Funktionalanalysis 2

WS 2022-2023

Michael Kaltenbäck

Vorwort

Diese Skriptum ist das Ergebnis von drei Zyklen Funktionalanalysis 2 Vorlesung. Es ist auf der Basis unter anderem der Skripten von Heinz Langer und Martin Blümlinger entstanden. Mehrere Textteile habe ich aus dem Funktionalanalysis 1 Skriptum importiert, um das gegenständliche Skriptum möglichst in sich geschlossen präsentieren zu können. Schließlich möchte ich auch Maximilian Kleinert, Manuel Weberndorfer und Christoph Neuner für beigesteuerte Textpassagen danken.
Trotz dieses Fleckerlteppichs hoffe ich, dass ein gut lesbares und – viel wichtiger – ein interessantes Werk entstanden ist, das dem Leser einen guten Einblick in die vorgestellten Gebiete der Funktionalanalysis bietet. Sicherlich ist das hier gebotene nur eine Auswahl. Der interessierte Leser möge sich tiefer gehende Literatur zu jenen Themen suchen, die ihn besonders interessieren.

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gelfandtransformation

1.1 Banachalgebren

Der Vollständigkeit halber wollen wir nochmals die wichtigsten Ergebnisse der elementaren Theorie der Banachalgebren aus der Funktionalanalysis 1, [4], wiederholen. Sei X ein Banachraum. Betrachte $L_b(X) := L_b(X, X)$. Dann ist $L_b(X)$ versehen mit der Operatornorm nicht nur ein Banachraum sondern auch eine Algebra: Für $S, T \in L_b(X)$ definiere

$$S \cdot T : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & S(T(x)) \end{cases}$$

Klarerweise ist diese Operation mit den Vektorraumoperationen verträglich, in dem Sinne, dass

$$S(T+R) = ST + SR,\ (S+T)R = SR + TR,\ \lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T),$$

und assoziativ,

$$S(TR) = (ST)R.$$

Sie ist auch mit der Norm von $L_b(X)$ verträglich, denn es gilt

$$\|(S \cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

also haben wir

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Gemäß der folgenden Definition ist $L_b(X)$ versehen mit der Hintereinanderausführung eine sogenannte Banachalgebra. Weil die spektralen Eigenschaften von Elementen $T \in L_b(X)$, die uns hier interessieren, nur von der Tatsache abhängen, dass es sich um eine Banachalgebra handelt, wollen wir in diesem Abschnitt diese allgemeineren Objekte studieren.

Definition 1.1.1. Sei $A \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$.

(i) Ist A versehen mit einer bilinearen Abbildung

$$A \times A \to A,\quad (a, b) \mapsto ab,$$

die assoziativ ist, dh.

$$a(bc) = (ab)c,\quad \text{für alle}\ \ a, b, c \in A,$$

so nennt man A eine *Algebra*.

(*ii*) Ein $e \in A$ heißt *Einselement* einer Algebra A, falls

$$ae = ea = a, \quad \text{für alle} \quad a \in A.$$

(*iii*) Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$ab = ba, \quad \text{für alle} \quad a, b \in A, .$$

(*iv*) Eine *Unteralgebra B* einer Algebra A ist dabei ein linearer Unterraum von A, der unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

(*v*) Ist A versehen mit einer Norm $||.||$, sodass

$$||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||, \quad \text{für alle} \quad a, b \in A,$$

so spricht man von einer *normierten Algebra*. Ist obendrein $(A, ||.||)$ ein Banachraum, so spricht man von einer *Banachalgebra*.

(*vi*) Ist A eine Banachalgebra und $e \in A$ ein Einselement, so heißt selbiges *normiert*, falls $||e|| = 1$. In dem Fall spricht man von einer Banachalgebra mit Eins .

Wir beschränken uns im folgenden auf Algebren über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Viele, wenn auch nicht alle, Beispiele und Resultate lassen sich auch für Algebren über $\mathbb{R}$ herleiten. Eine Algebra ist also nichts anderes als ein *Ring*, der noch zusätzlich eine Vektorraumstruktur hat.

Fakta 1.1.2.

1. Sei A eine Algebra. Ist $a \in A$, so folgt für irgend ein $x \in A$, $0a = (x - x)a = (xa) - (xa) = 0 = (ax) - (ax) = a(x - x) = a0$. Also ist immer $0a = a0 = 0$. Wegen $A \neq \{0\}$ kann 0 kein Einselement sein.

