n-1} I(Q^n_{k,l}) = I(Q)$. Zudem haben wir $k_n, l_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ derart, dass

$$Q^n_{k_n,l_n} \subseteq Q^{n-1}_{k_{n-1},l_{n-1}} \quad \text{und} \quad \|I(Q^n_{k_n,l_n})\| = \max\{\|I(Q^n_{k,l})\| : Q^n_{k,l} \subseteq Q^{n-1}_{k_{n-1},l_{n-1}}\},$$

womit $\|I(Q^{n-1}_{k_{n-1},l_{n-1}})\| \leq 4\|I(Q^n_{k_n,l_n})\|$.
Nimmt man aus jedem $Q^n_{k_n,l_n}$ einen Punkt x_n heraus, so bildet $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, da für $m \leq n$ sicherlich $d_\infty(x_m, x_n) \leq \max\{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2^m}, \frac{\beta_2-\alpha_2}{2^m}\}$. Der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt zudem in jedem $Q^n_{k_n,l_n}$, womit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q^n_{k_n,l_n}$ nichtleer ist. Da aber die Durchmesser $d(Q^n_{k_n,l_n})$ von $Q^n_{k_n,l_n}$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren, ist dieser Durchschnitt einpunktig, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q^n_{k_n,l_n} = \{w\}$.
Die noch nicht verwendete Tatsache, dass f bei allen $\eta \in R$ komplex differenzierbar ist, besagt für $\eta = w$, dass $f(z) = f(w) + (z - w)f'(w) + |z - w|\varepsilon(z)$ mit $\lim_{z\to w} \varepsilon(z) = 0$. Aus der Linearität von Wegintegralen folgt

$$I(Q^n_{k_n,l_n}) = \int_{\partial Q^n_{k_n,l_n}} (f(w) + (\zeta - w)f'(w))\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial Q^n_{k_n,l_n}} |\zeta - w|\,\varepsilon(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Da $z \mapsto f(w) + (z - w)f'(w)$ holomorph ist, erhalten wir aus (1.23) und Satz 1.10.2

$$\|I(Q^n_{k_n,l_n})\| = \left\| \int_{\partial Q^n_{k_n,l_n}} |\zeta - w|\,\varepsilon(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right\| \leq \ell(\partial Q^n_{k_n,l_n})\, d(Q^n_{k_n,l_n}) \sup_{z\in Q^n_{k_n,l_n}} \|\varepsilon(z)\|.$$

Wegen $\ell(\partial Q^n_{k_n,l_n}) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial Q)$ und $d(Q^n_{k_n,l_n}) = \frac{1}{2^n}d(Q)$ folgt

$$\|I(Q)\| \leq 4^1\|I(Q^1_{k_1,l_1})\| \leq \cdots \leq 4^n\|I(Q^n_{k_n,l_n})\| \leq 4^n \frac{1}{4^n}\ell(\partial Q)\, d(Q) \sup_{z\in Q^n_{k_n,l_n}} \|\varepsilon(z)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt $I(Q) = 0$ im Gegensatz zu unserer Annahme $I(Q) \neq 0$. ❑

1.13.2 Satz. *Für einen komplexen Banachraum Y und ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ ist $f : D \to Y$ genau dann holomorph, wenn f bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar ist.*

Beweis. Definitionsgemäß ist jede holomorphe Funktion komplex differenzierbar; vgl. Definition 1.3.4. Sei umgekehrt $f : D \to Y$ überall komplex differenzierbar, $w \in D$ und $\delta > 0$ so klein, dass das Quadrat $D(w) := U_\delta^{\|.\|_\infty}(w)$ ganz in D enthalten ist. Wir können Lemma 1.13.1 auf $R = D(w)$ anwenden.
Definieren wir $\phi_f : D(w) \to L(\mathbb{R}^2, Y)$ durch $\phi_f(z) = (\binom{\xi}{\eta} \mapsto (\xi + i\eta) f(z))$, so kann wegen (1.22) die Gleichung (1.35) auch als

$$\int_{\gamma_1} \phi_f(v)\, dv = \int_{\gamma_2} \phi_f(v)\, dv$$

angeschrieben werden. Insbesondere sind die Voraussetzungen von Lemma 1.8.5 erfüllt, womit sich ϕ_f auf $D(w)$ als Gradientenfeld und infolge auf D als lokales Gradientenfeld herausstellt. Nach Satz 1.11.3 ist f holomorph auf D. ❑

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir noch einmal alle vorgekommenen äquivalenten Formulierungen von Holomorphie wiederholen. Ist Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to Y$ eine Funktion, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(*i*) f ist holomorph, dh. f ist bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar, wobei $z \mapsto f'(z)$ stetig ist.

(*ii*) $f \in C^1(D)$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ für alle $z \in D$.

(*iii*) ϕ_f ist ein lokales Gradientenfeld.

(*iv*) f ist stetig und zu jedem $w \in D$ gibt es ein offenes $D(w) \subseteq D$ mit $w \in D(w)$ so, dass $\int_\gamma f\, dz = 0$ für alle geschlossenen, achsenparallelen, in $D(w)$ verlaufenden Polygonzüge γ.

(*v*) f ist bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar.

(*vi*) f ist bei jedem $z \in D$ differenzierbar im Sinne von Definition 1.2.8 und es gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ für alle $z \in D$.

(*vii*) f ist analytisch, dh. wenn es zu jedem $w \in D$ eine offene Kreisscheibe $U_{\rho_w}(w) \subseteq D$ bzgl. $|.|$ gibt so, dass sich f darauf als Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty (z - w)^n a_n$ mit Konvergenzradius $\geq \rho_w$ darstellen lässt.

Kapitel 2

Eigenschaften holomorpher Funktionen

2.1 Satz von Liouville

2.1.1 Proposition. *Ist Y ein Banachraum, $f : \mathbb{C} \to Y$ holomorph auf $\mathbb{C}$, also eine* ganze Funktion *, und $\alpha \geq 0$ derart, dass*

$$\liminf_{r \to +\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}, |z|=r} \frac{\|f(z)\|}{|z|^\alpha} < +\infty\,,$$

so ist $f(z)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $[\alpha]$.

Beweis. Die Voraussetzung besagt nicht anderes, als dass es eine Folge $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Radien mit $\rho_k \to +\infty$ und ein $C > 0$ so gibt, dass $\|f(z)\| \leq C\rho_k^\alpha$ für alle $|z| = \rho_k$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Aus (1.34) folgt für $n > \alpha$

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq \frac{n!}{\rho_k^n} \max_{\zeta \in \partial U_{\rho_k}(w)} \|f(\zeta)\| \leq Cn! \frac{\rho_k^\alpha}{\rho_k^n} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Aus Satz 1.12.3 folgt damit die Behauptung.

❑

Für $\alpha \in (0, 1)$ erhalten unmittelbar

2.1.2 Korollar (*Satz von Liouville*)**.** *Ist $f : \mathbb{C} \to Y$ ganz und beschränkt, so ist f eine konstante Funktion.*

2.2 Identitätssatz

Wie schon in der Analysis gezeigt wurde, sind für einen Banachraum Y über $\mathbb{C}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots \in Y$ Grenzfunktionen von Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n a_n$, welche $R \in (0, +\infty]$ als Konvergenzradius haben, als Abbildung von $U_R^\mathbb{C}$ nach Y stetig. Im Fall $f(0) = a_0 \neq 0$ gilt insbesondere $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta^\mathbb{C}(0)$ mit einem $\delta \in (0, R]$. Im Fall $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$ und $a_m \neq 0$ hat die Potenzreihe $g(z) := \sum_{n=m}^\infty z^{n-m} a_n$ den selben Konvergenzradius R und nach dem eben Gesagten keine Nullstellen auf einem gewissen Kreis $U_\delta^\mathbb{C}(0)$. Insbesondere hat $f(z) = z^m g(z)$ auf diesem Kreis höchstens die Nullstelle Null. Wir haben also folgende Aussage verifiziert.

2.2.1 Lemma. *Falls die Menge $N \subseteq U_R(0)$ der Nullstellen der Grenzfunktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$ einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, +\infty]$ den Punkt 0 als Häufungspunkt hat, so müssen alle a_n und damit auch $f(z)$ für $z \in U_R^{\mathbb{C}}$ verschwinden.*

2.2.2 Satz (*Identitätssatz*)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : D \to Y$ holomorph. Falls die Menge $N \subseteq D$ aller Nullstellen von $f - g$ in D einen Häufungspunkt in D hat, oder falls $f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und mindestens ein $w \in D$, so stimmen f und g überein.*

Beweis. Ist $w \in D$, so gilt nach Satz 1.12.3

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n \, \frac{f^{(n)}(w) - g^{(n)}(w)}{n!} \quad \text{für alle } \; z \in U_\rho(w)$$

mit $\rho = d(w, D^c)$, wobei diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $\geq \rho$ hat. Falls w Häufungspunkt von N ist, so folgt aus Lemma 2.2.1, dass $(f - g)|_{U_\rho(w)} \equiv 0$. Aus $f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgt dieselbe Tatsache.
Also ist unter jeder der beiden Voraussetzungen die Menge

$$A := \{w \in D \mid \exists \rho \in (\,0, d(w, D^c)\,] : (f - g)|_{U_\rho(w)} \equiv 0\}$$

nicht leer. Für $w \in A$ und für den existierenden Radius $\rho > 0$ gilt offenbar $U_\rho(w) \subseteq A$. Also ist A offen. Da jeder Häufungspunkt von A, der auch in D liegt, ein Häufungspunkt von Nullstellen von $f - g$ ist, folgt aus Lemma 2.2.1, dass dieser Häufungspunkt wieder in A liegt, womit $\overline{A} \cap D = A$ bzw. A als Teilmenge von D auch abgeschlossen ist. Infolge ist $B := D \setminus A$ offen, und da D zusammenhängend ist, folgt $A = D$ bzw. $f \equiv g$; vgl. Bemerkung 1.7.2.

❑

2.2.3 Definition. Sei $w \in D$ und $f : D \to Y$ holomorph und auf einer gewissen Umgebung von w nicht konstant. Gilt für $m \in \mathbb{N}$

$$0 = f(w) = \cdots = f^{(m-1)}(w) \;\text{ und }\; f^{(m)}(w) \neq 0\,,$$

so heißt w eine *Nullstelle von der Vielfachheit m*. Ist w keine Nullstelle, so sagen wir, dass die Nullstellenvielfachheit Null ist.
Für $b \in \mathbb{C}$ heißt w eine *b-Stelle* von der Vielfachheit m, wenn w eine Nullstelle von der Vielfachheit m der Funktion $z \mapsto f(z) - b$ ist. ◊

Entwickelt man f um w in die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n$, so ist wegen $n! \cdot a_n = f^{(n)}(w)$ die Nullstellenvielfachheit von f bei w gerade das kleinste $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $a_m \neq 0$.

2.3 Singularitäten

2.3.1 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to Y$ holomorph. f ist genau dann auf einer gewissen Umgebung von w beschränkt, wenn sich f auf D holomorph fortsetzen lässt.*

Beweis. Wenn sich f auf D zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt, so ist f bei w stetig und somit auch auf einer gewissen Umgebung von w beschränkt.

Sei nun f auf einer gewissen Umgebung von w beschränkt. Die Funktion $g(z) = (z-w)^2 f(z),\ z \neq w$ und $g(w) = 0$ ist auf $D \setminus \{w\}$ holomorph und wegen

$$\lim_{z\to w} \left\| \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \right\| = \lim_{z\to w} |(z-w)|\, \|f(z)\| = 0$$

bei w komplex differenzierbar. Also ist g auf D holomorph, wobei $0 = g(w) = g'(w)$. Somit hat g um w eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (z-w)^n b_n, \quad z \in U_{\rho_w}(w)\,,$$

und in Folge

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n b_{n+2}, \quad z \in U_{\rho_w}(w) \setminus \{w\}\,.$$

Somit lässt sich f auf D zu einer analytischen und daher holomorphen Funktion fortsetzen.

❑

2.3.2 Bemerkung. Sei $f : D \to Y$ holomorph mit einem Banachraum Y über $\mathbb{C}$ und einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass für gewisse $0 < r < R < +\infty$ und $w \in \mathbb{C}$ der abgeschlossene Kreisring $K_R(w) \setminus U_r(w)$ in D enthalten ist. Für ein $z \in U_R(w) \setminus K_r(w)$ gilt dann folgende Variante der Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_R^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta\,, \tag{2.1}$$

wobei $\gamma_\rho^w : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\rho^w(t) = w + \rho \exp(\mathrm{i}t)$ für $\rho > 0$. Um das einzusehen, betrachten wir die Funktion $G : D \to Y$,

$$G(\eta) = \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} \quad \text{für } \eta \neq z \quad \text{und} \quad G(z) = f'(z)\,,$$

wie im Beweis von Satz 1.11.1. Gemäß Lemma 2.3.1 ist G auf D holomorph. Da γ_r^w und γ_R^w in D radial-homotop sind, folgt aus Satz 1.10.2

$$\int_{\gamma_R^w} G(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_r^w} G(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

und somit

$$\int_{\gamma_R^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\gamma_R^w} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\gamma_r^w} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

Da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ auf $U_{|z-w|}(w)$ holomorph ist, und da γ_r^w in $U_{|z-w|}(w)$ verläuft, folgt aus Satz 1.10.2, dass $\int_{\gamma_r^w} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 0$. Wie im Beweis von Satz 1.11.1 erkennt man $\int_{\gamma_R^w} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i}$. Umformen ergibt schließlich (2.1). ◊

2.3.3 Satz. *Seien Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to Y$ holomorph, $w \in \mathbb{C}$ und Radien $0 \leq r_w < R_w \leq +\infty$ derart, dass $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w) \subseteq D$.*

- *Für $\rho \in (r_w, R_w)$, $\gamma_\rho^w : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_\rho^w(t) = w + \rho \exp(\mathrm{i}t)$ und*

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k a_k$ Konvergenzradius größer oder gleich R_w und die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k a_{-k}$ Konvergenzradius größer oder gleich $\frac{1}{r_w}$, wobei für alle $z \in U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (z - w)^k a_k \,. \tag{2.3}$$

Diese Reihe heißt Laurentreihe *um w auf dem Kreisring $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$.*

- *Die Koeffizienten a_k sind durch f und den Kreisring $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$ insofern eindeutig bestimmt, dass für $b_k \in Y$, $k \in \mathbb{Z}$, den Konvergenzradius R' ($\in [0, +\infty]$) der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k b_k$ und den Konvergenzradius $\frac{1}{r'}$ mit r' ($\in [0, +\infty]$) der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k b_{-k}$ aus $(r_w, R_w) \cap (r', R') \neq \emptyset$ und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (z - w)^k b_k$ für alle $z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)$ mit einem $\rho \in (r_w, R_w) \cap (r', R')$ schon $a_k = b_k$, $k \in \mathbb{Z}$, folgt.*

Beweis. Seien $r, R \in (r_w, R_w)$ mit $r < R$. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = R$ und für $z \in U_R(w)$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - w}{\zeta - w} \right)^k = \frac{1}{\zeta - w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}} = \frac{1}{\zeta - z} \,.$$

Analog erhalten wir für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = r$ und $z \in \mathbb{C} \setminus K_r(w)$

$$\frac{1}{z - w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - w}{z - w} \right)^k = \frac{1}{z - w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-w}{z-w}} = -\frac{1}{\zeta - z} \,.$$

Für $z \in U_R(w) \setminus K_r(w)$ folgt aus (2.1)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_R^w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - w}{\zeta - w} \right)^k \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \, \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r^w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - w}{z - w} \right)^k \cdot \frac{f(\zeta)}{z - w} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - w)^k \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_R^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} (z - w)^{-k-1} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{-k}} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (z - w)^k a_k \,, \end{aligned}$$

wobei $a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_R^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta$ für $k \geq 0$ und $a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta$ für $k < 0$. Da die betrefflichen Reihen gleichmäßig konvergieren, dürfen Integrale und Reihen vertauscht werden, womit die beiden Reihen rechts vom zweiten Gleichheitszeichen konvergieren und eben diese Gleichheit gilt. Dass die a_k einheitlich in der Form (2.2) für jedes $\rho \in (r, R)$ geschrieben werden können, folgt nach Satz 1.10.2 aus der Tatsache, dass γ_r^w, γ_R^w und γ_ρ^w in $D \setminus \{w\}$ radial-homotop sind.
Da $r, R \in (r_w, R_w)$ mit $r < R$ beliebig waren und da wegen (2.2) die a_k unabhängig von r, R sind, ist die Reihenentwicklung für alle $z \in U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$ gültig. Insbesondere konvergiert $\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k a_k$ für $|\zeta| \in (r_w, R_w)$ und $\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k a_{-k}$ für $|\frac{1}{\zeta}| \in (r_w, R_w)$. Daraus folgt die getroffene Aussage über die jeweiligen Konvergenzradien dieser Reihen.

Gilt schließlich $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(z-w)^k b_k$ für alle $z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)$ mit $b_k \in Y$, $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\rho \in (r_w, R_w) \cap (r', R')$ mit den Konvergenzradien R' von $\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k b_k$ und $\frac{1}{r'}$ von $\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k b_{-k}$, so folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenreihen $\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k b_k$ und $\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k b_{-k}$ für $\zeta \in K_\rho(0) \setminus U_\rho(0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho^w} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho^w}\frac{(\zeta-w)^j}{(\zeta-w)^{k+1}}\, d\zeta\right) b_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta_{jk} b_j = b_k\,,$$

woraus sich in Kombination mit (2.2) die Gleichheit $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ergibt. ❑

2.3.4 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to Y$ holomorph. Mit $R_w = d(w, D^c) > 0$ und $r_w = 0$ hat f eine Laurententwicklung (2.3).
Wir bezeichnen mit $\beta(w)$ das Minimum aller $N \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ derart, dass $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < -N$, und nennen $\beta(w)$ die *Polordnung* von f bei w. ◊

2.3.5 Fakta. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to Y$ holomorph.

1. Im Fall $\beta(w) = +\infty$, also in dem Fall, dass $a_n = 0$, $n < -N$, für kein $N \in \mathbb{Z}$ zutrifft, heißt w eine *wesentliche Singularität* von f.

2. $\beta(w) = -\infty$ nichts anderes, als dass $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, also dass f auf einer gewissen punktierten (also w ausgenommen) Umgebung identisch verschwindet.

3. Im Fall $\beta(w) \in \mathbb{Z}$ gilt $a_n = 0$, $n < -\beta(w)$ und $a_{-\beta(w)} \neq 0$, also hat die Laurentreihenentwicklung von f auf $U_{R_w}(w) \setminus \{w\}$ die Form
$$\sum_{k=-\beta(w)}^{+\infty} (z-w)^k a_k\,.$$

4. $\beta(w) \leq 0$ bedeutet nach (2.2) genau, dass sich f auf D holomorph fortsetzen lässt. In dem Fall heißt w eine *hebbare Singularität* von f.

   Da sich in diesem Fall f auf D holomorph und infolge stetig fortsetzen lässt, gilt $\lim_{z\to w} \|f(z)\| = \|a_0\| \in [0, +\infty)$. Umgekehrt erhalten wir aus der Existenz von $\lim_{z\to w} \|f(z)\|$ in $[0, +\infty)$ die Beschränktheit von f auf $U_\delta(w) \setminus \{w\}$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und folglich nach Lemma 2.3.1 die holomorphe Fortsetzbarkeit von f auf D.

   $\beta(w) \in -\mathbb{N}$ bedeutet dabei, dass diese Fortsetzung bei w eine Nullstelle mit Vielfachheit $-\beta(w)$ hat, und $\beta(w) = 0$ bedeutet, dass diese Fortsetzung einen Wert ungleich Null bei w annimmt.

5. Im Fall $\beta(w) \in \mathbb{N}$ heißt w eine *Polstelle* von f. Dabei gilt wegen
$$\sum_{k=-\beta(w)}^{+\infty} (z-w)^k a_k = (z-w)^{-\beta(w)} \sum_{m=0}^{+\infty} (z-w)^m a_{m-\beta(w)}, \quad z \in U_{R_w}(w) \setminus \{w\}\,,$$
   mit $a_{-\beta(w)} \neq 0$
$$\lim_{z\to w} \|f(z)\| = \big(\lim_{z\to w} |z-w|^{-\beta(w)}\big) \underbrace{\Big\| \lim_{z\to w} \sum_{m=0}^{+\infty} (z-w)^m a_{m-\beta(w)} \Big\|}_{=a_{-\beta(w)}} = +\infty\,.$$

6. Die Koeffizienten der Laurentreihe im Bereich $U_{R_w}(w) \setminus \{w\}$ und infolge $\beta(w)$ hängen nur lokal vom Aussehen von f bei w ab.

2.3.6 Beispiel. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ hat bei 1 einen Pol der Ordnung 1. Wogegen $z \mapsto \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bei 0 eine wesentliche Singularität besitzt. ◊

2.3.7 Proposition. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Weiters seien $f, g : D \setminus \{w\} \to Y$ holomorph mit w als hebbare Singularität oder Polstelle, also $\beta_f(w), \beta_g(w) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$. Dann sind $\lambda f, f + g : D \setminus \{w\} \to Y$ und im Fall $Y = \mathbb{C}$ auch $f \cdot g : D \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ jeweils holomorph mit w als hebbare Singularität oder Polstelle, wobei $\beta_{\lambda f}(w) = \beta_f(w)$, $\beta_{f \cdot g}(w) = \beta_f(w) + \beta_g(w)$ und $\beta_{f+g}(w) \leq \max(\beta_f(w), \beta_g(w))$ mit Gleichheit falls $\beta_f(w) \neq \beta_g(w)$.*
Für $\beta_f(w) \in \mathbb{Z}$ und $Y = \mathbb{C}$ ist $\frac{1}{f} : U \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ für eine hinreichend kleine, offene Umgebung von w holomorph, wobei $\beta_{\frac{1}{f}}(w) = -\beta_f(w) \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Aussagen über $\lambda f, f + g, f \cdot g$ überprüft man leicht mit Hilfe von (2.3) unter Beachtung der Tatsache, dass $-\beta(w)$ der kleinste Index $n \in \mathbb{Z}$ ist so, dass der Koeffizient a_n nicht verschwindet.
Gelte $Y = \mathbb{C}$. Im Falle $\beta_f(w) \in \mathbb{Z}$ gilt $f(z) = \sum_{n=-\beta_f(w)}^{\infty} a_n (z - w)^n$ mit $a_{-\beta_f(w)} \neq 0$ für $z \in U_r(w) \setminus \{w\}$. Insbesondere verschwindet das auf $U_r(w)$ holomorphe $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-\beta_f(w)} (z - w)^n$ bei w nicht. Für hinreichend kleines $r > 0$ verschwindet diese Funktion nirgends auf $U_r(w)$. Daher ist $\frac{1}{h} : U_r(w) \to \mathbb{C}$ holomorph, also $\frac{1}{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^n$ mit $b_0 \neq 0$. Wir erhalten

$$\frac{1}{f(z)} = (z - w)^{\beta_f(w)} \frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^{n+\beta_f(w)} = \sum_{n=\beta_f(w)}^{\infty} b_{n-\beta_f(w)} (z - w)^n ,$$

wobei $\beta_{\frac{1}{f}}(w) = -\beta_f(w)$. ❑

2.3.8 Satz (*Casorati-Weierstraß*)**.** *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) w ist eine wesentliche Singularität.

(ii) $f(U \setminus \{w\})$ ist für jede Umgebung $U \subseteq D$ von w dicht in $\mathbb{C}$.

(iii) Der Grenzwert $\lim_{z \to w} |f(z)|$ existiert nicht in $[0, +\infty]$.

Beweis. Gelte (i), also $\beta_f(w) = +\infty$. Wäre $f(U \setminus \{w\})$ für eine oBdA. offene Umgebung U von w nicht dicht in $\mathbb{C}$, so folgte $|f(z) - \eta| \geq r$ für alle $z \in U \setminus \{w\}$ und gewisse $\eta \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Insbesondere wäre

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - \eta}, \quad z \in U \setminus \{w\} ,$$

beschränkt, und hätte infolge w als hebbare Singularität, also $\beta_h(w) \leq 0$. Wegen $h \not\equiv 0$ hätten wir sogar $\beta_h(w) \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$. Aus Proposition 2.3.7 folgte für

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + \eta, \quad z \in U \setminus \{w\} ,$$

der Widerspruch $\beta_f(w) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Offenbar impliziert (ii) die Aussage (iii).
Gilt (iii), so muss w eine wesentliche Singularität sein, da anderenfalls w eine hebbare Singularität oder Polstelle für f wäre. Gemäß Fakta 2.3.5, 4 und 5, würde infolge aber $\lim_{z\to w} |f(z)|$ in $[0, +\infty]$ existieren.

❑

Zusammen mit Fakta 2.3.5, 4 und 5, erhalten wir folgende Charakterisierung.

2.3.9 Korollar. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph.*

- *w ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn* $\lim_{z\to w} |f(z)|$ *in* $[0, +\infty)$ *existiert.*
- *w ist genau dann eine Polstelle, wenn* $\lim_{z\to w} |f(z)| = +\infty$.
- *w ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn* $\lim_{z\to w} |f(z)|$ *in* $[0, +\infty]$ *nicht existiert.*

2.4 Meromorphe Funktionen

2.4.1 Definition. Eine Teilmenge P eines topologischen Raumes X heißt *diskret*, wenn sie in X keinen Häufungspunkt hat. ◊

Also sind diskrete Teilmengen P genau jene mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt mit $U \cap P \subseteq \{x\}$.

2.4.2 Beispiel. Diskret zu sein hängt stark vom topologischen Raum X ab. Beispielsweise ist $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ in $(0, +\infty)$ diskret aber nicht in $[0, +\infty)$. ◊

2.4.3 Fakta.

1. Wählt man $x \in X \setminus P$, so muss für diese Umgebung $U \cap P = \emptyset$ gelten. Also ist $X \setminus P$ in X offen.
2. Teilmengen von diskreten Teilmengen und endliche Vereinigungen diskreter Teilmengen sind wieder diskret.
3. Ist $K \subseteq X$ kompakt, so muss $K \cap P$ endlich sein, da sonst $K \cap P$ einen Häufungspunkt in K und damit in X hätte.
4. Da sich offene Teilmengen $D \subseteq \mathbb{C}$ durch abzählbar viele kompakte Mengen ausschöpfen lassen, ist jede diskrete Teilmenge P von D immer höchstens abzählbar.
5. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und P eine diskrete Teilmenge von D, so ist auch $D \setminus P$ ein Gebiet.

   Ist nämlich $D \setminus P = A \dot\cup B$ für offene und disjunkte A, B, so ist für jedes $w \in P$ und hinreichend kleines $r_w > 0$ die zusammenhängende Menge $U_{r_w}(w) \setminus \{w\}$ in $D \setminus P$ und somit entweder ganz in A oder ganz in B enthalten; vgl. Lemma 1.7.4. Entsprechend zerfällt P in $P = P_A \dot\cup P_B$, wobei $A \cup P_A$ und $B \cup P_B$ offen und disjunkt sind. Ihre Vereinigung ist D. Da D zusammenhängend ist, ist eine der beiden Mengen leer.

2.4.4 Definition. Sei Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung f heißt *meromorph auf* D, wenn es eine diskrete Teilmenge $P(f)$ von D derart gibt, dass $f : D \setminus P(f) \to Y$ holomorph ist und dass alle $w \in P(f)$ Polstellen von f sind.
Die Menge aller in D meromorphen Funktionen nach Y bezeichnen wir mit $M(D, Y)$ bzw. $M(D)$ im Fall $Y = \mathbb{C}$. ◊

Insbesondere lassen sich meromorphe Funktionen im Fall $Y = \mathbb{C}$ als Abbildungen von D nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ interpretieren, indem man den Polstellen $w \in P(f)$ den Wert ∞ zuordnet.

2.4.5 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und $f, g \in M(D, Y)$. Dann*

- ⇝ *gilt $\lambda f \in M(D, Y)$ mit $P(\lambda f) = P(f)$,*
- ⇝ *hat $f + g : D \setminus (P(f) \cup P(g)) \to Y$ eine holomorphe Fortsetzung auf $D \setminus P(f + g)$ mit $P(f + g) = \{w \in P(f) \cup P(g) : \beta_{f+g}(w) \in \mathbb{N}\}$, wobei $f + g \in M(D, Y)$,*
- ⇝ *hat im Fall $Y = \mathbb{C}$ die Funktion $f \cdot g : D \setminus (P(f) \cup P(g)) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $D \setminus P(f \cdot g)$ mit $P(f \cdot g) = \{w \in P(f) \cup P(g) : \beta_{f \cdot g}(w) \in \mathbb{N}\}$, wobei $f \cdot g \in M(D)$.*

Beweis. Dass λf meromorph ist, folgt unmittelbar aus der Definition, Definition 2.4.4. Die Funktionen $f \cdot g$ und $f + g$ sind auf $D \setminus (P(f) \cup P(g))$ holomorph, wobei $P(f) \cup P(g)$ in D keinen Häufungspunkt hat. Für $w \in P(f) \cup P(g)$ folgt aus Proposition 2.3.7, dass w für $f \cdot g$ bzw. $f + g$ eine Polstelle oder eine hebbare Singularität ist, womit $f \cdot g \in M(D)$ bzw. $f + g \in M(D, Y)$.

❑

2.4.6 Bemerkung. Ist $f : D \setminus P(f) \to \mathbb{C}$ meromorph auf einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}$, so kann für eine Zusammenhangskomponente G von D die Funktion $f|_{G \setminus P(f)}$ wegen $\lim_{z \to w} \|f(z)\| = +\infty$, $w \in P(f)$, nur dann identisch verschwinden, wenn $P(f) \cap G = \emptyset$. Wegen des Identitätssatzes, Satz 2.2.2, hat für jede Zusammenhangskomponente G von D die Nullstellenmenge $N(f) \cap G \setminus P(f)$ von $f|_{G \setminus P(f)}$ keinen Häufungspunkt in $G \setminus P(f)$, falls $f|_{G \setminus P(f)}$ nicht identisch verschwindet. Wegen $\lim_{z \to w} \|f(z)\| = +\infty$, $w \in P(f)$, hat $N(f) \cap G$ auch in G keinen Häufungspunkt.

Infolge ist $N(f)$ genauso wie $P(f)$ und damit auch $N(f) \cup P(f)$ in D diskret, falls $f|_{G \setminus P(f)} \not\equiv 0$ für alle Zusammenhangskomponenten G von D; siehe Fakta 2.4.3. ◊

2.4.7 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in M(D)$. Falls $f|_{G \setminus P(f)} \not\equiv 0$ für jede Zusammenhangskomponenten G von D, so hat $\frac{1}{f} : D \setminus (P(f) \cup N(f)) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $D \setminus P(\frac{1}{f})$ mit $P(\frac{1}{f}) = N(f)$, wobei $\frac{1}{f} \in M(D)$. Hier bezeichnet $N(f)$ die Nullstellenmenge von f.*

Beweis. Gemäß Bemerkung 2.4.6 hat die Menge $N(f)$ in D keinen Häufungspunkt. Zudem hat das holomorphe $\frac{1}{f} : D \setminus (P(f) \cup N(f)) \to \mathbb{C}$ nach Proposition 2.3.7 bei allen $w \in P(f)$ eine hebbare Singularität und bei allen $w \in N(f)$ eine Polstelle.

❑

2.4.8 Bemerkung. $M(D, Y)$ bildet einen Vektorraum, wenn man wie in Lemma 2.4.5 die Addition von $f, g \in M(D, Y)$ durch die holomorphe Fortsetzung von $f + g : D \setminus (P(f) \cup P(g)) \to Y$ auf $D \setminus P(f + g)$ und die Skalarmultiplikation λf für $\lambda = 0$ durch die Nullfunktion auf D und anderenfalls durch $D \setminus P(f) \ni z \mapsto \lambda f(z) \in Y$ definiert.

Im Fall eines Gebietes D und $Y = \mathbb{C}$ bildet $M(D)$ sogar eine Algebra mit $\mathbb{1}_D$ als Einselement und nach Lemma 2.4.7 sind alle $f \in M(D) \setminus \{0\}$ invertierbar, womit $M(D)$ einen Körper bildet. ◊

2.5 Umlaufzahl

2.5.1 Definition. Für einen geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und für $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \,.$$

Umlaufzahl des Weges γ um den Punkt z. ◊

Wie man sofort aus (1.31) angewendet mit $f \equiv 1$ erkennt, gilt für $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = w + \rho \cdot \exp(it)$ die Beziehung $n(\gamma, z) = 1$, falls $z \in U_\rho(w)$. Da $U_\rho(w)$ einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz 1.10.2, dass $n(\gamma, z) = 0$ im Fall $z \in \mathbb{C} \setminus K_\rho(w)$.

2.5.2 Fakta.

1. Wie der Name Umlaufzahl schon suggeriert, gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$. Um das einzusehen, seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ derart, dass die Wege $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $j = 1, \ldots, m$, stetig differenzierbar sind. Die auf $[a, b]$ stetige Funktion

$$h(t) := (\gamma(t) - z) \cdot \exp\Big(- \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds \Big)$$

eingeschränkt auf $[t_{j-1}, t_j]$ und abgeleitet nach t ergibt

$$h'(t) = \gamma'(t) \exp\Big(- \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds \Big) - (\gamma(t) - z) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \cdot \exp\Big(- \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds \Big) = 0 \,,$$

womit h auf jedem $[t_{j-1}, t_j]$ konstant und wegen seiner Stetigkeit auf ganz $[a, b]$ konstant ist. Aus $\gamma(a) - z = h(a) = h(b) = (\gamma(b) - z) \cdot \exp(-2\pi i n(\gamma, z))$ zusammen mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ergibt sich $\exp(-2\pi i n(\gamma, z)) = 1$, also $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

2. Auf jeder zusammenhängenden Teilmenge Z von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ konstant.

   In der Tat kann $n(\gamma, z)$ offenbar als Riemann-Integral $\int_a^b g(t, z) \, dt$ mit einem stetigen $g : [a, b] \times (\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])) \to \mathbb{C}$ geschrieben werden, und ist aufgrund der Lokalkompaktheit von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ stetig in der Variable $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

   Mit Proposition 1.7.3 erkannt man, dass $n(\gamma, Z) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und infolge ein Intervall ist. Wegen des vorherigen Punktes muss $n(\gamma, Z)$ einpunktig sein.

   Insbesondere ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ konstant.

3. Für $\rho > 0$ mit $\gamma([a, b]) \subseteq K_\rho(0)$, gilt $\mathbb{C} \setminus K_\rho(0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Da $\mathbb{C} \setminus K_\rho(0)$ zusammenhängend ist, was sich etwa mit Hilfe von Lemma 1.7.9 nachweisen lässt, nimmt $n(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus K_\rho(0)$ dieselbe ganze Zahl p an. Da der Integrand in Definition 2.5.1 für $|z| \to +\infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, erhalten wir $\lim_{|z| \to +\infty} n(\gamma, z) = 0$, womit $p = 0$.

4. Für festes $w \in \mathbb{C}$ und in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ radial-homotope, geschlossene, stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ erhalten wir $n(\gamma_1, w) = n(\gamma_2, w)$ unmittelbar aus Satz 1.10.2 angewendet auf konstantes f.

5. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \to D$ ein in D null-homotoper, geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, so gilt wegen des vorherigen Punktes $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

6. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so sind alle geschlossenen Wege in D null-homotop in D. Wir erhalten aus dem vorherigen Punkt $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ und alle geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a, b] \to D$.

2.5.3 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und ist $\gamma : [a, b] \to D$ ein geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, so ist auch $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein derartiger Weg. Für $w \in \mathbb{C} \setminus f \circ \gamma([a, b])$, dh. $\gamma([a, b]) \cap f^{-1}\{w\} = \emptyset$, erhalten wir leicht aus (1.24)

$$n(f \circ \gamma, w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{\zeta - w} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w} \, d\xi \, .$$

$\Diamond$

2.5.4 Definition. Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt ein geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg γ *null-homolog* in D, falls $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus D$.
Ein Gebiet D heißt *homolog einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene, stetige und stückweise stetig differenzierbare Weg null-homolog in D ist. $\Diamond$

2.5.5 Bemerkung. Nach Fakta 2.5.2 ist jeder in D null-homotope, geschlossene, stetige und stückweise stetig differenzierbare Weg auch null-homolog.
Außerdem ist jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$ auch homolog einfach zusammenhängend. Wir werden später sehen, dass die Umkehrung auch gilt. $\Diamond$

2.5.6 Bemerkung. Ist γ in D null-homolog, und gilt $n(\gamma, w) \neq 0$ für ein $w \in D$, so gilt $n(\gamma, z) \neq 0$ auf der w enthaltenden Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Wegen der Null-Homologie von γ liegt diese Komponente ganz in D, und anschaulich "innerhalb" von γ. $\Diamond$

2.6 Homologieversion der Cauchyschen Integralformel

Folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung von Satz 1.11.1. Sie ist insofern angenehmer zu verwenden, da man nicht immer überprüfen muss, ob gewisse Wege radial-homotop zueinander sind.

2.6.1 Satz (*Homologieversion der Cauchyschen Integralformel*)**.** *Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to D, \ldots, \gamma_k : [a_k, b_k] \to D$ geschlossene, stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege mit $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Ist dann $f : D \to Y$ holomorph mit einem komplexen Banachraum Y, so gilt für alle $z \in D \setminus \bigcup_{j=1,\ldots,k} \gamma_j([a_j, b_j])$*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z) \right) f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \, \mathrm{d}\zeta \, ,$$

wobei die rechte Seite für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ Null ergibt.