2. Einselemente, falls vorhanden, sind offensichtlich eindeutig, denn ist auch mit e auch $\tilde{e}$ ein solches, so gilt $e = e\tilde{e} = \tilde{e}$.

3. Eine ganz wichtige Eigenschaft von normierten Algebren ist die Stetigkeit der Abbildung $(a, b) \mapsto ab$, wenn man $A \times A$ mit der Maximumsnorm oder mit der Summennorm (dh. mit der Produkttopologie) versieht. Konvergiert nämlich $(a_n, b_n) \to (a, b)$ in $A \times A$, dh.

$$||(a_n, b_n) - (a, b)|| = \max(||a_n - a||, ||b_n - b||) \to 0, \ n \to \infty,$$

so sind die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt und daher konvergiert auch

$$||a_n b_n - ab|| = ||a_n(b_n - b) + (a_n - a)b|| \leq ||a_n|| \cdot ||b_n - b|| + ||b|| \cdot ||a_n - a||$$

gegen Null.

Offensichtlich ist $L_b(X)$ eine Banachalgebra mit Eins, wobei die identische Abbildung $I : X \to X$ das Einselement abgibt. $L_b(X)$ ist im Allgemeinen aber nicht kommutativ. Es gibt aber noch viele weitere Beispiele.

Beispiel 1.1.3.

(*i*) Eine bekannte kommutative Algebra mit Einselement ist $\mathbb{C}[z]$, dh. alle Polynome $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten. Die Abbildung $(p, q) \mapsto pq$ ist dabei nichts anderes als die bekannte Polynommultiplikation und das Einselement ist das konstante Polynom 1.

(*ii*) Ist X ein topologischer Raum, und bezeichnet $C_b(X, \mathbb{C})$ den Vektorraum aller beschränkten und stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in X} |f(t)|$, so ist $C_b(X, \mathbb{C})$ bekannterweise ein Banachraum. Betrachtet man nun die Abbildung

$$C_b(X, \mathbb{C}) \times C_b(X, \mathbb{C}) \to C_b(X, \mathbb{C}), \quad (f, g) \mapsto f \cdot g,$$

also die punktweise Multiplikation, so gilt $\|f \cdot g\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. Also ist $C_b(X, \mathbb{C})$ eine offensichtlich auch kommutative Banachalgebra.

Schließlich ist die konstante Einsfunktion offensichtlich ein normiertes Einselement.

(*iii*) Der Raum $C_0(X, \mathbb{C})$ aller im unendlichen verschwindenden Funktion aus $C_b(X, \mathbb{C})$, dh. jene $f \in C_b(X, \mathbb{C})$, die

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists K \subseteq X \text{ kompakt } : |f(t)| < \epsilon,\ \forall t \in X \setminus K,$$

erfüllen, ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{C})$. Außerdem gilt $f \cdot g \in C_0(X, \mathbb{C})$, wenn $f, g \in C_0(X, \mathbb{C})$. Also ist $C_0(X, \mathbb{C})$ eine abgeschlossene Unteralgebra und somit für sich selber genommen eine Banachalgebra. Im Allgemeinen hat diese Banachalgebra aber kein Einselement.

(*iv*) Der Raum ℓ^∞ aller beschränkten reel- bzw. komplexwertigen Folgen versehen mit der punktweisen Multiplikation ist ebenfalls eine Banachalgebra mit Einselement. In der Tat ist das ein Spezialfall des vorherigen Beispiels, wenn man $X = \mathbb{N}$ versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nimmt.

Definition 1.1.4. Sei A eine Algebra mit Einselement. Ein Element $a \in A$ heißt *invertierbar* , falls es ein $b \in A$ gibt mit $ab = ba = e$. Weiters sei

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : a \text{ ist invertierbar}\}.$$

Für ein $a \in A$ bezeichne

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \in \mathrm{Inv}(A)\}$$

die *Resolventenmenge* von a und

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \notin \mathrm{Inv}(A)\}$$

das *Spektrum* von a. Für $a - \lambda e$ schreibt man auch kurz $a - \lambda$, und für $\lambda \in \rho(a)$ setzen wir $R_\lambda(a) := (a - \lambda)^{-1}$. Die Abbildung $\lambda \mapsto R_\lambda(a)$ heißt auch kurz die *Resolvente von a*.

Fakta 1.1.5.