Beweis. Die Funktion $\phi : D \times D \to Y$ definiert durch

$$\phi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{falls } z \neq w, \\ f'(z), & \text{falls } z = w, \end{cases}$$

ist offenbar auf $(D \times D) \setminus \{(\zeta, \zeta) : \zeta \in D\}$ stetig. Zudem ist für festes $w \in D$ die Funktion $D \setminus \{w\} \ni z \mapsto \phi(z, w) \in Y$ holomorph.
Zu beliebigem konvexen und offenen $G \subseteq D$ ist f eine Stammfunktion von f' auf G. Also folgt aus (1.30) für $z, w \in G$

$$f(z) - f(w) = \int_{\overrightarrow{wz}} f'(\omega)\, d\omega = (z - w) \int_0^1 f'(tz + (1 - t)w)\, dt\,,$$

und somit

$$\phi(z, w) = \int_0^1 f'(tz + (1 - t)w)\, dt\,. \tag{2.4}$$

Da der Integrand stetig von $(t, z, w) \in [0, 1] \times L \times L$ abhängt, wobei L eine beliebige kompakte Teilmenge von G ist, stellt sich $\phi : G \times G \to Y$ als stetig heraus. Insbesondere ist $\phi : D \times D \to Y$ auf einer hinreichend kleinen Umgebung einer jeden (ζ, ζ) mit $\zeta \in D$ stetig, weshalb ϕ auf ganz $D \times D$ stetig ist.
Zudem folgt aus Korollar 1.11.4, dass für festes $w \in D$ die Funktion $U_\delta(w) \ni z \mapsto \phi(z, w) \in Y$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ holomorph ist. Also ist $D \ni z \mapsto \phi(z, w) \in Y$ holomorph.
Als Konsequenz von Korollar 1.11.4 erhalten wir die Holomorphie von $g_1 : D \to Y$

$$g_1(z) := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \phi(z, \zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \gamma_j'(t)\, \phi(z, \gamma_j(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

Ebenfalls aus Korollar 1.11.4 folgt, dass auch $g_2 : \mathbb{C} \setminus K \to Y$ definiert durch

$$g_2(z) := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

eine holomorphe Funktion abgibt, wobei $K := \bigcup_{j=1,\dots,k} \gamma_j([a_j, b_j])$ kompakt ist. Wegen

$$\|g_2(z)\| \leq \frac{1}{d(z, K)} \cdot \max_{\zeta \in K} \|f(\zeta)\| \sum_{j=1}^k \ell(\gamma_j)$$

folgt $\lim_{|z|\to+\infty} g_2(z) = 0$, wobei $d(z, K) = \inf_{\zeta \in K} |\zeta - z|$. Die aus Satz 1.1.2 folgende Stetigkeit von $z \mapsto \sum_{j=1}^k n(\gamma_j, z)$ bedingt, dass

$$H := \{z \in \mathbb{C} \setminus K : \sum_{j=1}^k n(\gamma_j, z) \in U_{\frac{1}{2}}(0)\}$$

offen ist. Aus Fakta 2.5.2, 1, erkennen wir, dass in der Tat

$$H := \{z \in \mathbb{C} \setminus K : \sum_{j=1}^k n(\gamma_j, z) = 0\}\,.$$

Für $z \in D \cap H$ gilt

$$g_2(z) - g_1(z) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \left(2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z)\right) f(z) = 0\,,$$

womit durch $g := g_1 \cup g_2|_H : D \cup H \to Y$ eine holomorphe Funktion auf $D \cup H$ wohldefiniert ist. Voraussetzungsgemäß gilt $\mathbb{C} \setminus D \subseteq H$ und infolge $D \cup H = \mathbb{C}$. Zudem enthält H das Äußere eines hinreichend großen Kreises; vgl. Fakta 2.5.2, 3. Also folgt

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = \lim_{|z|\to+\infty} g_2|_H(z) = 0\,.$$

Der Satz von Liouville, Korollar 2.1.2, impliziert $g \equiv 0$, und daher

$$0 = g_1(z) = -\left(2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z)\right) f(z) + \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \quad \text{für alle} \quad z \in D \setminus K\,. \quad ❑$$

Wendet man Satz 2.6.1 für ein festes $w \in D \setminus \bigcup_{j=1,\dots,k} \gamma_j([a_j, b_j])$ an auf die Funktion $g(z) := (z - w)f(z)$, so folgt wegen $0 = \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, w)\right) g(w)$

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0\,, \tag{2.5}$$

falls $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

2.6.2 Korollar. *Ist das Gebiet D homolog einfach zusammenhängend und $f : D \to Y$ holomorph, so hat f eine bis auf eine additive komplexe Konstante eindeutige Stammfunktion $F : D \to Y$, dh. $F' = f$ auf D.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung des homolog einfachen Zusammenhanges von D folgt aus (2.5), dass

$$\int_{\gamma} \phi_f(x)\, dx = \int_{\gamma} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0\,,$$

für jeden geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in D. Wegen Satz 1.8.6 gibt es eine, bis auf eine additive komplexe Konstante eindeutige, holomorphe Stammfunktion $F : D \to Y$, dh. $F' = f$ auf D.

❑

2.6.3 Bemerkung. Wir hatten in Beispiel 1.10.3 gesehen, dass es für einfach zusammenhängende Gebiete D und nullstellenfreie Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion $G : D \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass $\exp \circ G = f$. Mit Korollar 2.6.2 stellen wir fest, dass es solche Funktionen auch für homolog einfach zusammenhängende D gibt. ◊

2.7 Residuensatz

2.7.1 Definition. Seien Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und die Funktion $f : D \setminus \{w\} \to Y$ holomorph. Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z - w)^n a_n$ die Laurentreihe um w im Bereich $U_{R_w}(w) \setminus \{w\}$, so heißt $\mathrm{Res}(f, w) := a_{-1}$ das *Residuum* von f an der Stelle w. ◊

Gemäß Satz 2.3.3 lässt sich das Residuum berechnen durch

$$\operatorname{Res}(f,w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho^w} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{2.6}$$

wobei $0 < \rho < R_w$ und $\gamma_\rho^w : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\rho^w(t) = w + \rho\exp(\mathrm{i}t)$.

2.7.2 Bemerkung. Verschwinden in (2.3) alle Koeffizienten $a_{-2}, a_{-3}, \ldots$, so berechnet man das Residuum durch

$$\operatorname{Res}(f,w) = \lim_{z\to w} \sum_{n=-1}^{+\infty} (z-w)^{n+1} a_n = \lim_{z\to w} (z-w) f(z)\,.$$

Gilt allgemeiner $a_{-N-1} = 0, a_{-N-2} = 0, \ldots$ für ein $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f,w) = \lim_{z\to w} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \sum_{n=-N}^{+\infty} (z-w)^{n+N} a_n = \lim_{z\to w} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (z-w)^N f(z)\,.$$

◊

2.7.3 Satz (*Residuensatz*)**.** *Seien Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $w_1, \ldots, w_n \in D$ und $f : D \setminus \{w_1, \ldots, w_n\} \to Y$ holomorph. Für geschlossene, stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma_k : [a_k, b_k] \to D \setminus \{w_1, \ldots, w_n\}$, $k = 1, \ldots, m$, die $\sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ erfüllen, gilt*

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_k} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w_j) \right) \operatorname{Res}(f, w_j)\,.$$

Beweis. Man wähle $r > 0$ so klein, dass die Kugeln $K_r(w_j)$, $j = 1, \ldots, n$, alle in D enthalten und paarweise disjunkt sind. Die Wege $\theta_j : [0,2\pi] \to D\setminus\{w_1, \ldots, w_n\}$ definiert durch

$$\theta_j(t) = w_j + r\exp(-\mathrm{i}t \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w_j))$$

erfüllen[1] $n(\theta_j, w_p) = -\delta_{jp} \cdot \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w_j)$ für $j, p = 1, \ldots, n$, weshalb

$$\sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z) + \sum_{j=1}^n n(\theta_j, z) = 0 \tag{2.7}$$

richtig für $z = w_1, \ldots, w_n$ ist. Wegen $0 = n(\theta_j, z) = \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus D$, $j = 1, \ldots, n$, gilt (2.7) in der Tat für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (D \setminus \{w_1, \ldots, w_n\})$. Also können wir (2.5) anwenden und erhalten

$$0 = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \sum_{j=1}^n \int_{\theta_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Mit Hilfe von (1.24) rechnet man leicht nach, dass $\int_{\theta_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\left(\sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w_j) \right) \cdot \int_{\gamma_r^{w_j}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, wobei $\gamma_r^{w_j} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r^{w_j}(t) = w_j + r\exp(\mathrm{i}t)$. Aus (2.6) erhalten wir schließlich

$$\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w_j) \int_{\gamma_r^{w_j}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n n(\gamma_k, w_j)\, 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f, w_j)\,. \quad \square$$

[1] δ_{jp} steht für das *Kronecker-Delta*, erfüllt also $\delta_{jj} = 0$ und $\delta_{jp} = 0$ für $j \neq p$.

Im Falle $m = 1$, also falls $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ ein geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg ist, für den $n(\gamma, z) = 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus D$ gilt, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, w_j) \cdot \operatorname{Res}(f, w_j)\,. \tag{2.8}$$

Man beachte folgende Tatsache. Ist $\gamma : [a, b] \to D\setminus\{w_1, \dots, w_n\}$ ein in D null-homotoper, geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, dann ist γ auch null-homolog in D; vgl. Bemerkung 2.5.5 .
Man beachte weiters, dass $n(\gamma, w_j) \neq 0$ in obiger Summe bedeutet, dass w_j “innerhalb” von γ liegt, und die ganze Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, in der w_j liegt, zu D gehört; vgl. Bemerkung 2.5.6.
Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich Integrale einiger Funktionen berechnen, zu denen man keine explizite Stammfunktion findet.

2.7.4 Beispiel. Für $a > 0$ und $\alpha > 0$ sind wir an

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a^2 + x^2}\, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x)}{a^2 + x^2}\, dx$$

interessiert. Dazu betrachten wir die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{-ia, ia\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{\exp(i\alpha z)}{a^2+z^2}$ und für $r > 0$ die Strecke $\overrightarrow{(-r)r}$ in $\mathbb{C}$ sowie den Weg $\theta : [-\pi, 0] \to \mathbb{C}$, $\theta(t) = r \exp(i(\pi + t))$. Für $\gamma := \theta \oplus \overrightarrow{(-r)r}$ gilt

$$n(\gamma, -ia) = 0, \quad n(\gamma, ia) = 1\,,$$

wie man etwa mit Hilfe von Satz 1.10.2 und Satz 1.11.1 erkennt. Somit ergibt (2.8)

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i\ \operatorname{Res}(f, ia)\,.$$

Aus Bemerkung 2.7.2 erkennen wir

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z\to ia} (z - ia) \frac{\exp(i\alpha z)}{a^2 + z^2} = \lim_{z\to ia} \frac{\exp(i\alpha z)}{z + ia} = \frac{\exp(-\alpha a)}{2ia}\,.$$

Da für $t \in [0, \pi]$ und $r > a$ die Ungleichung $|a^2 + r^2 \exp(2it)| = |r \exp(it) - ia| \cdot |r \exp(it) + ia| \geq (r - a) \cdot r$ gilt, folgt

$$\left|\int_\theta f(\zeta)\, d\zeta\right| \leq r\pi \sup_{t\in[0,\pi]} |f(r \exp(it))| \leq r\pi \frac{1}{(r - a) \cdot r} \sup_{t\in[0,\pi]} \exp(\operatorname{Re} i\alpha r \exp(it)) = \frac{\pi}{r - a}\,,$$

und daher $\lim_{r\to+\infty} \int_\theta f(\zeta)\, d\zeta = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x)}{a^2 + x^2}\, dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)\, dx \\ &= \lim_{r\to+\infty} \Big(\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta - \int_\theta f(\zeta)\, d\zeta \Big) = 2\pi i\, \frac{\exp(-\alpha a)}{2ia}\,.\end{aligned}$$

Somit ist das zu berechnende Integral $\frac{\pi}{\exp(\alpha a) a}$. ◊

2.8 Logarithmisches Residuum

Wir wollen den Residuensatz auf eine ganz spezielle Situation anwenden. Dazu sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ meromorph derart, dass $f|_{G\setminus P(f)}$ für keine Zusammenhangskomponente G von D identisch verschwindet. In Bemerkung 2.4.6 haben wir gesehen, dass $N \cup P$ eine diskrete Teilmenge von D abgibt.
Für $w \in N \cup P$, also $\beta(w) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt es also ein $r > 0$ derart, dass $U_r(w) \subseteq D$ und $U_r(w) \cap (N \cup P) = \{w\}$. Ist $f(z) = \sum_{n=-\beta(w)}^{\infty} a_n(z-w)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f auf $U_r(w) \setminus \{w\}$, so gilt $a_{-\beta(w)} \neq 0$ und (bezüglich der Vertauschung von $\sum$ und Ableitung siehe Lemma 1.12.1)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\sum_{n=-\beta(w)}^{\infty} na_n(z-w)^{n-1}}{\sum_{n=-\beta(w)}^{\infty} a_n(z-w)^n} = \frac{1}{z-w} \frac{\sum_{n=-\beta(w)}^{\infty} na_n(z-w)^{n+\beta(w)}}{\sum_{n=-\beta(w)}^{\infty} a_n(z-w)^{n+\beta(w)}}, \quad z \in U_r(w) \setminus \{w\},$$

wobei die Funktion im Nenner des rechtesten Bruches nirgends auf $U_r(w)$ verschwindet. Also ist der rechteste Bruch holomorph auf $U_r(w)$ und nimmt bei w den Wert $-\beta(w)$ an. Folglich gilt $\beta_{\frac{f'}{f}} = 1$ und $\mathrm{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, w) = -\beta(w)$.

2.8.1 Satz (*Satz vom Logarithmischen Residuum*)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ meromorph so, dass $f|_{G\setminus P(f)}$ für keine Zusammenhangskomponente G von D identisch verschwindet. Wir bezeichnen mit N die Menge aller Nullstellen von f auf D und mit P die Menge aller Polstellen von f auf D. Ist $\gamma : [c, d] \to D$ ein geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher in D null-homolog ist und $\gamma([c, d]) \cap (N \cup P) = \emptyset$ erfüllt, dann gilt*

$$n(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{w\in N} n(\gamma, w) \cdot \alpha(w) - \sum_{w\in P} n(\gamma, w) \cdot \beta(w)\,,$$

wobei $\alpha(w) = -\beta(w)$ die Nullstellenvielfachheit von $f(z)$ bei w und $\beta(w)$ die Polordnung von $f(z)$ bei w ist. In obiger Summe sind nur endlich viele Summanden ungleich Null.

Beweis. Für die erste Gleichheit siehe Beispiel 2.5.3. Weiters gilt $d(\gamma([c, d]), D^c) \in (0, +\infty]$; $d(\gamma([c, d]), D^c) = +\infty$ bedeutet $D = \mathbb{C}$. Setzen wir $M := 1 + \max_{t\in[c,d]} |\gamma(t)|$ und nehmen ein $\delta \in (0, +\infty)$ mit $3\delta < d(\gamma([c, d]), D^c)$, so ist

$$G := \{z \in \mathbb{C} : d(z, D^c) > \delta\} \cap U_M(0)$$

eine offene Teilmenge von D, welche in der kompakten Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : d(z, D^c) \geq \delta\} \cap K_M(0)$ von D enthalten ist. Also ist $G \cap (N \cup P)$ endlich. Weiters enthält G das Bild von γ.
γ ist nicht nur null-homolog in D, sondern auch als Abbildung nach G. Ist nämlich $z \in D \setminus G$, so gilt $|z| \geq M$ oder $d(z, D^c) \leq \delta$. Im ersten Fall liegt der unbeschränkte und zusammenhängende Halbstrahl $[1, +\infty) \cdot z$ in $\mathbb{C} \setminus \gamma([c, d])$. Nach Fakta 2.5.2, gilt $n(\gamma, z) = 0$. Im zweiten Fall gibt es ein $w \in D^c$ mit $|z - w| < 2\delta$, womit für jeden Punkt ζ der Verbindungsstrecke von z und w die Ungleichung $d(\zeta, G^c) < 2\delta$ gilt. Also liegt diese Verbindungsstrecke in $\mathbb{C} \setminus \gamma([c, d])$. Nach Fakta 2.5.2 gilt $n(\gamma, z) = n(\gamma, w) = 0$.
Der Residuensatz in der einfachen Form (2.8), angewandt auf die Menge G ergibt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = - \sum_{w\in(P\cup N)\cap G} n(\gamma, w) \cdot \beta(w)\,.$$

Wegen $n(\gamma, w) = 0$ für $w \in (N \cup P) \setminus G \subseteq D \setminus G$ folgt die Behauptung.

❑

Man beachte, dass die erste Gleichheit in Satz 2.8.1 auch gilt, wenn $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph ist, und γ ein geschlossener Weg in D derart ist, dass in $\gamma([c, d])$ keine Nullstellen von f zu liegen kommen.

2.8.2 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiters sei $w \in D$ und f auf der w enthaltenden Zusammenhangskomponente von D nicht konstant. Für $a := f(w)$ sei $\alpha_{f-a}(w)$ die Nullstellenvielfachheit von $f(z) - a$ bei w. Dann existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $w \in U \subseteq D$ und $a \in V$ derart, dass es für alle $b \in V \setminus \{a\}$ genau $\alpha_{f-a}(w)$ viele Nullstellen von $z \mapsto f(z) - b$ in U gibt ($\Leftrightarrow \# (f^{-1}\{b\} \cap U) = \alpha_{f-a}(w)$), deren Vielfachheit je eins ist.*

Beweis. Da die Nullstellen von $f(z) - a$ und von $f'(z)$ in der w enthaltenden Zusammenhangskomponente von D keinen Häufungspunkt haben, gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(w) \subseteq D$ derart, dass diese Funktionen auf $K_r(w) \setminus \{w\}$ nicht verschwinden. Bekannterweise gilt für $\gamma := \gamma_r^w$

$$n(\gamma, z) = 1,\ z \in U_r(w) \ \text{ und } \ n(\gamma, z) = 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus K_r(w)\ .$$

Insbesondere ist γ in D null-homolog und wir haben $a \notin f(\gamma([0, 2\pi]))$. Für jedes $b \notin f \circ \gamma([0, 2\pi])$ gilt nach Satz 2.8.1 (angewendet auf die w enthaltende Zusammenhangskomponente G von D und $G \ni z \mapsto f(z) - b$)

$$n(f \circ \gamma, b) = n((f \circ \gamma) - b, 0) = n((f - b) \circ \gamma, 0) = \sum_{\eta \in N(f-b) \cap G} n(\gamma, \eta) \cdot \alpha_{f-b}(\eta) = \sum_{\eta \in N(f-b) \cap U_r(w)} \alpha_{f-b}(\eta)\,,$$

wobei $\alpha_{f-b}(\eta)$ die Nullstellenvielfachheit von $z \mapsto f(z) - b$ bei $\eta \in N(f - b) = f^{-1}\{b\}$ ist. Nach Fakta 2.5.2 stimmt $b \mapsto n(f \circ \gamma, b)$ auf der a enthaltenden Zusammenhangskomponente V von $\mathbb{C} \setminus f \circ \gamma([0, 2\pi])$ mit $n(f \circ \gamma, a)$ überein. Nach unserer Wahl von r gilt $N(f - a) \cap U_r(w) = \{w\}$ und somit

$$n(f \circ \gamma, a) = \sum_{\eta \in N(f-a) \cap U_r(w)} \alpha_{f-a}(\eta) = \alpha_{f-a}(w)\ .$$

Da für jedes $b \in V \setminus \{a\}$ und alle Nullstellen $\eta \in N(f - b) \cap U_r(w)$ von $f(z) - b$ wegen $(f - b)'(\eta) = f'(\eta) \neq 0$ Vielfachheit eins haben, folgt für $U := U_r(w)$

$$\alpha_{f-a} = \sum_{\eta \in N(f-b) \cap U_r(w)} \alpha_{f-b}(\eta) = \# \left(N(f - b) \cap U\right)\ .$$

❑

2.8.3 Korollar. *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von D, so ist auch $f(D)$ offen in $\mathbb{C}$.*
Ist f holomorph und injektiv – man spricht von konformen *Abbildungen –, so verschwindet $f'(z)$ nirgends auf D und die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(D) \to D \subseteq \mathbb{C}$ ist auch holomorph.*

Beweis. Für $w \in D$ ist $z \mapsto f(z) - f(w)$ nach dem Identitätssatz auf keiner Umgebung von w konstant und hat in w eine Nullstelle der Vielfachheit $\alpha > 0$. Wegen Lemma 2.8.2 gibt es offene Umgebungen U von w und V von $f(w)$ so, dass $z \mapsto f(z) - b$ in U für jedes $b \in V \setminus \{f(w)\}$ genau α viele einfache Nullstellen hat. Insbesondere gilt $V \subseteq f(D)$. Also ist $f(D)$ offen.

Für injektives f muss für jedes $w \in D$ dieses α eins sein, da sonst für $b \in V \setminus \{f(w)\}$ die Funktion $z \mapsto f(z) - b$ in U mindestens zwei Nullstellen hätte, was der Injektivität widerspricht. Also gilt $f'(w) \neq 0$.
Schließlich rechnet man für $a = f(w) \in f(D)$ leicht nach, dass $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(w)} \in \mathbb{C}$, womit f^{-1} holomorph ist.

❑

Für holomorphe Abbildungen, deren Ableitung nirgends verschwindet folgt die Aussage dieses Korollars auch aus dem Umkehrsatz aus der Analysis, da für holomorphes f immer $\det df(z) = |f'(z)|^2$.
In der Tat ist im Falle $\alpha = 1$, dh. $f'(w) \neq 0$, Lemma 2.8.2 ein spezielle Version des Umkehrsatzes.

2.8.4 Satz (*Satz von Rouché*)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $h, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiters sei $\gamma : [c, d] \to D$ ein geschlossener, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher in D null-homolog ist und*[2]

$$|h(z) - g(z)| < |h(z)| + |g(z)| \text{ für alle } z \in \gamma([c, d]) \tag{2.9}$$

zutrifft. Bezeichnet $N(h)$ ($N(g)$) die Nullstellenmenge von h (g), so gilt $N(h) \cap \gamma([c, d]) = \emptyset = N(g) \cap \gamma([c, d])$, und

$$\sum_{w \in N(h)} n(\gamma, w) \cdot \alpha_h(w) = \sum_{w \in N(g)} n(\gamma, w) \cdot \alpha_g(w) ,$$

wobei $\alpha_h(w)$ ($\alpha_g(w)$) die Vielfachheit der Nullstelle w von h (g) bezeichnet.

Beweis. Aus (2.9) folgt zunächst, dass Nullstellen weder von h noch von g auf $\gamma([c, d])$ liegen. Insbesondere sind die Funktionen nicht identisch gleich Null. Für $s \in (0, 1)$ und $z \in D$ folgt aus $sh(z) + (1 - s)g(z) = 0$

$$|h(z) - g(z)| = (1 + \frac{s}{1 - s})|h(z)| = |h(z)| + |g(z)| ,$$

wodurch $z \notin \gamma([c, d])$. Also hat für kein $s \in [0, 1]$ die Funktion $z \mapsto sh(z) + (1 - s)g(z)$ Nullstellen auf $\gamma([c, d])$. Betrachtet man $\Gamma(t, s) := sh \circ \gamma(t) + (1 - s)g \circ \gamma(t)$, so erkennt man, dass die geschlossenen Wege $h \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ radial-homotop sind, woraus wegen Fakta 2.5.2 $n(h \circ \gamma, 0) = n(g \circ \gamma, 0)$ folgt. Nach Satz 2.8.1 erhalten wir die gewünschte Gleichheit.

❑

2.8.5 Satz (*Satz von Hurwitz*)**.** *Sei $b \in \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktionen auf D, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Sind $r > 0$ und $\eta \in D$ derart, dass $K_r(\eta) \subseteq D$ und dass die Menge $N(f - b) = f^{-1}\{b\}$ aller b-Stellen von f mit $\partial U_r(\eta)$ leeren Schnitt hat, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\partial U_r(\eta) \cap N(f_n - b) = \emptyset$ und*

$$\sum_{w \in N(f-b) \cap U_r(\eta)} \alpha_{f-b}(w) = \sum_{w \in N(f_n-b) \cap U_r(\eta)} \alpha_{f_n-b}(w)$$

für alle $n \geq m$, wobei $\alpha_{f-b}(w)$ ($\alpha_{f_n-b}(w)$) Nullstellenvielfachheit von $z \mapsto f(z) - b$ ($z \mapsto f_n(z) - b$) bei w ist.

[2]Diese Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $|h(z) - g(z)| < |h(z)|$ für alle $z \in \gamma([c, d])$.

Beweis. Da f_n insbesondere auf der kompakten Teilmenge $\partial U_r(\eta)$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es wegen $\min_{z\in\partial U_r(\eta)} |f(z) - b| > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n|_{\partial U_r(\eta)} - f|_{\partial U_r(\eta)}\|_\infty < \min_{z\in\partial U_r(\eta)} |f(z) - b| \,,$$

für alle $n \geq m$.
Wenden wir Satz 2.8.4 auf $h = f-b$, $g = f_n-b$, das Gebiet $U_\rho(\eta)$ mit $K_r(\eta) \subseteq U_\rho(\eta) \subseteq D$ und den Weg $\gamma = \gamma_r^\eta$ an, so erhalten wir wegen $n(\gamma, w) = 1$ für $w \in U_r(\eta)$ sowie $n(\gamma, w) = 0$ für $w \notin K_r(\eta)$

$$\sum_{w\in N(f-b)\cap U_r(\eta)} \alpha_f(w) = \sum_{w\in N(f_n-b)\cap U_r(\eta)} \alpha_{f_n}(w)$$

für alle $n \geq m$. Zudem haben $f - b$ und $f_n - b$ auf dem Bild $\partial U_r(\eta)$ von γ keine Nullstellen.

❑

2.8.6 Korollar. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktionen auf D, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Wir setzen auch voraus, dass f nicht konstant ist. Dann gilt*

$$f(D) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} f_n(D)\,.$$

Beweis. Sei $b = f(\eta)$ für ein $\eta \in D$. Da die Nullstellenmenge der nicht konstanten Funktion $f - b$ nach dem Identitätssatz, Satz 2.2.2, in D keinen Häufungspunkt hat, gilt $K_r(\eta) \cap N(f - b) = \{\eta\}$ und $K_r(\eta) \subseteq D$ für ein hinreichend kleines $r > 0$. Nach Satz 2.8.5 gilt für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$

$$0 < \alpha_f(\eta) = \sum_{w\in N(f_n-b)\cap U_r(\eta)} \alpha_{f_n}(w)$$

für alle $n \geq m$. Insbesondere gilt $N(f_n-b) \neq \emptyset$ für $n \geq m$, was aber $b \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} f_n(D)$ bedeutet.

❑

2.8.7 Korollar. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktionen auf D, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Sind die f_n injektiv und zwar für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, und ist f nicht konstant, dann ist auch f injektiv.*

Beweis. Wäre $f(z) = f(w)$ für $z, w \in D$ mit $z \neq w$, so wähle disjunkte Gebiete $D_z, D_w \subseteq D$ mit $z \in D_z$ und $w \in D_w$. Nach Korollar 2.8.6 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = f(w) \in \bigcap_{n\geq m} f_n(D_z) \cap \bigcap_{n\geq m} f_n(D_w)$. Für alle $n \geq m$ könnte dann wegen $f_n(D_z) \cap f_n(D_w) \neq \emptyset$ die Funktion f_n nicht injektiv sein.

❑

2.9 Maximumsprinzip

Man überzeugt sich unschwer von der Tatsache, dass die Abbildungen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ und die Abbildung $z \mapsto |z|$ von $\mathbb{C}$ nach $[0, +\infty)$ offene Teilmengen

auf offene Teilmengen abbilden. Man beachte dabei, dass etwa die Menge $[0, \epsilon)$ in $[0, +\infty)$ offen ist.
Da für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ein holomorphes und nicht konstantes $f : G \to \mathbb{C}$ wegen Korollar 2.8.3 offene Teilmengen auf offene Mengen abbildet, und da offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. von $[0, +\infty)$ kein Maximum haben, folgt unmittelbar

2.9.1 Lemma. *Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls $|f(w)| \geq |f(z)|$ für ein $w \in G$ und allen $z \in G$ oder* $\operatorname{Re} f(w) \geq \operatorname{Re} f(z)$ *für ein $w \in G$ und allen $z \in G$ oder* $\operatorname{Im} f(w) \geq \operatorname{Im} f(z)$ *für ein $w \in G$ und allen $z \in G$, so muss f konstant sein.*

2.9.2 Satz (*Maximumsprinzip*)**.** *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, so bezeichne man mit $\partial_\infty D$ den Rand von D als Teilmenge von $\mathbb{C}_\infty$*[3]*. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt*

$$\sup_{u \in D} |f(u)| = \sup_{\zeta \in \partial_\infty D} \limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} |f(z)| . \tag{2.10}$$

Falls zusätzlich $|f|$ auf $\overline{D}^{\mathbb{C}_\infty}$ stetig fortsetzbar ist, so gilt

$$\sup_{u \in D} |f(u)| = \sup_{\zeta \in \partial_\infty D} |f(\zeta)| ,$$

wobei $\zeta \mapsto |f(\zeta)|$ die stetige Fortsetzung bezeichnet.

Hier steht $\limsup\limits_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} |f(z)| \in [0, +\infty]$ für

$$\lim_{r \searrow 0} \sup_{z \in D \cap U_r(\zeta)} |f(z)| ,$$

wenn $\zeta \in \partial D$ und für

$$\lim_{R \nearrow +\infty} \sup_{z \in D,\ |z| > R} |f(z)| ,$$

wenn $\zeta = \infty \in \partial_\infty D$. Einheitlich gilt für alle $\zeta \in \partial_\infty D$

$$\limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} |f(z)| = \lim_{r \searrow 0} \sup_{z \in D \cap U_r^\chi(\zeta)} |f(z)| , \tag{2.11}$$

wobei χ die *chordale* Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ ist.

Beweis. (Satz 2.9.2) Klarerweise ist die linke Seite von (2.10) größer oder gleich der rechten. Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus D mit $\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = \sup_{u \in D} |f(u)|$, so konvergiert wegen der Kompaktheit von $\overline{D}^{\mathbb{C}_\infty}$ in $\mathbb{C}_\infty$ eine Teilfolge gegen ein $w \in \overline{D}^{\mathbb{C}_\infty}$. Offenbar können wir $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die konvergente Teilfolge ersetzen, sodass $\lim_{n \to \infty} z_n \to w$.
Im Fall $w \in D$ gilt $|f(w)| = \sup_{u \in D} |f(u)|$. Aus Lemma 2.9.1 folgt, dass f auf der Zusammenhangskomponente G von D mit $w \in G$ konstant gleich $f(w)$ ist, was $|f(w)| = \limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} |f(z)|$ für $\zeta \in \partial_\infty G$ bedingt. Wegen $\partial_\infty G \subseteq \partial_\infty D$ (anderenfalls wäre wegen $\partial_\infty G \subseteq \overline{D}^{\mathbb{C}_\infty}$ die Menge G nämlich keine maximale zusammenhängende Teilmenge von D; vgl. Korollar 1.7.6), gilt $\leq$ in (2.10).
Im Fall $w \in \partial_\infty D$ haben wir

$$\sup_{u \in D} |f(u)| = \limsup_{n \to \infty} |f(z_n)| \leq \limsup_{\substack{z \to w \\ z \in D}} |f(z)| ,$$

[3] Also gilt $\partial_\infty D = \partial D$ für beschränktes D und $\partial_\infty D = \partial D \cup \{\infty\}$ für unbeschränktes D.

womit auch $\leq$ in (2.10) zutrifft.

❑

2.9.3 Korollar (*Lemma von Schwarz*)**.** *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$. Im Fall $f(0) = 0$ haben wir die Ungleichungen $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$, und $|f'(0)| \leq 1$. Falls obendrein $|f'(0)| = 1$ oder falls obendrein $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so folgt schon $f(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$, für ein $c \in \mathbb{T}$.*

Beweis. Die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{z} f(z), \; z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} ,$$

hat bei 0 eine hebbare Singularität, lässt sich also auf ganz $\mathbb{D}$ holomorph fortsetzen. Da für $|z| = 1$ der Ausdruck $\frac{1}{z}$ Betrag eins hat, und da $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig ist, folgt

$$\limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \mathbb{D}}} |g(z)| \leq 1 \quad \text{für alle} \quad \zeta \in \mathbb{T} .$$

Aus Satz 2.9.2 ergibt sich $|g(z)| \leq 1$, also $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Wegen $f'(0) = \lim_{z \to 0} g(z)$ erhalten wir auch $|f'(0)| \leq 1$.
Aus $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder aus $|f'(0)| = 1$ folgt $|g(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{D}$. Mit Lemma 2.9.1 erhalten wir $g \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = |g(z)| = 1$.

❑

2.10 Automorphismen

2.10.1 Definition. Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet $\mathrm{Aut}(D)$ die Menge aller holomorphen Bijektionen von D auf sich. ◊

2.10.2 Satz. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{z \mapsto c \cdot \frac{w-z}{1-\bar{w}\, z} : c \in \mathbb{T}, \; w \in \mathbb{D}\}$.

Beweis. Für $|w| < 1$ erfüllt die offenbar holomorphe Funktion $b_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}\, z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{w}}\}$ für $\zeta \in \mathbb{T}$ wegen $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$

$$|b_w(\zeta)| = \left| \frac{w - \zeta}{1 - \bar{w}\, \zeta} \right| \, | - \bar{\zeta}| = \left| \frac{1 - w\bar{\zeta}}{1 - \bar{w}\, \zeta} \right| = 1 \; .$$

Nach Satz 2.9.2 folgt $b_w(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Wegen

$$b_w \circ b_w(z) = \frac{w - \frac{w-z}{1-\bar{w}\, z}}{1 - \bar{w} \, \frac{w-z}{1-\bar{w}\, z}} = \frac{(1 - \bar{w}\, z)w - (w - z)}{(1 - \bar{w}\, z) - \bar{w}(w - z)} = \frac{z - \bar{w}w\, z}{1 - \bar{w}w} = z \, ,$$

ist $b_w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bijektiv mit der Inversen b_w. Also gilt $b_w \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.
Umgekehrt gibt es zu $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ wegen der Bijektivität ein $w \in \mathbb{D}$ mit $f(w) = 0$. Infolge gilt für $g := f \circ b_w$ die Beziehung $g(0) = f(w) = 0$. Wegen $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ erhalten wir aus dem Schwarzschen Lemma, Korollar 2.9.3, $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Da auch $g^{-1} = b_w \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, gilt entsprechend $|g^{-1}(w)| \leq |w|$ für alle $w \in \mathbb{D}$. Mit $w = g(z)$ folgt $|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \leq |z|$, weshalb $g = c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ für ein $c \in \mathbb{T}$ gemäß der zweiten Aussage von Korollar 2.9.3, und schließlich $f = g \circ b_w = c \cdot b_w$.

❑

2.10.3 Satz. *Bezeichnet* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *die Menge aller holomorphen Bijektionen von* $\mathbb{C}$ *auf* $\mathbb{C}$, *so gilt*

$$\{(z \mapsto az+b) : a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f \in H(\mathbb{C}) : f \text{ ist injektiv }\}\,.$$

Beweis. Offenbar haben wir

$$\{(z \mapsto az+b) : a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \subseteq \{f \in H(\mathbb{C}) : f \text{ ist injektiv }\}\,.$$

Für die Umkehrung sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv, und definiere $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = f(\frac{1}{z})$.
Aus der Injektivität folgt $g(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap g(\mathbb{C} \setminus K_1(0)) = \emptyset$. Da g offene Mengen auf offene Mengen abbildet, ist dabei $g(\mathbb{C} \setminus K_1(0))$ offen. Somit ist $g(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß, Satz 2.3.8, ist 0 keine Wesentliche Singularität von g, womit $z^n g(z) \to 0$ für $z \to 0$ und somit $\frac{1}{z^n} f(z) \to 0$ für $z \to \infty$ mit einem $n \in \mathbb{N}$.
Nach Proposition 2.1.1 ist $f(z)$ ein Polynom. Da Polynome vom Grad ≥ 2 mehr als eine Nullstelle haben, oder eine Nullstelle mit Vielfachheit ≥ 2 haben, können diese nicht injektiv sein; vgl. Korollar 2.8.3. Also folgt $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

❑

Im Folgenden bezeichne $M(\mathbb{C}_\infty)$ die Menge aller $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ so, dass $f|_{\mathbb{C}} \in M(\mathbb{C})$ und $(z \mapsto f(\frac{1}{z})) \in M(\mathbb{C})$.

2.10.4 Korollar. *Die Menge* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ *aller bijektiven* $f \in M(\mathbb{C}_\infty)$ *erfüllt*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty) = \{\underbrace{(z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta})}_{=:\phi_M} : M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{C})\}\,.$$

Beweis. $f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ holomorph und hat im Fall $-\frac{\delta}{\gamma} \neq \infty$ bei diesem Punkt eine Polstelle erster Ordnung, womit alle Möbius Transformationen f meromorph auf $\mathbb{C}$ sind. Da auch $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ eine Möbius Transformation abgibt, gilt sogar $f \in M(\mathbb{C}_\infty)$.
Sei umgekehrt $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$. Im Falle $f(\infty) = \infty$ liegt $f|_{\mathbb{C}}$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und ist daher eine Möbius Transformation von der Form $z \mapsto az + b = \frac{az+b}{0z+1}$.
Im Fall $f(\infty) \neq \infty$ wählen wir $M \in SL(2,\mathbb{C})$ derart, dass $\phi_M(f(\infty)) = \infty$, etwa $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -f(\infty) \end{smallmatrix}\right)$. Da $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ bezüglicher der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet (warum??) gilt $\phi_M \circ f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, wobei $\phi_M \circ f(\infty) = \infty$. Nach dem behandelten Spezialfall gilt $\phi_M \circ f = \phi_N$ und schließlich $f = \phi_M^{-1} \circ \phi_N = \phi_{M^{-1}N}$ für ein $N \in SL(2,\mathbb{C})$.

❑

Kapitel 3

Lokal gleichmäßige Konvergenz

3.1 Der metrische Raum $C(G, \mathbb{R}^p)$

Wir kennen aus der Analysis zwei Konvergenzbegriffe für Folgen von Funktionen, die punktweise- bzw. die gleichmäßige Konvergenz. Manche schon gebrachte Resultate lassen erahnen, dass im Kontext analytischer Funktionen ersterer zu schwach und zweiterer zu stark ist. Man kann eine Folge $f_n \in H(\mathbb{C})$ konstruieren, die auf $\mathbb{C}$ punktweise gegen die nicht einmal stetige Funktion

$$f(z) := \begin{cases} 1\,, & z = 0, \\ 0\,, & z \neq 0, \end{cases}$$

konvergiert. Aus Lemma 1.12.1 wissen wir aber, dass bei lokal gleichmäßiger Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen sich die Holomorphie auf die Grenzfunktion überträgt. Wir wollen zunächst studieren, welche Topologie hinter der lokal gleichmäßigen Konvergenz steckt.
Dazu sei daran erinnert, dass für einen kompakten Topologischen Raum K der Vektorraum $C(K, \mathbb{R}^p)$ aller stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ versehen mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$$

einen Banachraum über $\mathbb{R}$ bildet, wobei $\|.\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^p$ ist; zB. $\|.\| = \|.\|_2$ oder $\|.\| = \|.\|_\infty$. Nimmt man auf $\mathbb{R}^p$ eine andere und daher äquivalente Norm, so sind auch die entsprechenden $\|.\|_\infty$-Normen äquivalent. Konvergenz einer Funktionenfolge in diesem Banachraum bedeutet nichts anderes, als die gleichmäßige Konvergenz dieser Funktionenfolge.