1. Wegen $0a = a0 = 0 \neq e$ ist sicher $0 \notin \mathrm{Inv}(A)$, dh. $\mathrm{Inv}(A) \neq A$.

2. Hat $a \in A$ eine Links- und eine Rechtsinverse, dh. $ca = e = ab$ für gewisse $b, c \in A$, so folgt wegen $c = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b$, dass $a \in \text{Inv}(A)$. Insbesondere ist das $b \in A$ mit $ab = ba = e$ eindeutig, wird mit a^{-1} bezeichnet und heißt Inverses von a.

3. Mit dem letzten Punkt überpüft man leicht, dass $(\text{Inv}(A), \cdot)$ eine Gruppe mit neutralen Element e ist.

4. Für $a \in \text{Inv}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt sicherlich $\lambda\, a \in \text{Inv}(A)$ mit $(\lambda\, a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, a^{-1}$.

5. Für $x, y \in A$ folgt aus $e + xy \in \text{Inv}(A)$ die Gleichheit $(e + yx)(e - y(e + xy)^{-1}x) = (e + yx) - yx = e$, weshalb $e + yx$ eine Rechtsinverse hat. Genso zeigt man die Existenz einer Linksinversen, wodurch $e + yx \in \text{Inv}(A)$. Unschwer leitet man davon ab, dass $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$.

Bemerkung 1.1.6. In $L_b(X)$ ist ein $T \in L_b(X)$ genau dann invertierbar im Sinne von Definition 1.1.4, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\operatorname{ran} T = X$ und wenn $T^{-1} : X \to X$ auch beschränkt ist. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung ist die Tatsache, dass $T^{-1} : X \to X$ beschränkt ist aber automatisch erfüllt, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\operatorname{ran} T = X$.
Für $T \in L_b(X)$ ist also $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\rightsquigarrow$ $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.
- $\rightsquigarrow$ $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$.

Trifft (i) zu, so heißt λ ein *Eigenwert* von T, $\ker(T - \lambda I)$ der *Eigenraum* von T zu λ, und jedes $x \in \ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ ein *Eigenvektor* von T zu λ. Die Menge aller Eigenwerte bezeichnet man auch als das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$ von T.
Den Rest von $\sigma(T)$ unterteilt man noch in das *stetige Spektrum* $\sigma_c(T)$, welches die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ umfasst, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ dicht in X, aber nicht ganz X ist, sowie das *Residualspektrum* $\sigma_r(T)$. Das ist die Menge aller Punkte $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\overline{\operatorname{ran}(T - \lambda I)} \neq X$. Offenbar gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \,\dot\cup\, \sigma_c(T) \,\dot\cup\, \sigma_r(T)\,.$$

Um die Notation zu vereinfachen, schreibt man oft $T - \lambda$ anstelle von $T - \lambda I$.

Sei A Algebra mit Einselement. Ist $a \in A$, und ist $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$, so kann man definieren

$$p(a) := \alpha_n a^n + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 e\,.$$

Klarerweise ist $p(a)$ wieder ein Element von A.
Betrachte für festes $a \in A$ die Abbildung

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbb{C}[z] & \to & A \\ p & \mapsto & p(a) \end{cases}$$

Nun sind A und $\mathbb{C}[z]$ Algebren über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Wie man unmittelbar nachrechnet, ist ϕ_a ein *Algebra Homomorphismus*, dh. eine lineare und mit der Multiplikation verträgliche Abbildung. Man spricht vom sogenannten *Einsetzhomomorphismus*. Insbesondere ist das Bild von ϕ_a eine kommutative Unteralgebra von A.

Satz 1.1.7 (Spektralabbildungssatz)**.** *Sei A eine Algebra mit Einselement, und sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt für $a \in A$*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)),$$

wobei $p(\sigma(a)) := \{p(z) : z \in \sigma(a)\}$ für nicht konstante p und $p(\sigma(a)) := \{\mu\}$, wenn $p(z) = \mu$, wobei $\mu \in \mathbb{C}$.
Insbesondere gilt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für konstante Polynome $\mu \in \mathbb{C}$ ist $p(a) = \mu\, e$ und damit $\sigma(p(a)) = \{\mu\} = p(\sigma(a))$.
Im Folgenden sei $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstant, dh. $\alpha_n \neq 0$ und $n \geq 1$.
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$p(z) - \lambda = \alpha_n (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$$