3.1.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir bezeichnen mit $C(G, \mathbb{R}^p)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen von G nach $\mathbb{R}^p$. Für ein kompaktes $K \subseteq G$ sei $\tau_K : C(G, \mathbb{R}^p) \to C(K, \mathbb{R}^p)$ die Einschränkungsabbildung $\tau_K(f) = f|_K$.
Wir versehen $C(G, \mathbb{R}^p)$ mit der gröbsten Topologie (Initiale Topologie) $\mathcal{T}$ derart, dass alle Einschränkungsabbildungen τ_K mit $K \subseteq G$ kompakt stetig sind. ◊

Wie aus der Funktionalanalysis bekannt, ist $(C(G, \mathbb{R}^p), \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Bekannterweise konvergiert dann ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ aus $C(G, \mathbb{R}^p)$ genau dann gegen ein $f \in C(G, \mathbb{R}^p)$, wenn $(f_i|_K)_{i \in I}$ auf K gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert und zwar für alle

kompakten $K \subseteq G$. Also ist $\mathcal{T}$ offenbar die richtige Topologie zum Studium der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

3.1.2 Lemma (*). *Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen aus $C(G,\mathbb{R}^p)$ konvergiert genau dann lokal gleichmäßig gegen $f \in C(G,\mathbb{R}^p)$, wenn es zu jedem $w \in G$ eine Umgebung $U(w) \subseteq G$ von w derart gibt, dass $(f_i|_{U(w)})_{i\in I}$ gleichmäßig gegen $f|_{U(w)}$ konvergiert.*

Beweis. Konvergiert $(f_i)_{i\in I}$ gegen f lokal gleichmäßig und ist $w \in G$, dann hat w eine kompakte Umgebung $U(w) \subseteq D$. Also konvergiert $(f_i|_{U(w)})_{i\in I}$ gleichmäßig gegen $f|_{U(w)}$. Für die Umkehrung sei $K \subseteq G$ kompakt. Zu jedem $w \in K$ wähle man eine offene Umgebung $V(w)$ von w mit $V(w) \subseteq U(w)$, wobei $U(w)$ wie in der Behauptung ist. Wegen der Kompaktheit folgt $K \subseteq V(w_1) \cup \cdots \cup V(w_m) \subseteq U(w_1) \cup \cdots \cup U(w_m)$, wodurch

$$\|f_i|_K - f|_K\|_\infty \leq \max_{k=1,\dots,m} \|f_i|_{U(w_k)} - f|_{U(w_k)}\|_\infty \xrightarrow{i\in I} 0 \,.$$

❑

3.1.3 Lemma. *Zu einem offenen $G \subseteq \mathbb{C}$ existiert eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten und eine Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von G mit*

(*i*) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$.

(*ii*) $G_n \subseteq K_n \subseteq G_{n+1} \subseteq K_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir setzen

$$K_n := K_n(0) \setminus U_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x,G^c) \geq \frac{1}{n}, |x| \leq n\} \text{ und}$$

$$G_n := U_n(0) \setminus K_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x,G^c) > \frac{1}{n}, |x| < n\} \,.$$

Dabei sei erinnert, dass $d(x,G^c) = \inf\{d(x,y) : y \in G^c\}$ wenn $G^c \neq \emptyset$ und $d(x,G^c) = +\infty$ und somit $U_{\frac{1}{n}}(G^c) = K_{\frac{1}{n}}(G^c) = \emptyset$, wenn $G^c = \emptyset$. Da $d(x,G^c) > 0$ sicherlich $x \in G$ nach sich zieht, gilt

$$G_n \subseteq K_n \subseteq G_{n+1} \subseteq K_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq G \,.$$

Zudem ist K_n abgeschlossen und G_n offen in $\mathbb{R}^p$. Beide sind auch beschränkt. Insbesondere ist K_n kompakt. Schließlich gilt wegen der Abgeschlossenheit von G^c, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$

❑

3.1.4 Proposition. *Die Topologie $\mathcal{T}$ auf $C(G,\mathbb{R}^p)$ stimmt mit der gröbsten Topologie überein, sodass alle Abbildungen $\tau_{K_n} : C(G,\mathbb{R}^p) \to C(K_n,\mathbb{R}^p)$, $n \in \mathbb{N}$ stetig sind, wobei die K_n, $n \in \mathbb{N}$, wie in Lemma 3.1.3 sind. Insbesondere sind für ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus $C(G,\mathbb{R}^p)$ und $f \in C(G,\mathbb{R}^p)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\lim_{i\in I} f_i = f$ *bzgl.* $\mathcal{T}$.

(2) $\lim_{i\in I} f_i|_K = f|_K$ *in* $C(K,\mathbb{R}^p)$ *bzgl.* $\|.\|_\infty$ *für alle kompakten* $K \subseteq G$.

(3) $\lim_{i\in I} f_i|_{K_n} = f|_{K_n}$ *in* $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ *bzgl.* $\|.\|_\infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die gröbste Topologie $\mathcal{O}$ so, dass alle Abbildungen $\tau_{K_n} : C(G,\mathbb{R}^p) \to C(K_n,\mathbb{R}^p)$, $n \in \mathbb{N}$, stetig sind, erfüllt offenbar $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. Ist andererseits $K \subseteq G$ kompakt, so gibt es wegen $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq G_n \subseteq K_n$. Wegen $\tau_K(f) = \tau_{K_n}(f)|_K$ und weil $g \mapsto g|_K$ von $C(K_n,\mathbb{R}^p) \to C(K,\mathbb{R}^p)$ beschränkt (mit Abbildungsnorm eins) und somit stetig ist, ist $\tau_K : C(G,\mathbb{R}^p) \to C(K,\mathbb{R}^p)$ auch stetig, wenn man $C(G,\mathbb{R}^p)$ mit $\mathcal{O}$ versieht. Folglich gilt auch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$.
Die Äquivalenzen folgen aus der entsprechenden Eigenschaft initialer Topologien.

❑

3.1.5 Bemerkung. Wir benötigen noch eine Kleinigkeit aus der Analysis. Ist $(\xi_i)_{i\in I}$ ein Netz aus $[0,+\infty)^{\mathbb{N}}$, so überprüft man unschwer, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ \xi_i(k) \xrightarrow{i\in I} 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \ \frac{\xi_i(k)}{1+\xi_i(k)} \xrightarrow{i\in I} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{\xi_i(k)}{1+\xi_i(k)} \xrightarrow{i\in I} 0 \,.$$

◊

3.1.6 Korollar. *Die Topologie $\mathcal{T}$ auf $C(G,\mathbb{R}^p)$ wird von der Metrik*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f|_{K_n} - g|_{K_n}\|_\infty}{1 + \|f|_{K_n} - g|_{K_n}\|_\infty}, \quad f,g \in C(G,\mathbb{R}^p)\,,$$

erzeugt, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\rho)$.

Beweis. Wegen $\frac{\|f|_{K_n}-g|_{K_n}\|_\infty}{1+\|f|_{K_n}-g|_{K_n}\|_\infty} \leq 1$ konvergiert diese Reihe. Man überzeugt sich unschwer davon, dass dies eine Metrik auf $C(G,\mathbb{R}^p)$ abgibt.
In der Tat bedeutet $\rho(f,g) = 0$, dass $f|_{K_n} = g|_{K_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was wiederum zu $f = g$ äquivalent ist. Die Symmetrie von ρ ist klar, und die Dreiecksungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung von $\|.\|_\infty$ auf den Kompakta K_n zusammen mit der Monotonie von $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{1+\alpha}$ auf $[0,+\infty)$ und der Ungleichung

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}\,.$$

Aus Proposition 3.1.4 und Bemerkung 3.1.5 erkennen wir für ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ und ein f aus $C(G,\mathbb{R}^p)$, dass

$$f_i \xrightarrow{i\in I} f \ \text{ bzgl. } \mathcal{T} \Leftrightarrow \|f_i|_{K_n} - f|_{K_n}\|_\infty \xrightarrow{i\in I} 0 \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \rho(f_i,f) \xrightarrow{i\in I} 0\,.$$

Also ist die Identität von $C(G,\mathbb{R}^p)$ versehen mit der von ρ induzierten Topologie nach $C(G,\mathbb{R}^p)$ versehen mit $\mathcal{T}$ stetig in beide Richtungen, womit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\rho)$.

❑

3.1.7 Bemerkung. Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus einem metrischen Raum (Y,d) ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn

$$\lim_{k,l\to\infty} d(f_k,f_l) = 0\,, \tag{3.1}$$

wobei hier der Grenzübergang bezüglich der gerichteten Menge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gerichtet durch $(k_1,l_1) \leq (k_2,l_2) \Leftrightarrow k_1 \leq k_2 \wedge l_1 \leq l_2$ vollzogen wird. ◊

3.1.8 Korollar. *Bezüglich ρ ist $C(G,\mathbb{R}^p)$ vollständig. Dabei sind für eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $C(G,\mathbb{R}^p)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist bzgl. ρ eine Cauchyfolge.*

(2) *$(f_k|_K)_{k\in\mathbb{N}}$ ist bzgl. $\|.\|_\infty$ in $C(K,\mathbb{R}^p)$ eine Cauchyfolge für alle kompakten $K \subseteq G$.*

(3) *$(f_k|_{K_n})_{k\in\mathbb{N}}$ ist bzgl. $\|.\|_\infty$ in $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ eine Cauchyfolge für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.1.7 gilt (1) genau dann, wenn $\lim_{k,l\to\infty} \rho(f_k, f_l) = 0$. Gemäß Bemerkung 3.1.5 bedeutet das aber nichts anderes als $\lim_{k,l\to\infty} \|f_k|_{K_n} - f_l|_{K_n}\|_\infty = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was wiederum zu (3) äquivalent ist. (2) $\Rightarrow$ (3) ist klar und (3) $\Rightarrow$ (2) folgt aus der Tatsache, dass wegen Lemma 3.1.3 jedes K in einem K_n für ein hinreichned großes n enthalten ist. Damit ist die beschränkte Einschränkungsabbildung $.|_K : C(K_n,\mathbb{R}^p) \to C(K,\mathbb{R}^p)$ wohldefiniert und führt Cauchyfolgen in Cauchyfolgen über.
Treffen diese äquivalenten Aussagen zu, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen der Vollständigkeit der $(C(K_n,\mathbb{R}^p), \|.\|_\infty)$ einen Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_k|_{K_n}$ in $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ bzgl. $\|.\|_\infty$. Da aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise folgt, existiert $f(z) := \lim_{k\to\infty} f_k(z)$ für alle $z \in G$, wobei $f|_{K_n} = \lim_{k\to\infty} f_k|_{K_n}$ sogar gleichmäßig. Insbesondere ist f auf allen K_n stetig. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt mit Lemma 3.1.3, dass $f \in C(G,\mathbb{R}^p)$. Wegen Proposition 3.1.4 und Korollar 3.1.6 gilt auch $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ bzgl. ρ. Also ist $C(G,\mathbb{R}^p)$ vollständig.

❑

Hier sei an den Begriff der relativen Kompaktheit erinnert. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt relativ kompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist. Für metrische Räume ist die Kompaktheit einer Teilmenge dazu äquivalent, dass jede Folge in der Teilmenge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in der Teilmenge hat. Wie man unschwer daraus herleitet, ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge in der Teilmenge eine konvergente Teilfolge hat.
Eine relativ kompakte Teilmenge des metrischen Raumes $(C(G,\mathbb{R}^p), \rho)$ nennt man auch eine *normale Familie von Funktionen*.

3.1.9 Bemerkung. Vor dem nächsten Satz sei an den Satz von Arzela-Ascoli erinnert. Dieser besagt, dass $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ für ein kompaktes metrisches K genau dann relativ kompakt ist, wenn $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, also

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| < +\infty \quad \text{für alle} \quad x \in K,$$

und wenn $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig bei allen $x \in K$ ist, also

$$\forall x \in K\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in K,\ \forall f \in \mathcal{F} :\ d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon .$$

Da $(C(K,\mathbb{R}^p), \|.\|_\infty)$ ($\mathbb{R}^p$ versehen mit $\|.\|_\infty$) vermöge der Abbildung $f \mapsto ((z,k) \mapsto f(z)_k)$ isometrisch isomorph zu $(C(K \times \{1,\dots,p\},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ist (hier ist $K \times \{1,\dots,p\}$ versehen mit der Summenmetrik kompakt, wobei $\{1,\dots,p\}$ zB. als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aufgefasst wird), erhält man dieselbe Charakterisierung der relativen Kompaktheit einer Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R}^p)$. Man muss nur bei der punktweisen Beschränktheit und der gleichgradigen Stetigkeit den Betrag durch die Norm $\|.\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^p$ ersetzen. Da eine andere Norm, auf $\mathbb{R}^p$ eine äquivalente Norm $\|.\|_\infty$ auf $C(K,\mathbb{R}^p)$ ergibt, gilt diese Charakterisierung der relativen Kompaktheit auch mit jeder beliebigen Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^p$.

◊

3.1.10 Satz. *Sei $\mathcal{F} \subseteq C(G,\mathbb{R}^p)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$\mathcal{F}$ ist normal.*

(2) $\mathcal{F}|_K$ *is relativ kompakt in* $C(K,\mathbb{R}^p)$ *für alle kompakten* $K \subseteq G$.

(3) $\mathcal{F}|_{K_n}$ *is relativ kompakt in* $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $\mathcal{F}$ *ist punktweise beschränkt, also*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| < +\infty \ \text{für alle} \ x \in G\,, \tag{3.2}$$

und gleichgradig stetig bei allen $x \in G$, *also*

$$\forall x \in G\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in G,\ \forall f \in \mathcal{F} :\ d(x,y) < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon\,. \tag{3.3}$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) folgt auf aus der Tatsache, dass die Einschränkungsabbildung $\tau_K : C(G,\mathbb{R}^p) \to C(K,\mathbb{R}^p)$ stetig ist und daher das relativ kompakte $\mathcal{F}$ in das relativ kompakte $\mathcal{F}|_K$ überführt. (2) $\Rightarrow$ (3) ist klar.
Um (3) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}|_{K_1}$ relativ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(f_{k_1(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ derart, dass $(f_{k_1(j)}|_{K_1})_{j\in\mathbb{N}}$ in $C(K_1,\mathbb{R}^p)$ konvergiert. Von der Teilfolge $(f_{k_1(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ gibt es wieder eine Teilfolge – wir schreiben diese als $(f_{k_2(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ mit einer streng monoton wachsenden Abbildung $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $k_2(\mathbb{N}) \subseteq k_1(\mathbb{N})$ – derart, dass $(f_{k_2(j)}|_{K_2})_{j\in\mathbb{N}}$ in $C(K_2,\mathbb{R}^p)$ konvergiert.
Offensichtlich können wir das induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ machen und erhalten streng monoton wachsende Abbildungen $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $k_{n+1}(\mathbb{N}) \subseteq k_n(\mathbb{N})$ so, dass $(f_{k_n(j)}|_{K_n})_{j\in\mathbb{N}}$ in $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ konvergiert. Offenbar ist dann $(f_{k_j(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Da $(f_{k_j(j)}|_{K_n})_{j\in\mathbb{N}_{\geq n}}$ eine Teilfolge von $(f_{k_n(j)}|_{K_n})_{j\in\mathbb{N}}$ abgibt, konvergiert diese in $C(K_n,\mathbb{R}^p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Korollar 3.1.8 hat somit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in $C(G,\mathbb{R}^p)$ konvergente Teilfolge.
Es bleibt (3) $\Leftrightarrow$ (4) nachzuweisen. Wegen Bemerkung 3.1.9 ist (3) äquivalent zu den beiden Bedingungen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in K_n :\ \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| < +\infty\,,$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in K_n\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in K_n,\ \forall f \in \mathcal{F} :\ |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon\,.$$

Wegen der Eigenschaften der Mengenfolgen $K_n, n \in \mathbb{N}$, und $G_n, n \in \mathbb{N}$, in Lemma 3.1.3 sieht man aber unschwer, dass diese beiden Bedingungen zu (3.2) bzw. (3.3) äquivalent sind.

❑

3.1.11 Korollar. *Für ein relativ kompaktes* $\mathcal{F} \subseteq C(G,\mathbb{R}^p)$ *ist* $\mathcal{F}$ lokal beschränkt, *also gilt für jedes kompakte* $K \subseteq G$

$$\sup\{\|f|_K\|_\infty :\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty\,.$$

Beweis. Wegen Satz 3.1.10 ist $\overline{\mathcal{F}|_K}$ in $C(K,\mathbb{R}^p)$ kompakt und daher auch beschränkt, was aber nichts anderes als $\sup\{\|f|_K\|_\infty :\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ bedeutet.

❑

3.2 Der Raum $H(G)$

Der Vektorraum $H(G)$ über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ aller in G holomorphen Funktionen ist klarerweise in $C(G,\mathbb{C}) = C(G,\mathbb{R}^2)$ als Teilraum enthalten. Aus Lemma 1.12.1 folgt unmittelbar, dass $H(G)$ in $C(G,\mathbb{C})$ abgeschlossen ist. Zudem haben wir in Lemma 1.12.1 gesehen, dass aus $f_k \to f$ bzgl. ρ – also lokal gleichmäßig – folgt, dass $f_k' \to f'$. Also erhalten wir

3.2.1 Satz. *Für ein offenes $G \subseteq \mathbb{C}$ ist $H(G)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C(G,\mathbb{C})$. Zudem ist die lineare Abbildung $\frac{d}{dz} : H(G) \to H(G)$ stetig.*

3.2.2 Korollar. *Sei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$ normal. Dann ist auch die Familie*

$$\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$$

normal.

Beweis. Da $\psi : f \mapsto f'$ auf $H(G)$ stetig ist, ist $\psi(\overline{\mathcal{F}})$ in $H(G)$ kompakt. Folglich ist auch $\overline{\mathcal{F}'} = \overline{\psi(\mathcal{F})} \subseteq \psi(\overline{\mathcal{F}})$ kompakt.

❑

3.2.3 Satz (*von Montel*)**.** *Sei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann normal (relativ kompakt bezüglich der oben eingeführten Topologie auf $C(G,\mathbb{C})$), wenn $\mathcal{F}$ lokal beschränkt ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ normal, so folgt die lokale Beschränktheit aus Korollar 3.1.11. Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ lokal beschränkt, so ist $\mathcal{F}$ auch punktweise beschränkt, womit die erste Voraussetzung in Satz 3.1.10, (4), erfüllt ist. Sei $w \in G$ und wähle $r > 0$ mit $K_r(w) \subseteq G$. Für $z, z' \in U_{\frac{r}{2}}(w)$ gilt dann wegen

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z'} = \frac{z - z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')},$$

die Ungleichung

$$|f(z) - f(z')| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta\Big| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\gamma_r^w} \frac{f(\zeta)(z - z')}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta\Big| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)| \cdot |z - z'| \cdot \frac{1}{(\frac{r}{2})^2} =$$

$$= \frac{4}{r} \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)| \cdot |z - z'| .$$

Mit $M := \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial U_r(w), f \in \mathcal{F}\}$ gilt also $|f(z) - f(z')| \leq \frac{4M}{r}|z - z'|$, $f \in \mathcal{F}$, $z, z' \in U_{\frac{r}{2}}(w)$, weshalb $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig. Also ist auch die zweite Voraussetzung in Satz 3.1.10, (4), erfüllt. Insgesamt stellt sich $\mathcal{F}$ als normal heraus.

❑

3.2.4 Korollar (*Satz von Vitali*)**.** *Sei G ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $H(G)$ mit lokal beschränktem $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

(*ii*) *Es existiert ein Punkt $c \in G$ derart, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(k)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

(*iii*) *Die Menge $A := \{w \in G : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.*

Beweis. Klarerweise impliziert (*i*) sowohl (*ii*) als auch (*iii*). Sei also (*ii*) oder (*iii*) vorausgesetzt. Ist $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so existiert nach dem Satz von Montel eine gegen eine Funktion $f \in H(G)$ konvergente Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Im Fall von (*ii*) gilt

$$f^{(l)}(c) = \lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}^{(l)}(c) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(l)}(c)\,,$$

und im Falle von (*iii*)

$$f(w) = \lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w),\ w \in A\,.$$

Nach dem Identitätssatz ist f unabhängig von der Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also $f_n \to f$.

❑

3.2.5 Korollar (*Satz von Osgood**)**.** *Seien $f_n \in H(G), n \in \mathbb{N}$, und konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f : G \to \mathbb{C}$. Dann existiert ein offenes und dichtes $D \subseteq G$ derart, dass $f_n|_D \to f|_D$ lokal gleichmäßig. Insbesondere ist f auf D holomorph.*

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$T_N := \{z \in G : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(z)| \le N\}$$

und setze

$$D := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} T_N^\circ\,.$$

Klarerweise ist D eine offene Teilmenge von G. Jeder Punkt von D hat eine Umgebung, die ganz in einem T_N liegt. Ein Überdeckungsargument zeigt, dass $\{f_n|_D : n \in \mathbb{N}\}$ auf D lokal beschränkt ist. Nach dem Satz von Vitali angewandt auf jede Zusammenhangskomponente von D ist $(f_n|_D)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $H(D)$.
Wir müssen zeigen, dass D dicht in G ist. Dazu sei eine offene und nichtleere Teilmenge U von G gegeben. Da jede Funktion f_n stetig ist, ist jede der Mengen T_N abgeschlossen in der Spurtopologie von G. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und damit insbesondere punktweise beschränkt ist, gilt

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} T_N = G\,.$$

Daraus erhalten wir, dass für die bzgl. der Spurtopologie von U abgeschlossenen Mengen $T_N \cap U, N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{N\in\mathbb{N}}(T_N \cap U) = U$ gilt.
Nach dem Satz von Baire[1] existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass das Innere (bzgl. der Spurtopologie von U) von $T_{N_0} \cap U$ nichtleer ist. Da U eine offene Teilmenge von G ist, ist jede bzgl. der Spurtopologie von U offene Teilmenge von U auch bzgl. der Topologie von G offen. Insbesondere ist $(T_{N_0}^\circ) \cap U \neq \emptyset$. Wir schliessen also auf die Dichtheit von D in G.

❑

[1] Wir verwenden hier die Variante für lokalkompakte Hausdorff Räume!

3.3 Der Riemannsche Abbildungssatz

3.3.1 Satz (*Riemann'scher Abbildungssatz*)**.** *Hat ein Gebiet G mit $\emptyset \neq G \neq \mathbb{C}$ die Eigenschaft, dass jede nullstellenfreie Funktion $f \in H(G)$ eine Quadratwurzel besitzt, also dass es eine Funktion $g \in H(G)$ mit $g^2 = f$ gibt, so existiert eine analytische Funktion, die G bijektiv auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ abbildet.*

Beweis. Sei $a \in G$ fest gewählt. Wir betrachten die Familie $\mathcal{F}$ aller Funktionen $f \in H(G)$, die G injektiv in den Einheitskreis abbilden und $f(a) = 0$ erfüllen.

Schritt 1, $\mathcal{F} \neq \emptyset$: Für $b \in \mathbb{C} \setminus G$ ist $(z \mapsto z - b) \in H(G)$ nullstellenfrei. Voraussetzungsgemäß existiert $h \in H(G)$ mit $h(z)^2 = z - b$, womit $h \in H(G)$ injektiv und nullstellenfrei ist, da ein nicht injektives oder nicht nullstellenfreies h ein nicht injektives bzw. nicht nullstellenfreies $h(z)^2 = z - b$ nach sich ziehen würde.
Da aus $\zeta := h(z) = -h(w)$ die Gleichung $z = \zeta^2 + b = w$ und weiter $h(z) = -h(z)$, also $h(z) = 0$ folgt, muss $h(G) \cap (-h(G)) = \emptyset$ gelten.
$-h(G)$ ist offen, da h nicht konstant ist. Also gilt $K_r(w) \subseteq -h(G)$ für ein $w \in -h(G)$ und ein $r > 0$. Wegen $K_r(w) \cap h(G) = \emptyset$ ist die Funktion $\beta : G \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\beta(z) = \frac{r}{h(z) - w}$$

holomorph, als Zusammensetzung injektiver Funktionen injektiv und erfüllt $|\beta(z)| < 1$.
Für festes $w \in \mathbb{D}$ liegt

$$b_w(z) := \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}, \ \ z \in \mathbb{D}\,,$$

nach Satz 2.10.2 in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, wodurch $b_{\beta(a)} \circ \beta \in \mathcal{F}$.

Schritt 2, $\exists\, g \in \mathcal{F} : |g'(a)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)|$: Wegen $|f(z)| < 1$ für alle $f \in \mathcal{F}$, $z \in G$, ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie und nach Korollar 3.2.2 auch $\mathcal{F}'$. Insbesondere gilt

$$\eta := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| < +\infty\,.$$

Wegen $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und da $\mathcal{F}$ aus injektiven Funktionen besteht, gilt $\eta > 0$; siehe Korollar 2.8.3. Ist $g_n \in \mathcal{F}$ eine Folge mit $g_n'(a) \to \eta$ und $(g_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\lim_{k \to \infty} g_{n(k)} = g$, so gilt $g \in H(G)$, $g(G) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, $g(a) = 0$ und $g'(a) = \eta$. Insbesondere ist g nicht konstant. Nach dem Maximumsprinzip haben wir $g(G) \subseteq \mathbb{D}$, und gemäß Korollar 2.8.7 ist g injektiv, also $g \in \mathcal{F}$.

Schritt 3, $g(G) = \mathbb{D}$:
Für $w \in \mathbb{D} \setminus g(G)$ würde $w \neq 0$ gelten und $b_w \circ g \in H(G)$ hätte keine Nullstelle. Voraussetzungsgemäß gilt $h^2 = b_w \circ g$ für ein $h \in H(G)$. Mit $h^2 = b_w \circ g$ ist aber auch h injektiv und nullstellenfrei. Zudem gilt $|h(z)|^2 = |b_w \circ g(z)| < 1, z \in G$, womit[2] $h : G \to \mathbb{D}$ und infolge

$$b_{h(a)} \circ h \in \mathcal{F}\,.$$

Mit $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $Q(z) := z^2$, erhalten wir

$$\underbrace{\Big(b_w \circ Q \circ b_{h(a)}\Big)}_{=:L} \circ \Big(b_{h(a)} \circ h\Big) = b_w \circ h^2 = b_w \circ b_w \circ g = g\,.$$

[2]Da Wurzelziehen Winkel halbiert, füllt $h(G)$ die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ höchstens zur „Hälfte" aus.

Da $L(0) = 0$, da $L(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und da L kein konstantes Vielfaches von $z \mapsto z$ ist, folgt aus dem Lemma von Schwarz, Korollar 2.9.3, $|L'(0)| < 1$, und somit

$$|g'(a)| = \left|L'\Big(\underbrace{b_{h(a)} \circ h(a)}_{=0}\Big) \cdot \big(b_{h(a)} \circ h\big)'(a)\right| < \left|\big(b_{h(a)} \circ h\big)'(a)\right| \leq \eta \,,$$

im Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von g.

❑

Wir erhalten als erstes Korollar eine Aussage, die topologische und analytische Eigenschaften von Gebieten in $\mathbb{C}$ sowie algebraische Eigenschaften von $H(D)$ verbindet.

3.3.2 Korollar. *Für ein nichtleeres Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *$D = \mathbb{C}$ oder D ist analytisch und bijektiv auf $\mathbb{D}$ abbildbar.*

(ii) *D ist einfach zusammenhängend.*

(iii) *D ist homolog einfach zusammenhängend, also $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus D$ und alle stetigen und stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wege $\gamma : [a, b] \to D$.*

(iv) *Jede nullstellenfreie Funktion $f \in H(D)$ besitzt einen Logarithmus.*

(v) *Jede nullstellenfreie Funktion $f \in H(D)$ besitzt eine Quadratwurzel.*

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt, da eine analytische und injektive Abbildung nach Korollar 2.8.3 ein Homöomorphismus ist. Für (ii) $\Rightarrow$ (iii) siehe Bemerkung 2.5.5 und für (iii) $\Rightarrow$ (iv) Bemerkung 2.6.3. (iv) $\Rightarrow$ (v) ist klar, da aus $\exp \circ G = f$ sofort $\left(\exp(\frac{G(z)}{2})\right)^2 = f(z)$, $z \in D$ folgt. Schließlich ist (v) $\Rightarrow$ (i) der Riemannsche Abbildungssatz.

❑

Wir wollen anmerken, dass sich die beiden Möglichkeiten in (i) einander ausschließen. In der Tat gilt für $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$ nach dem Satz von Liouville, dass f konstant ist.
Als zweites Korollar erhalten wir die Struktur von $\operatorname{Aut} G$ für einfach zusammenhängende Gebiete G.

3.3.3 Korollar. *Für einfach zusammenhängendes $\emptyset \neq G \subsetneq \mathbb{C}$ gilt*

$$\operatorname{Aut} G \cong \operatorname{Aut} \mathbb{D} \,.$$

Beweis. Ist $f : G \to \mathbb{D}$ analytisch und bijektiv, dann bildet $h \mapsto f^{-1} \circ h \circ f$ einen Isomorphismus von $\operatorname{Aut} \mathbb{D}$ auf $\operatorname{Aut} G$.

❑

Kapitel 4

Der Satz von Runge

4.1 Existenz von geschlossenen Wegen

Wir starten diesen Abschnitt mit der Situation, dass $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ mit einem kompakten K und einem offenen D. Im Falle $D = \mathbb{C}$ finden wir offenbar ein abgeschlossenes Quadrat Q um die Null mit $K \subseteq Q^\circ$. Ist $\gamma : [0,4] \to \mathbb{C}$ der Polygonzug durch die Ecken des Quadrates in mathematisch positiver Richtung läuft, so prüft man leicht mit Hilfe von Fakta 2.5.2 nach, dass $n(\gamma, w) = 1$ für alle $w \in Q^\circ \supseteq K$. Also gibt es einen geschlossenen achsenparallelen, in $D \setminus K$ verlaufenden Polygonzug, dessen Umlaufzahl um jeden Punkt von K eins ist.
Für $D \subsetneq \mathbb{C}$ wird es im Allgemeinen nicht so einen Weg geben. Man stelle sich dazu ein nicht zusammenhängendes D derart vor, dass K nicht ganz in nur einer Zusammenhangskomponente von D enthalten ist. Für unsere späteren Überlegungen muss es aber nicht notwendigerweise nur ein Weg sein.

4.1.1 Satz. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq D$ kompakt. Dann gibt es endlich viele geschlossene, achsenparallele, in $D \setminus K$ verlaufende Polygonzüge $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\sum_{i=1}^n n(\alpha_i, z) \in \{0,1\}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1,\dots,n} \alpha_i([0,1])$ und*

$$\sum_{i=1}^n n(\alpha_i, z) = \begin{cases} 1 & , \textit{falls } \; z \in K \\ 0 & , \textit{falls } \; z \in \mathbb{C} \setminus D \end{cases} .$$

Beweis. Wir betrachten $\delta := \frac{d(K, \mathbb{C} \setminus D)}{2}$, welches wegen der Kompaktheit von K strikt größer Null ist, und die Menge

$$\mathfrak{P} := \{\delta \cdot ([j, j+1] \times [k, k+1]) : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

aller Quadrate in der Ebene mit Seitenlänge δ und Eckpunkten mit Koordinaten aus $\delta\mathbb{Z}$. Wir wollen

$$K \subseteq \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q \subseteq D$$

nachweisen, wobei $\mathfrak{Q} = \{Q \in \mathfrak{P} : Q \cap K \neq \emptyset\}$. Die erste Inklusion gilt wegen $\mathbb{C} = \bigcup_{Q \in \mathfrak{P}} Q$ und die zweite, da aus $w \in Q$ mit $Q \cap K \neq \emptyset$ offenbar $d(w, K) \leq d(Q) = \sqrt{2}\,\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus D)$ folgt.

Für $Q = \delta \cdot ([m, m+1] \times [n, n+1]) \in \mathfrak{P}$ seien $\gamma_1(Q), \gamma_2(Q), \gamma_3(Q), \gamma_4(Q) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Strecken definiert durch

$$\gamma_1(Q) = \overrightarrow{\delta \cdot \begin{pmatrix} m+1 \\ n \end{pmatrix}, \delta \cdot \begin{pmatrix} m+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}, \ \gamma_2(Q) = \overrightarrow{\delta \cdot \begin{pmatrix} m+1 \\ n+1 \end{pmatrix}, \delta \cdot \begin{pmatrix} m \\ n+1 \end{pmatrix}},$$
$$\gamma_3(Q) = \overrightarrow{\delta \cdot \begin{pmatrix} m \\ n+1 \end{pmatrix}, \delta \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}, \ \gamma_4(Q) = \overrightarrow{\delta \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \delta \cdot \begin{pmatrix} m+1 \\ n \end{pmatrix}}.$$

Zudem definieren wir die Menge

$$\vec{\partial} Q := \{\gamma_1(Q), \gamma_2(Q), \gamma_3(Q), \gamma_4(Q)\}$$

bestehende aus vier Wegen, sowie $\Sigma := \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} \vec{\partial} Q$.
Jeder Weg $\gamma \in \Sigma$ liegt in $\vec{\partial} Q$ für genau ein $Q \in \mathfrak{Q}$. In der Tat gilt für ein $Q = \delta \cdot ([m, m+1] \times [n, n+1]) \in \mathfrak{Q}$ mit $\gamma \in \vec{\partial} Q$

$$2\delta \cdot \left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right) = (\gamma(1) + \gamma(0)) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\gamma(1) - \gamma(0)) - \left(\begin{smallmatrix} \delta \\ \delta \end{smallmatrix}\right).$$

Schließlich setzen wir für ein $\Theta \subseteq \Sigma$ und $w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

$$k(\Theta, w) := \#\{\gamma \in \Theta : \gamma(1) = w\} - \#\{\gamma \in \Theta : \gamma(0) = w\}.$$

(a) Für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ und jedes $z \notin \bigcup_{l=1,\dots,4} \gamma_l(Q)([0,1])$ gilt

$$\sum_{\gamma \in \vec{\partial} Q} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_l(Q)} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = n(\gamma_Q, z),$$

wobei γ_Q die Zusammensetzung dieser vier Wege ist. Wegen $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{l=1,\dots,4} \gamma_l(Q)[0,1] = Q^\circ \dot\cup \mathbb{C} \setminus Q = \mathbb{C} \setminus \partial Q$ folgt aus Fakta 2.5.2

$$n(\gamma_Q, z) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } z \in Q^\circ, \\ 0 & \text{, falls } z \in \mathbb{C} \setminus Q. \end{cases}$$

Da für $R \in \mathfrak{Q}$ sicher $R^\circ \subseteq \mathbb{C} \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q} \setminus \{R\}} Q$ und da jedes $\gamma \in \Sigma$ in $\vec{\partial} Q$ für genau ein $Q \in \mathfrak{Q}$ liegt, folgt somit

$$\sum_{\gamma \in \Sigma} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 1 & \text{, falls } z \in \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q^\circ, \\ 0 & \text{, falls } z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q. \end{cases} \tag{4.1}$$

(b) Offenbar ist $\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \gamma_2 \in \{\gamma_1, \gamma_1 -\}$ eine Äquivalenzrelation auf Σ. Die entsprechenden Äquivalenzklassen $[\gamma]_\sim$ enthalten dann einen oder zwei Wege. Wir setzen

$$\Gamma := \{\gamma \in \Sigma : \#[\gamma]_\sim = 1\} = \{\gamma \in \Sigma : \gamma - \notin \Sigma\}.$$

Offenbar ist dann die Menge $\Sigma \setminus \Gamma = \{\gamma \in \Sigma : \gamma - \in \Sigma\}$ eine disjunkte Vereinigung von Paaren $\{\gamma, \gamma -\}$.

(c) Für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ und jedes $w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ gilt $k(\vec{\partial} Q, w) = 0$, da jeder Eckpunkt von Q genau einmal als Anfangspunkt und genau einmal als Endpunkt einer Strecke aus $\vec{\partial} Q$ auftritt. Aufgrund von $k(\Theta_1, w) + k(\Theta_2, w) = k(\Theta_1 \cup \Theta_2, w)$ für disjunkte Mengen folgt

$$k(\Sigma, w) = k(\dot{\bigcup}_{Q \in \mathfrak{Q}} \vec{\partial} Q, w) = 0, \ w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) .$$

Wegen $k(\{\gamma, \gamma-\}, w) = 0$ erhalten wir daraus auch

$$k(\Gamma, w) = k(\Sigma, w) - k(\Sigma \setminus \Gamma, w) = 0 .$$

(*d*) Ähnlich gilt wegen $\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma-} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ und wegen (4.1), dass

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{, falls } z \in \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q^\circ , \\ 0 & \text{, falls } z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q . \end{cases}$$

Die $z \in \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} \partial Q = \bigcup_{\gamma \in \Sigma} \gamma([0,1])$ sind hier nicht berücksichtigt. Dennoch ist obige Summe von Integralen auf $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1])$ definiert und holomorph. Da jedes $z \in \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} \partial Q = (\bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q) \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q^\circ$ im Abschluss von $\bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q^\circ$ liegt, folgt aus Stetigkeitsgründen sogar

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 1, \ z \in \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1]) .$$

(*e*) Für $\gamma \in \Sigma$ mit $\gamma([0,1]) \cap K \neq \emptyset$ gilt auch $\gamma- \in \Sigma$. Daraus folgt dann $\gamma([0,1]) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ für $\gamma \in \Gamma$ bzw.

$$K \subseteq \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1]) .$$

Um das einzusehen, sei etwa $\gamma = \gamma_1(Q)$ mit $Q = \delta \cdot ([m, m+1] \times [n, n+1]) \in \mathfrak{Q}$ und $\gamma([0,1]) \cap K \neq \emptyset$. Dann folgt $\gamma_3(Q + \binom{\delta}{0}) = \gamma_1(Q)- = \gamma-$, wobei wegen

$$\emptyset \neq \gamma([0,1]) \cap K = \gamma_3(Q + \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix})([0,1]) \cap K \subseteq Q + \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Quadrat $Q + \binom{\delta}{0}$ zu $\mathfrak{Q}$ gehört, und daher $\gamma_3(Q + \binom{\delta}{0}) = \gamma- \in \Sigma$. Für die Fälle $\gamma = \gamma_2(Q), \gamma_3(Q), \gamma_4(Q)$ argumentiert man genauso.