mit gewissen nicht notwendigerweise verschiedenen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diese Zahlen sind offensichtlich die Nullstellen des Polynoms $p(z) - \lambda$, dh. $p^{-1}(\lambda) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Also gilt $\lambda \in p(\sigma(a))$ genau dann, wenn mindestens eines der dazugehörigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $\sigma(a)$ liegt. Geht man zu den jeweiligen Negationen über, so liegt λ nicht in $p(\sigma(a))$ genau dann, wenn alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \rho(a)$ liegen.
Wir haben

$$p(a) - \lambda = \alpha_n (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n),$$

wobei es in diesem Produkt nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, da $\phi_a(\mathbb{C}[z])$ ja eine kommutative Unteralgebra von A ist.
Ist $\lambda \notin p(\sigma(a))$ bzw. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \rho(a)$, dh. $a - \lambda_j \in \mathrm{Inv}(A)$, $j = 1, \ldots, n$, so folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{Inv}(A)$ eine Gruppe ist, dass auch ihr Produkt und in Folge $p(a) - \lambda$ in $\mathrm{Inv}(A)$ liegt. Also liegt λ nicht in $\sigma(p(a))$.
Liegt umgekehrt λ nicht in $\sigma(p(a))$, dh. $p(a) - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, so folgt für jedes $j = 1, \ldots, n$

$$(a - \lambda_j)[\alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k)\, (p(a) - \lambda)^{-1}] =$$
$$[(p(a) - \lambda)^{-1}\, \alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k)](a - \lambda_j) = e\,.$$

Also sind alle $(a - \lambda_j)$ invertierbar, siehe Fakta 1.1.5. Also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \rho(a)$ bzw. $\lambda \notin p(\sigma(a))$.
Schließlich folgt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$, wenn man das Bewiesene auf $p(z) = z^n$ anwendet. ■

Lemma 1.1.8. *Sei A eine Algebra mit Einselement und $a \in \mathrm{Inv}(A)$, also $0 \notin \sigma(a)$. Dann gilt $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Beweis. Aus $a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ folgt $0 \notin \sigma(a)$. Für $\lambda \neq 0$ gilt wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathrm{Inv}(A)$

$$a - \lambda e \in \mathrm{Inv}(A) \Leftrightarrow (\frac{1}{\lambda} e - a^{-1}) = \frac{1}{\lambda} a^{-1}(a - \lambda e) \in \mathrm{Inv}(A).$$

■

Lemma 1.1.9. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins.*

- *Für jedes* $a \in A$ *mit* $\|a\| < 1$ *gilt* $e - a \in \operatorname{Inv}(A)$ *mit*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \tag{1.1}$$

wobei $a^0 := e$ *und wobei diese A-wertige Reihe absolut konvergiert.*

- $\operatorname{Inv}(A)$ *ist eine offene Teilmenge von A. Genauer gilt für* $a \in \operatorname{Inv}(A)$*, dass auch*

$$U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \operatorname{Inv}(A). \tag{1.2}$$

- *Die Abbildung* $a \mapsto a^{-1}$ *bildet* $\operatorname{Inv}(A)$ *bijektiv und stetig auf* $\operatorname{Inv}(A)$ *ab.*

Beweis.

- Wegen $\|a^n\| \le \|a\|^n$ und $\|a\| < 1$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ absolut. Da $c \mapsto bc$ für jedes feste $b \in A$ stetig ist (siehe Fakta 1.1.2) folgt

$$a\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n = \lim_{N\to\infty} a \sum_{n=0}^{N} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - e,$$

und somit $e = (e-a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Genauso zeigt man $e = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,(e-a)$.

- Ist $a \in \operatorname{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, so gilt $a - b = a(e - a^{-1}\,b)$, wobei $\|a^{-1}\,b\| < \|a^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1$. Also existiert $(e - a^{-1}\,b)^{-1}$, wobei

$$(a-b)^{-1} = (e - a^{-1}\,b)^{-1}\,a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}b)^n\,a^{-1} \tag{1.3}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz.

Somit gilt $a + U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(0) = U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \operatorname{Inv}(A)$. Insgesamt ist daher $\operatorname{Inv}(A)$ offen.

- Aus (1.3) folgt für $a \in \operatorname{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$

$$\begin{aligned}\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}b)^n\,a^{-1}\| \le \\ \sum_{n=1}^{\infty} \|(a^{-1}b)^n\,a^{-1}\| \le \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}b\|^n = \\ \frac{\|a^{-1}\|\cdot\|a^{-1}b\|}{1-\|a^{-1}b\|} \le \frac{\|a^{-1}\|^2}{1-\|a^{-1}\|\,\|b\|}\cdot\|b\|,\end{aligned}$$

wobei $\|a^{-1}b\| \le \|a^{-1}\|\,\|b\| < 1$. Diese Abschätzung zeigt, dass aus $b_n \to 0$ folgt, dass $(a-b_n)^{-1} \to a^{-1}$. Also ist $a \mapsto a^{-1}$ stetig.