(*f*) Wir behaupten, dass jede nichtleere Teilmenge $\Theta \subseteq \Gamma$ mit $k(\Theta, w) = 0$ für alle $w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ einen geschlossenen Polygonzug enthält, daher paarweise verschiedene Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ mit $\gamma_j(1) = \gamma_{j+1}(0)$ für $j = 1, \dots, k-1$ und $\gamma_1(0) = \gamma_k(1)$.

Wäre dem nicht so, sei $m \in \mathbb{N}$ maximal derart, dass es paarweise verschiedene

$$\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Theta$$

gibt mit $\gamma_j(1) = \gamma_{j+1}(0)$ für $j = 1, \dots, m-1$. Da Θ endlich ist, gibt es so ein m.

Dabei gibt es sicherlich kein $\gamma = \gamma_j \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ mit $\gamma(0) = \gamma_m(1)$, da wir sonst mit $\gamma_j, \dots, \gamma_m$ einen geschlossenen Polygonzug innerhalb von $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq \Theta$ gefunden hätten. Wegen der Maximalität von m kann es auch kein $\gamma \in \Theta \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ geben mit $\gamma(0) = \gamma_m(1)$. Also folgt

$$k(\Theta, \gamma_m(1)) = \#\{\gamma \in \Theta : \gamma(1) = \gamma_m(1)\} - \underbrace{\#\{\gamma \in \Theta : \gamma(0) = \gamma_m(1)\}}_{=0} \geq 1$$

im Widerspruch zur Vorgabe an Θ.

(g) Wenden wir das gerade gezeigte auf $\Theta = \Gamma$ an, so erhalten wir einen geschlossenen Polygonzug $\gamma_1^1, \dots, \gamma_{k(1)}^1$, der

$$k(\{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{k(1)}^1\}, w) = 0 \ \text{ für alle } \ w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

erfüllt, denn für $w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ gilt $\gamma_j^1(1) = w$ genau dann, wenn $\gamma_{j+1}^1(0) = w$ gilt, wobei wir hier $\gamma_{k(1)+1}^1 := \gamma_1^1$ setzen. Es folgt

$$k(\Theta \setminus \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{k(1)}^1\}, w) = 0 \ \text{ für alle } \ w \in \delta \cdot (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\,.$$

Mit[1] $\alpha_1 := \gamma_1^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_{k(1)}^1$ erhalten wir einen geschlossenen, achsenparallelen Polygonzug.

Nun wenden wir den vorherigen Punkt auf $\Theta = \Gamma \setminus \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{k(1)}^1\}$ an und erhalten einen weiteren geschlossenen, achsenparallelen Polygonzug $\alpha_2 = \gamma_1^2 \oplus \cdots \oplus \gamma_{k(2)}^2$. Wir fahren mit $\Theta = \Gamma \setminus \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{k(1)}^1\} \setminus \{\gamma_2^2, \dots, \gamma_{k(2)}^2\}$ fort, welches auch die Voraussetzung $k(\Theta, w) = 0$ für alle $w \in \delta\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ erfüllt, usw. .

Da Γ endlich ist, bricht dieser Algorithmus ab und wir erhalten geschlossene, achsenparallele Polygonzüge $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\alpha_i = \gamma_1^i \oplus \cdots \oplus \gamma_{k(i)}^i$, wobei

$$\Gamma = \dot{\bigcup}_{i \in \{1,\dots,n\}} \{\gamma_1^i, \dots, \gamma_{k(i)}^i\}\,,$$

und damit

$$\sum_{i=1}^n n(\alpha_i, z) =$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ z \in (\bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q) \setminus \bigcup_{i=1,\dots,n} \alpha_i([0,1]) \ (\supseteq K)\,, \\ 0 & \text{, falls } \ z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q \ (\supseteq \mathbb{C} \setminus D)\,. \end{cases}$$

❑

4.1.2 Bemerkung (*). Mit der Notation aus dem letzten Beweis gilt $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1]) = \partial M$, wobei $M := \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q$. Für $\gamma \in \Gamma$ gilt nämlich $\gamma - \notin \Sigma$, weshalb das $Q \in \mathfrak{P}$ mit $\gamma - \in \vec{\partial} Q$ nicht zu $\mathfrak{Q}$ gehört. Daraus folgt leicht $\gamma([0,1]) \subseteq M \cap \overline{M^c}$.
Umgekehrt ist $f(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$ auf $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1])$ stetig, und nimmt auf $M \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1])$ den Wert 1 an. Auf M^c und daher auch auf $\overline{M^c} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1])$ hat f den Wert Null, womit $M \cap \overline{M^c} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([0,1]) = \emptyset$. ◊

4.2 Approximation durch Rationale Funktionen

Rationale Funktionen, also Funktion von der Bauart $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$, sind meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}_\infty$, wobei ∞ genau dann ein Pol ist, wenn der Grad von p größer als der von q ist.

[1] Genau genommen müsste man hier zu äquivalenten Wegen $\tilde{\gamma}_j^1$ derart übergehen, dass die Definitionsbereiche zusammenpassen; vgl. Beispiel 1.4.2.

4.2.1 Lemma. *Seien $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus K$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Bezeichnet $g : \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ die durch*

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

definierte holomorphe Funktion (vgl. Korollar 1.11.4), so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine rationale Funktion $R(z)$, welche eine Linearkombination von Funktionen der Bauart $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ mit $w \in \gamma([a,b])$ ist, mit $\|g|_K - R|_K\|_\infty < \epsilon$.

Beweis. Die Funktion $K \times [a,b] \ni (z,t) \mapsto \frac{f\circ\gamma(t)}{\gamma(t)-z} \in \mathbb{C}$ ist offenbar stetig und infolge gleichmäßig stetig, da $K \times [a,b]$ $(\subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R})$ ja kompakt ist. Somit gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $|s-t| < \delta$ und $|w-z| < \delta$ immer $\left|\frac{f\circ\gamma(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{f\circ\gamma(s)}{\gamma(s)-w}\right| \le \epsilon$ folgt.
Für eine beliebige Riemannsche Zerlegung $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ mit Feinheit $|\mathcal{R}| < \delta$ gilt dann

$$\Big|\, g(z) - \underbrace{\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1}))\, \frac{f(\gamma(\alpha_j))}{\gamma(\alpha_j) - z}}_{=:R(z)} \,\Big| =$$

$$\left| \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \cdot \gamma'(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{f(\gamma(\alpha_j))}{\gamma(\alpha_j)-z} \cdot \gamma'(t)\, dt \right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \cdot \gamma'(t) - \frac{f(\gamma(\alpha_j))}{\gamma(\alpha_j)-z} \cdot \gamma'(t) \right| dt \le \epsilon \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} |\gamma'(t)|\, dt = \epsilon\, \ell(\gamma)\,,$$

und zwar für alle $z \in K$. Also folgt für die offensichtlich rationale Funktion $R(z)$ mit Polstellen nur in $\gamma([a,b])$, dass $\|g|_K - R|_K\|_\infty < \epsilon$.

❑

Für ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir den Banachraum $C(K) = C(K, \mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_\infty$.

4.2.2 Definition. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Für $E \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K$ sei $A(E)$ der Abschluss in $C(K)$ der Menge aller Funktionen der Bauart $R|_K$, wobei $R : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine rationale Funktion[2] mit Polstellen höchstens in E ist. ◊

Man überzeugt sich leicht von folgender Aussage.

4.2.3 Lemma. *$A(E)$ ist eine abgeschlossene Algebra in $C(K)$, dh. $f+g$, λf und $f \cdot g$ sind aus $A(E)$ für $f, g \in A(E)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zudem enthält $A(E)$ alle Einschränkungen auf K von allen rationalen Funktionen mit Polstellen höchstens in E. Insbesondere gilt $\mathbb{1}_K \in A(E)$.*

4.2.4 Definition. Sei A eine abgeschlossene Algebra in $C(K)$. Mit ρ_A wollen wir die Menge aller $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$ bezeichnen mit $\alpha_w \in A$, wobei $\alpha_w(z) = \frac{1}{z-w}$ für $w \neq \infty$ und $\alpha_\infty(z) = z$. ◊

4.2.5 Lemma. *Für eine abgeschlossene Algebra A in $C(K)$ gilt:*

1. *Aus $w \in \rho_A \cap \mathbb{C}$ folgt $U^{|.|}_{d(w,K)}(w) \subseteq \rho_A \cap \mathbb{C}$.*

[2] Ein rationales R ist genau dann ein Polynom, wenn seine einzig mögliche Polstelle ∞ ist.

2. *Gilt* $w = \lim_{n\to\infty} w_n$ *mit* $w_n \in \rho_A \cap \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$, *und* $w \in \mathbb{C} \setminus K$, *so folgt* $w \in \rho_A \cap \mathbb{C}$.
3. *Aus* $\infty \in \rho_A$ *und* $\mathbb{1}_K \in A$ *folgt* $\mathbb{C}_\infty \setminus K^{(\mathbb{C},|.|)}_{\max|K|}(0) \subseteq \rho_A$.
4. *Gilt* $\mathbb{1}_K \in A$ *und gilt* $\infty = \lim_{n\to\infty} w_n$ *mit* $w_n \in \rho_A \cap \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$, *so folgt* $\infty \in \rho_A$.

Insbesondere ist $\rho_A \cap \mathbb{C}$ *offen in* $\mathbb{C}$ *und abgeschlossen als Teilmenge von* $\mathbb{C} \setminus K$. *Im Falle* $\mathbb{1}_K \in A$, *ist* ρ_A *offen in* $\mathbb{C}_\infty$ *und abgeschlossen als Teilmenge von* $\mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Beweis.

1. Für $w \in \mathbb{C} \setminus K$, $\eta \in U_{d(w,K)}(w)$ und $(z \mapsto \frac{1}{z-w}) \in A$ gilt

$$\frac{1}{z-\eta} = \frac{1}{z-w} \cdot \frac{1}{1-\frac{\eta-w}{z-w}} = \frac{1}{z-w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta-w}{z-w}\right)^k ,$$

wobei diese Reihe in $C(K)$ wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z\in K} \left| \left(\frac{\eta-w}{z-w}\right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\eta-w|}{d(w,K)}\right)^k < \infty$$

absolut und infolge bzgl. $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig konvergiert. Weil A eine Algebra ist, und damit die Folge der Partialsummen in A läuft, liegt die Grenzfunktion $z \mapsto \frac{1}{z-\eta}$ in A.

2. Da $M := \{w\} \cup \{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ und disjunkt zu K ist, folgt $d(K, M) > 0$, und damit

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_n} \right| = \sup_{z\in K} \frac{|w-w_n|}{|z-w| \cdot |z-w_n|} \leq |w-w_n| \cdot \frac{1}{d(K,M)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Da A abgeschlossen in $C(K)$ ist, folgt somit aus $w_n \in \rho_A \cap \mathbb{C}$, dass $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ zu A gehört.

3. Für $\eta \in \mathbb{C} \setminus K^{\mathbb{C}}_{\max|K|}(0)$ und $(z \mapsto z) \in A$ gilt

$$\frac{1}{z-\eta} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\eta}} = -\frac{1}{\eta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\eta}\right)^k ,$$

wobei diese Reihe in $C(K)$ wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z\in K} \left| \left(\frac{z}{\eta}\right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\max|K|}{|\eta|}\right)^k < +\infty$ absolut und somit bzgl. $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig konvergiert. Wenn A eine Algebra ist, $\mathbb{1}_K \in A$, und damit die Folge der Partialsummen in A läuft, liegt $z \mapsto \frac{1}{z-\eta}$ in A.

4. Für $\mathbb{C} \setminus K \ni w_n \to \infty$ ist $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{C}$ abgeschlossen und disjunkt zu K. Also gilt $d(\{w_n : n \in \mathbb{N}\}, K) > 0$, womit

$$\sup_{z\in K} \left| -w_n \left[\frac{w_n}{z-w_n} + 1 \right] - z \right| = \sup_{z\in K} \left| \frac{-z^2}{z-w_n} \right| \leq \frac{\max_{z\in K} |z|^2}{d(\{w_n : n \in \mathbb{N}\}, K)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Da A abgeschlossen ist, folgt somit aus $\mathbb{1}_K \in A$ und $w_n \in \rho_A \cap \mathbb{C}$, dass $z \mapsto z$ zu A gehört.

❑

4.2.6 Satz (*Satz von Runge*)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $E \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K$ derart, dass $E \cap Z \neq \emptyset$ für jede Zusammenhangskomponente Z von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Weiters sei*

$$H(K) := \{f \in C(K) \mid \exists\, F : O \to \mathbb{C}, \text{ holomorph mit offenem } O \supseteq K \text{ und } F|_K = f\}\,.$$

Dann gilt $A(E) = \overline{H(K)}$, wobei dieser Abschluss in $(C(K), \|.\|_\infty)$ zu nehmen ist.

Beweis. Jede rationale Funktion mit Polstellen höchstens in E liegt wegen $K \subseteq \mathbb{C} \setminus E$ in $H(K)$, womit auch $A(E) \subseteq \overline{H(K)}$.
Für die umgekehrte Inklusion seien die Funktionen α_w, $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$, und die Menge $\rho_{A(E)}$ wie in Definition 4.2.4 definiert. Man beachte, dass $\mathbb{1}_K \in A(E)$. Offenbar gilt $E \subseteq \rho_{A(E)}$; vgl. Lemma 4.2.3.
Wegen Lemma 4.2.5 ist $\rho_{A(E)}$ offen und abgeschlossen in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Für eine beliebige Zusammenhangskomponente Z von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ ist daher

$$Z \cap \rho_{A(E)} = \{w \in Z : \alpha_w \in A(E)\}$$

offen und abgeschlossen in Z. Voraussetzungsgemäß ist $Z \cap E \subseteq Z \cap \rho_{A(E)}$ nicht leer, wodurch $Z = Z \cap \rho_{A(E)}$ bzw. $Z \subseteq \rho_{A(E)}$. Da Z beliebig war, folgt $\mathbb{C}_\infty \setminus K = \rho_{A(E)}$, womit $\alpha_w \in A(E)$ für alle $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$.
Sei $f \in H(K)$ und $F : O \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf ein offenes $O \supseteq K$. Gemäß Satz 4.1.1 und Satz 2.6.1 gibt es geschlossenene, stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to O \setminus K, \dots, \gamma_k : [a_k, b_k] \to O \setminus K$ mit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in K\,.$$

Nach Lemma 4.2.1 lässt sich jeder Summand auf der rechten Seite beliebig gut gleichmäßig auf K durch Linearkombinationen der Funktionen α_w, $w \in \mathbb{C} \setminus K$, approximieren; also $f \in A(E)$.

❑

4.2.7 Bemerkung. Für das folgende Korollar benötigen wir noch eine Überlegung zu den in Lemma 3.1.3 zu einer gegebenen offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ angegebenen Folgen von Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$K_n := K_n(0) \setminus U_{\frac{1}{n}}(\mathbb{C} \setminus G), \quad G_n = U_n(0) \setminus K_{\frac{1}{n}}(\mathbb{C} \setminus G)\,,$$

welche ja $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$ und $G_n \subseteq K_n \subseteq G_{n+1} \subseteq K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest. Wegen $\mathbb{C}_\infty \setminus G \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ ist jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ in $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ zusammenhängend und damit ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ enthalten.
Sei umgekehrt Z eine Zusammenhangskomponente von

$$\mathbb{C}_\infty \setminus K_n = (\mathbb{C}_\infty \setminus K_n(0)) \cup U_{\frac{1}{n}}(\mathbb{C} \setminus G)\,.$$

Da $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n(0)$ zusammenhängend ist, gilt entweder $Z \supseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_n(0)$ oder $Z \cap \mathbb{C}_\infty \setminus K_n(0) = \emptyset$. Im ersten Fall gilt $\infty \in Z \cap \mathbb{C}_\infty \setminus G$. Im zweiten Fall gilt $Z \subseteq U_{\frac{1}{n}}(\mathbb{C} \setminus G)$ und für

$w \in Z$ somit $w \in U_{\frac{1}{n}}(z) \subseteq U_{\frac{1}{n}}(\mathbb{C} \setminus G)$ mit einem gewissen $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Da $U_{\frac{1}{n}}(z)$ zusammenhängend ist, liegt dieser Kreis ganz in Z, womit $z \in Z \cap \mathbb{C}_\infty \setminus G$.
Also gilt immer $Z \cap \mathbb{C}_\infty \setminus G \neq \emptyset$ und damit $Z \cap H \neq \emptyset$ für eine gewisse Zusammenhangskomponente H von $\mathbb{C}_\infty \setminus G$. Nach den Überlegungen oben muss dann sogar $H \subseteq Z$. ◊

4.2.8 Korollar. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $E \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus D$ derart, dass $\overline{E}^{\mathbb{C}_\infty} \cap H \neq \emptyset$ für jede Zusammenhangskomponente H von $\mathbb{C}_\infty \setminus D$. Dann liegt der Raum aller Einschränkungen auf D von rationalen Funktionen mit Polstellen höchstens in E dicht in $(H(D), \rho)$.*

Beweis. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Bemerkung 4.2.7. Für festes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Zusammenhangskomponente Z von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ haben wir in Bemerkung 4.2.7 gesehen, dass $H \subseteq Z$ für eine gewisse Zusammenhangskomponente H von $\mathbb{C}_\infty \setminus D$. Also gilt $Z \cap \overline{E}^{\mathbb{C}_\infty} \neq \emptyset$ und wegen der Offenheit von Z sogar $Z \cap E \neq \emptyset$.
Für ein $f \in H(D)$ gibt es nach Satz 4.2.6 eine rationale Funktion R_n mit Polstellen höchstens in E und $\|R_n|_{K_n} - f|_{K_n}\|_\infty < \frac{1}{n}$. Wegen $\|R_n|_{K_m} - f|_{K_m}\|_\infty \leq \|R_n|_{K_n} - f|_{K_n}\|_\infty$ für $m \leq n$ gilt dann $\lim_{n\to\infty} \|R_n|_{K_m} - f|_{K_m}\|_\infty = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was nach Korollar 3.1.8 die Konvergenz von $(R_n|_D)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bezüglich ρ bedeutet. ❑

4.2.9 Korollar. *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ zusammenhängend ist.*

Beweis. Falls $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ zusammenhängend ist, so folgt aus $\infty \in \mathbb{C}_\infty \setminus G$ mit Korollar 4.2.8, dass sich $G \ni z \mapsto \frac{1}{z-w}$ für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus G$ lokal gleichmäßig auf G durch eine Folge p_n, $n \in \mathbb{N}$, von Polynomen approximieren lässt. Da die p_n auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{C}$ holomorph sind, erhalten wir

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - w}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_\gamma p_n(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle stetigen und stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen γ und alle $w \in \mathbb{C} \setminus G$. Also ist G homolog einfach zusammenhängend, und wegen Korollar 3.3.2 auch einfach zusammenhängend.
Falls die abgeschlossene Teilmenge $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ von $\mathbb{C}_\infty$ nicht zusammenhängend ist, so lässt sie sich schreiben in der Form $\mathbb{C}_\infty \setminus G = K \dot\cup H$ mit zwei disjunkten, nichtleeren und abgeschlossenen Teilmengen H, K von $\mathbb{C}_\infty$. OBdA. sei $\infty \in H$. Infolge ist K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $K \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus H = K \dot\cup G \subseteq \mathbb{C}$. Nach Satz 4.1.1 gibt es für $w \in K \subseteq \mathbb{C} \setminus G$ einen geschlossenen Polygonzug γ in $(K \dot\cup G) \setminus K = G$ mit $n(\gamma, w) \neq 0$, womit G nicht homolog einfach zusammenhängend, und wegen Korollar 3.3.2 auch nicht einfach zusammenhängend sein kann. ❑

4.3 Der Satz von Mittag-Leffler

Für ein offenes $G \subseteq \mathbb{C}$ betrachte eine holomorphe Funktion f auf $G \setminus \{w\}$, und sei die Laurent-Entwicklung von f um w

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - w)^n .$$

Dabei konvergiert die Reihe $\sum_{n<0} a_n(z-w)^n$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}\setminus\{w\}$. Man nennt diese Reihe den *Hauptteil von f an der Stelle w*.

4.3.1 Definition. Sei $w\in\mathbb{C}$. Eine Reihe der Gestalt $\sum_{n<0} a_n(z-w)^n$, welche in $\mathbb{C}\setminus\{w\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, heißt ein *Hauptteil in w*.
Sei $G\subseteq\mathbb{C}$ offen und $P\subseteq G$ diskret in G. Eine Abbildung, $P\ni w\mapsto g_w$, die jedem $w\in P$ einen Hauptteil in w zuordnet, nennt man *Hauptteilverteilung* in G.
Ist $f: G\setminus P\to\mathbb{C}$ holomorph und ist für $w\in P$, g_w der Hauptteil von f an der Stelle w, so heißt $P\ni w\mapsto g_w$ die *Hauptteilverteilung von f*. ◊

4.3.2 Satz (*von Mittag-Leffler*)**.** *Sei $G\subseteq\mathbb{C}$ offen, $P\subseteq G$ diskret in G, und sei $P\ni w\mapsto g_w$ eine Hauptteilverteilung in G. Dann existiert eine Funktion $f\in H(G\setminus P)$, die $P\ni w\mapsto g_w$ als Hauptteilverteilung hat.*

Als diskrete Teilmenge ist P abzählbar. Ist P sogar endlich, so ist die Aussage klar, denn dann leistet die Funktion
$$f(z) := \sum_{w\in P} g_w(z)$$
das Gewünschte. Ist P unendlich, so muss die Reihe $\sum_{w\in P} g_w(z)$ nicht konvergieren. Man erzwingt ihre Konvergenz, indem man geeignete analytische, konvergenzerzeugende Summanden dazu gibt.
Beweis. (Satz 4.3.2) P sei unendlich. Seien $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Bemerkung 4.2.7. Da die K_n kompakt sind, ist $K_n\cap P$ endlich. Für $n\in\mathbb{N}$ setzen wir
$$f_n(z) := \sum_{w\in P\cap K_n\setminus K_{n-1}} g_w(z)\,,$$
wobei $K_0 := \emptyset$. f_n ist auf $\mathbb{C}\setminus(P\cap K_n\setminus K_{n-1})$ $(\supseteq K_{n-1})$ holomorph. In Bemerkung 4.2.7 haben wir gesehen, dass jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty\setminus K_{n-1}$ einen nichtleeren Schnitt mit $\mathbb{C}_\infty\setminus G$. Also gibt es nach Satz 4.2.6 eine rationale Funktion R_n mit Polstellen höchstens in $\mathbb{C}_\infty\setminus G$ mit
$$\|f_n|_{K_{n-1}} - R_n|_{K_{n-1}}\|_\infty < \frac{1}{2^n}\,.$$
Wir setzen nun
$$f(z) = f_1(z) + \sum_{j=2}^{\infty}(f_j(z) - R_j(z)),\ z\in D_f\,,$$
wobei D_f die Menge aller $z\in G\setminus P$ ist, für die obige Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert.
Für $n>1$ konvergiert $\sum_{j\geq n}(f_j(z)-R_j(z))$ aber auf K_{n-1} gleichmäßig, womit $K_{n-1}\setminus P\subseteq D_f$. Wegen $G_{n-1}\subseteq K_{n-1}$ ist zudem $z\mapsto\sum_{j\geq n}(f_j(z)-R_j(z))$ auf G_{n-1} holomorph, und infolge ist
$$f(z) = \sum_{j=1}^{n-1} f_j(z) - \sum_{j=2}^{n-1} R_j(z) + \sum_{j\geq n}(f_j(z)-R_j(z)) =$$
$$\sum_{w\in P\cap K_{n-1}} g_w(z) - \sum_{j=2}^{n-1} R_j(z) + \sum_{j\geq n}(f_j(z)-R_j(z))$$
auf $G_{n-1}\setminus P$ holomorph. Für $w\in G_{n-1}\cap P$ $(\subseteq K_{n-1}\cap P)$ ist der Hauptteil von f bei w genau g_w.
Wegen $\bigcup_{n>1} G_{n-1} = G$ ist f auf $G\setminus P$ holomorph, und hat die Hauptteilverteilung $P\ni w\mapsto g_w$.

❑

4.4 Der Satz von Weierstraß

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

4.4.1 Satz (*Produktsatz von Weierstraß*)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $N \subseteq G$ diskret und sei $\alpha : N \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann existiert $f \in H(G)$ mit $f^{-1}\{0\} = N$ so, dass für jedes $w \in N$ die Nullstellenvielfachheit von f bei w genau $\alpha(w)$ ist.*

Da N keinen Häufungspunkt in G hat, kann diese Menge nur aus höchstens abzählbar vielen Elementen bestehen. Ist N endlich, d.h. suchen wir eine Funktion $f \in H(G)$ die nur endlich viele Nullstellen hat, so hat das Problem die einfache Lösung

$$f(z) := \prod_{w \in N} (z - w)^{\alpha(w)} .$$

Wir wollen also im Folgenden stets annehmen, dass N unendlich ist. Weiters können wir stets voraussetzen, dass $0 \notin N$ ist, denn ist f die gesuchte Funktion für $N \setminus \{0\}$, so leistet $z^{\alpha(0)} f(z)$ das Gewünschte.
Man könnte versuchen, das Produkt $\prod_{w \in N}(z - w)^{\alpha(w)}$ zu betrachten. Dieses wird jedoch im Allgemeinen nicht konvergent sein. Wir werden die Konvergenz erzwingen, indem wir konvergenzerzeugende Faktoren dazu geben. Hierfür setzen wir $E_0(z) := (1 - z)$ und

$$E_p(z) := (1 - z) \exp\big(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\big), \quad p \in \mathbb{N} .$$

Die Funktionen E_p heißen auch *Weierstraßsche Elementarfaktoren.*

4.4.2 Lemma. *Für $|z| \leq 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

Beweis. Für $p = 0$ ist nichts zu zeigen, sei also $p \geq 1$. Es gilt $E_p(0) = 1$ und man berechnet

$$E_p'(z) = (-1) \exp(z + \ldots + \frac{z^p}{p}) + (1 - z) \exp(z + \ldots + \frac{z^p}{p})(1 + z + \ldots + z^{p-1}) =$$

$$= \exp(z + \ldots + \frac{z^p}{p})\Big[- 1 + 1 - z^p \Big] = -z^p \exp(z + \ldots + \frac{z^p}{p}) .$$

Also hat $E_p'(z)$ eine Nullstelle der Ordnung p bei $z = 0$, und daher $1 - E_p(z)$ eine Nullstelle der Ordnung $p + 1$. Wie man durch Einsetzen in die Exponentialreihe sieht, ist in der Potenzreihenentwicklung von $\exp(z + \ldots + \frac{z^p}{p})$ um 0 jeder Koeffizient nichtnegativ. Daher gilt dasselbe für $-E_p'(z) = (1 - E_p(z))'$ und infolge für

$$\varphi(z) := \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stets $a_n \geq 0$, weshalb für $|z| \leq 1$

$$|\varphi(z)| \leq \varphi(|z|) \leq \varphi(1) = 1 .$$

❑

4.4.3 Bemerkung. Wir wollen an die folgende elementare Aussage über Konvergenz von Produkten erinnern: Seien f_n stetige komplexwertige Funktionen auf einer Menge M, und sei die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut konvergent, dh. $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Dann hat für hinreichend großes L jede der Funktionen f_n, $n \geq L$, Werte in $K_{\frac{1}{2}}(0)$. Bezeichnet $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ den Zweig vom Logarithmus mit $\log(1) = 0$, so folgt wegen

$$|\log(1+z)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n}| \leq |z| \cdot \underbrace{\sup_{\zeta \in K_{\frac{1}{2}}(0)} |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^n}{n+1}|}_{=:C<+\infty}, \quad z \in K_{\frac{1}{2}}(0)\,,$$

dass auch die Funktionenreihe $\sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n)$ absolut konvergiert, wobei $\| \sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n)\|_\infty \leq \sum_{n=L}^{\infty} \|\log(1+f_n)\|_\infty \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Für $k > L$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left\| \prod_{n=L}^{k} (1+f_n) - \exp(\sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n)) \right\|_\infty = \\
&\left\| \exp(\sum_{n=L}^{k} \log(1+f_n)) - \exp(\sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n)) \right\|_\infty \leq \\
&\left\| \exp(\sum_{n=L}^{k} \log(1+f_n)) \right\|_\infty \left\| \exp(\sum_{n=k+1}^{\infty} \log(1+f_n)) - 1 \right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Da die Potenzreihen von $z \mapsto \exp(z)$ und von $z \mapsto \exp(z) - 1$ nichtnegative Koeffizienten haben, lässt sich dieser Ausdruck nach oben abschätzen durch

$$\exp(\sum_{n=L}^{\infty} \|\log(1+f_n)\|_\infty) \left(\exp(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\log(1+f_n)\|_\infty) - 1 \right) \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Also konvergiert $\prod_{n=L}^{\infty}(1+f_n)$ gleichmäßig gegen $\exp(\sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n))$, und infolge auch

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n) = \prod_{n=1}^{L-1}(1+f_n) \cdot \prod_{n=L}^{\infty}(1+f_n) \tag{4.2}$$

gleichmäßig gegen $\prod_{n=1}^{L-1}(1+f_n) \cdot \exp(\sum_{n=L}^{\infty} \log(1+f_n))$. Insbesondere ist $w \in M$ eine Nullstelle von $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ genau dann, wenn $\prod_{n=1}^{L-1}(1+f_n)(w) = 0$, dh. wenn w Nullstelle von einer der Funktionen $(1+f_n)$, $n = 1, \dots, L-1$ ist. Weil $\prod_{n=L}^{\infty}(1+f_n)$ und auch alle $1+f_n$, $n \geq L$, nullstellenfrei sind, ist somit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{w \in M : (1+f_n)(w) = 0\} \tag{4.3}$$

genau die Nullstellenmenge von $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$.
Ist M eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und sind alle f_n holomorph, so ist es auch $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$; vgl. Lemma 1.12.1. Ist w aus der Menge in (4.3), so ist w Nullstelle des ersten Faktors in (4.2), wobei die Nullstellenvielfachheit $\alpha(w)$ von $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ bei w mit der Summe der Nullstellenvielfachheiten der Funktionen $(1+f_1), \dots, (1+f_{L-1})$ bei w ist übereinstimmt. Also gilt

$$\alpha(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{1+f_n}(w)\,.$$

◊

Beweis. (Satz 4.4.1, $G = \mathbb{C}$) Zunächst sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, welche genau N als Bild hat, dh. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = N$, und so, dass $\#\{n \in \mathbb{N} : a_n = w\} = \alpha(w)$ für alle $w \in N$, wobei wir wie eingangs bemerkt $0 \notin N$ voraussetzen können. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in $G = \mathbb{C}$ hat, gilt $|a_n| \to +\infty$. Wir wählen eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass für jedes $r > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{p_n+1} < \infty\,.$$

Zum Beispiel hat die Folge $p_n = n$ diese Eigenschaft, da wegen $|a_n| \to \infty$ ab einem gewissen Index N sicher $\frac{r}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}$ und damit

$$\sum_{n=N}^{\infty}\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{n+1} \leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} < \infty$$

gilt. Wegen Lemma 4.4.2 ist für jedes z mit $|z| \leq r$, und $n(r)$ so groß, dass $|a_n| \geq r$ für alle $n \geq n(r)$,

$$\Big|1 - E_{p_n}(\frac{z}{a_n})\Big| \leq \Big|\frac{z}{a_n}\Big|^{p_n+1} \leq \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{p_n+1},$$

dh. $\|1 - E_{p_n}(\frac{\cdot}{a_n})|_{K_r(0)}\|_\infty \leq \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{p_n+1}$, $n \geq n(r)$. Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|1 - E_{p_n}(\frac{\cdot}{a_n})|_{K_r(0)}\|_\infty < +\infty\,.$$

Wegen Bemerkung 4.4.3 konvergiert damit das Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{a_n}\Big) \tag{4.4}$$

gleichmäßig auf $K_r(0)$. Insbesondere konvergiert dieses Produkt auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ – also lokal gleichmäßig; vgl. Korollar 3.1.8. Mit Bemerkung 4.4.3 angewandt auf $M = U_r(0)$ folgt, dass $N \cap U_r(0)$ genau Nullstellenmenge von $f|_{U_r(0)}$ ist, und für $w \in N \cap U_r(0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{E_{p_n}(\frac{\cdot}{a_n})} = \#\{n \in \mathbb{N} : a_n = w\} = \alpha(w)$$

die Nullstellenvielfachheit von f bei w ist.

❑

Beweis. (Satz 4.4.1, $G \neq \mathbb{C}$) Wir unterteilen zunächst N in zwei Teilmengen, wobei sich die eine nur gegen ∂G hin häufen kann und die andere höchstens gegen ∞. Dazu sei

$$K_n := \Big\{z \in G :\ d(z, \mathbb{C}\setminus G) \geq \frac{1}{n},\ n \leq |z| \leq n+1\Big\}\,.$$

Dann ist jedes K_n, und damit auch jede endliche Vereinigung $\bigcup_{n=1}^m K_n$ eine kompakte Teilmenge von G. Setze nun

$$A := N \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,\quad B := N \setminus A = N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Wir zeigen zunächst, dass A keinen endlichen Häufungspunkt hat. Wäre nämlich $w \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von A, so existierten unendlich viele Punkte in $A \cap U_1(w)$. Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq |w| + 1$ gilt aber $A \cap U_1(w) \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} K_n$, und letztere Menge enthält aber nur endlich viele Punkte aus $N \supseteq A$.
Wähle nach dem bereits bewiesenen Teil „$G = \mathbb{C}$" des Satzes eine Funktion $f_A \in H(\mathbb{C}) \subseteq H(G)$ mit Nullstellen A so, dass $\alpha(w)$ für jedes $w \in A$ die Nullstellenvielfachheit von f_A bei w ist.
Betrachte nun B. Für $m \in \mathbb{N}$ die Menge $\{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m},\ |z| \leq m\}$ kompakt und enthält daher nur endlich viele Punkte aus B. Wegen

$$B \cap \{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m},\ |z| \geq m\} \subseteq (N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cap \bigcup_{j \geq m} K_j = \emptyset$$

enthält auch $\{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m}\} = \{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m},\ |z| \leq m\} \cup \{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m},\ |z| \geq m\}$ nur endlich viele Punkte aus B.
Ist B endlich, so wähle ein Polynom $f_B \in H(\mathbb{C}) \subseteq H(G)$ mit Nullstellen B und mit Nullstellenvielfachheit $\alpha(w)$ für jedes $w \in B$. Ist B unendlich, so sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Bild B und so, dass $\#\{n \in \mathbb{N} : b_n = w\} = \alpha(w)$ für alle $w \in B$. Da $\{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{m}\}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen endlichen Schnitt mit B hat, folgt $\lim_{n\to\infty} d(b_n, \mathbb{C} \setminus G) = 0$. Wir wählen auch $c_n \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $|b_n - c_n| \leq 2 \cdot d(b_n, \mathbb{C} \setminus G)$, und setzen

$$f_B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\Big).$$

Wir zeigen, dass $f_B \in H(G)$. Ist $K \subseteq G$ kompakt, so gilt

$$\sup_{z \in K} \Big|\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\Big| \leq |b_n - c_n| \frac{1}{d(K, \mathbb{C} \setminus G)} \leq \frac{2}{d(K, \mathbb{C} \setminus G)} d(b_n, \mathbb{C} \setminus G) \to 0\,.$$

Also gilt, für hinreichend große Indizes n, dass $|\frac{b_n - c_n}{z - c_n}| \leq \frac{1}{2}$, $z \in K$, und weiter

$$\sup_{z \in K} \Big|1 - E_n\Big(\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\Big)\Big| \leq \sup_{z \in K} \Big|\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\Big|^{n+1} \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}, z \in K\,.$$

Wie im bereits bewiesenen Teil „$G = \mathbb{C}$" des Satzes folgt daraus, dass $f_B \in H(G)$ mit Nullstellenmenge B und $\#\{n \in \mathbb{N} : a_n = w\} = \alpha(w)$ für alle $w \in B$. Setzt man $f := f_A \cdot f_B$, so erhalten wir das Gewünschte.

❑

Wir wollen noch eine gebräuchliche Variante des Produktsatzes von Weierstraß für $G = \mathbb{C}$ formulieren.

4.4.4 Korollar. *Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und sei (a_n) die (endliche oder unendliche) Folge der Nullstellen $\neq 0$ von f, wobei jede Nullstelle gemäß ihrer Vielfachheit oft vorkommt. Sei $p_n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge so, dass für jedes $r > 0$*

$$\sum_n \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{p_n+1} < \infty\,.$$

Dann existiert $g \in H(\mathbb{C})$ mit ($\alpha_f(0)$ ist die Nullstellenvielfachheit von f bei 0)

$$f(z) = z^{\alpha_f(0)} \exp(g(z)) \cdot \prod_n (1 - \frac{z}{a_n}) \exp\Big(\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}(\frac{z}{a_n})^{p_n}\Big),$$

wobei das Produkt (falls es überhaupt ein unendliches Produkt ist) lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis. Sei $f_1 := \prod_n (1 - \frac{z}{a_n}) \exp(\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}(\frac{z}{a_n})^{p_n})$. Nach dem Beweis von Satz 4.4.1 ist dieses Produkt lokal gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{C}$, d.h. $f_1 \in H(\mathbb{C})$, und hat bis auf 0 die selben Nullstellen wie f inklusive übereinstimmender Nullstellenvielfachheit. Also ist $\frac{f(z)}{z^{\alpha_{f}(0)} f_1(z)} \in H(\mathbb{C})$ nullstellenfrei und lässt sich daher in der Form $\exp(g)$ schreiben. ❑

4.4.5 Korollar (*). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $P \subseteq G$ diskret in G, und $P \ni w \mapsto \hat{g}_w$ eine Abbildung mit*

$$\hat{g}_w(z) = \sum_{k=-\infty}^{m_w} b_k (z-w)^k$$

wobei $m_w \in \mathbb{Z}$ und die Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann existiert eine Funktion $f \in H(G \setminus P)$, deren Laurent-Entwicklung an der Stelle $w \in P$ die Gestalt

$$f(z) = \hat{g}_w(z) + \sum_{k > m_w} \beta_k (z-w)^k$$

hat.

Beweis. Sei $F(z) \in H(G)$ mit Nullstellenmenge $N := \{w \in P : m_w \geq 0\}$ und Nullstellenvielfachheit $\alpha(w) = m_w + 1$ für $w \in N$.
Für $w \in P$ sei g_w der Hauptteil von $\frac{\hat{g}_w}{F}$ an der Stelle w. Sei weiters $f_1 \in H(G \setminus P)$ so, dass der Hauptteil von f_1 an w gleich g_w ist. Dann hat die Funktion $f(z) := f_1(z) \cdot F(z)$ die gewünschte Eigenschaft. ❑