∎

Lemma 1.1.10. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$.*

⇝ *$\rho(a)$ ist offen und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Genauer gilt $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.*

⇝ *Lokal um jedes $\mu \in \rho(a)$ ist die Funktion $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1} = R_\lambda(a)$ in eine A-wertige Potenzreihe entwickelbar. Genauer gilt, dass $U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu) \subseteq \rho(a)$ bzw. äquivalent dazu*

$$\|R_\mu(a)\| \geq \frac{1}{\mathrm{d}(\mu, \sigma(a))}, \ \mu \in \rho(a)\,, \tag{1.4}$$

und dass für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu)$

$$R_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n \, R_\mu(a)^{n+1} \tag{1.5}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz in A.

⇝ *Es gilt die* Resolventengleichung

$$R_\lambda(a) - R_\mu(a) = (\lambda - \mu) R_\lambda(a) R_\mu(a), \ \lambda, \mu \in \rho(a)\,.$$

⇝ *Schließlich gilt für* $0 < |\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$

$$R_{\frac{1}{\zeta}}(a) = \Big(a - \frac{1}{\zeta} e\Big)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n \tag{1.6}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz, und damit $\lim_{|\mu| \to +\infty} \|R_\mu(a)\| = 0$

Beweis.

⇝ Die Abbildung $\lambda \mapsto a - \lambda e$ ist eine stetige Funktion von $\mathbb{C}$ nach A. Nun ist $\rho(a)$ gerade das Urbild von $\mathrm{Inv}(A)$ unter dieser Abbildung und daher offen. $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ ist somit abgeschlossen.

Aus $|\lambda| > \|a\|$ folgt wegen $\|\frac{1}{\lambda} a\| < 1$ die Invertierbarkeit von $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda} a)$, dh. $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.

⇝ Sei $\mu \in \rho(a)$. Für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu)$ gilt $\|(a - \lambda e) - (a - \mu e)\| = |\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R_\mu(a)\|}$. Wegen (1.2) ist $\lambda \in \rho(a)$, wobei wegen (1.3)

$$R_\lambda(a) = \Big((a - \mu e) - [(a - \mu e) - (a - \lambda e)]\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (a - \mu e)^{-n-1}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz.

⇝ Für $\mu, \lambda \in \rho(a)$ gilt

$$R_\lambda(a) - R_\mu(a) = R_\lambda(a)\big(e - (a - \lambda e) R_\mu(a)\big) =$$

$$= R_\lambda(a)\big((a - \mu e) - (a - \lambda e)\big) R_\mu(a) = (\lambda - \mu) R_\lambda(a) R_\mu(a)\,.$$

$\rightsquigarrow$ Für $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$ gilt sicher $\frac{1}{\zeta} \in \rho(a)$, wobei mit (1.1)

$$(\frac{1}{\zeta}e - a)^{-1} = \zeta(e - \zeta a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n,$$

im Sinne der absoluten Konvergenz. Da Grenzfunktionen von Potenzreihen mit Konvergenzradius R stetig auf $U_R(0)$ sind, gilt $\lim_{|\mu| \to +\infty} \|R_\mu(a)\| = \lim_{\zeta \to 0} \|R_{\frac{1}{\zeta}}(a)\| = 0.$

■

Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und X ein Banachraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$, so heißt eine Funktion $\varphi : G \to X$ *analytisch*, wenn sie lokal um jeden Punkt $\mu \in G$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, dh. $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - \mu)^n a_n$ für $|z - \mu| < r$ mit einem hinreichend kleinen $r > 0$ und mit $a_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Insbesondere ist die Funktion $\lambda \mapsto R_\lambda(a) = (a - \lambda e)^{-1}$ auf $\rho(a)$ gemäß Lemma 1.1.10 analytisch.
Für analytische Funktionen gelten folgende Resultate, die wir aber hier nicht beweisen wollen. Der interessierte Leser sei auf die entsprechende Fachliteratur, z.B. [2] oder [1] verwiesen.

Satz 1.1.11. *Sei $\varphi : G \to X$ analytisch. Ist $H = \{\frac{1}{z} : z \in G \setminus \{0\}\}$, so ist die Abbildung $z \mapsto \varphi(\frac{1}{z})$ auf H ebenfalls analytisch.*

Satz 1.1.12. *Sei $\varphi : G \to X$ analytisch und sei $z_0 \in G$. Dann sind die Koeffizienten der Potenzreihe, in die φ lokal um z_0 entwickelbar ist, dh.*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n$$

für alle $z \in U_r(z_0)$ für ein hinreichend kleines $r > 0$, eindeutig durch $\varphi|_{U_r(z_0)}$ bestimmt. Zudem konvergiert diese Potenzreihe absolut sogar auf dem größten Kreis $U_R(z_0)$, der noch in G enthalten ist, und stimmt dort mit φ überein. Insbesondere ist

$$R = \sup\{\rho \in (0, +\infty) : U_\rho(z_0) \subseteq G\} \leq \frac{1}{\limsup \|a_n\|^{\frac{1}{n}}}.$$

Satz 1.1.13 (von Liouville)**.** *Sei $\varphi : \mathbb{C} \to X$ analytisch. Ist φ beschränkt, so muss φ sogar konstant sein.*

Wir haben in Lemma 1.1.10 gesehen, dass das Spektrum ganz im abgeschlossenen Kreis um 0 mit Radius $\|a\|$ liegen muss. Im allgemeinen kann $\sigma(a)$ aber wesentlich kleiner sein. Wir definieren den *Spektralradius* $r(a)$ als

$$r(a) := \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| \,.$$

Es ist eine wichtige Feststellung, dass sich diese algebraische Größe mit Hilfe der analytischen Größe $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ ausdrücken lässt.

Satz 1.1.14. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt immer $\sigma(a) \neq \emptyset$ und*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \,.$$

Beweis. Im Falle $\sigma(a) = \emptyset$ wäre $\varphi := (\lambda \mapsto R_\lambda(a))$ eine analytische Abbildung von $\mathbb{C}$ nach A. Zudem gilt $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \|R_\lambda(a)\| = 0$; siehe unmittelbar nach (1.6).
Da stetige Funktionen beschränkt auf Kompakta sind, folgt damit die Beschränktheit der Funktion φ. Wegen Satz 1.1.13 zusammen mit $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \varphi(\lambda) = 0$ folgt $0 = \varphi(\lambda) = R_\lambda(a)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen $0 \notin \mathrm{Inv}(A)$ ist das aber ein Widerspruch.

Um $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ zu beweisen, stellen wir zunächst fest, dass wegen Satz 1.1.7 die Beziehungen $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ und damit

$$r(a^n) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^n)\} = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a)^n$$

gelten. Die aus Lemma 1.1.10 bekannte Tatsache, dass $r(a) \le \|a\|$, angewandt auf a^n ergibt dann $r(a) = r(a^n)^{\frac{1}{n}} \le \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Also muss

$$r(a) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Es bleibt $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(a)$ zu zeigen. Dafür sei wieder $\varphi : \rho(a) \to A$ definiert durch $\varphi(\lambda) = R_\lambda(a)$. Wegen Satz 1.1.11 ist $h : \zeta \mapsto \varphi(\frac{1}{\zeta})$ auf

$$D := \{\frac{1}{z} : z \in \rho(a) \setminus \{0\}\}$$

analytisch. Aus $\sigma(a) = \rho(a)^c \subseteq K_{r(a)}(0)$ folgt $D \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\}$.
Für $\zeta \in U_{\frac{1}{\|a\|}}(0) \setminus \{0\}$ $(\subseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\})$ folgt aus (1.6)

$$h(\zeta) = R_{\frac{1}{\zeta}}(a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n, \tag{1.7}$$

wobei diese Reihe absolut konvergiert. Insbesondere können wir h auf die Menge $D \cup \{0\} \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ analytisch fortsetzen, indem man $h(0) = 0$ setzt.
Aus Satz 1.1.12 folgt nun, dass die Reihe in (1.7) sogar auf $U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ konvergiert. Da die Koeffizientenfolge dann sicher eine Nullfolge und somit beschränkt ist, folgt für festes $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$, dass

$$\|\zeta^{n+1} a^n\| \le C,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

mit einem $C \ge 0$. Daraus schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\zeta|^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{|\zeta|}.$$

Da $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$ beliebig war, gilt sogar $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(a)$. ■

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir noch zwei Resultate bringen, die in unmittelbaren Zusammenhang mit dem oben Gebrachten stehen, die aber über den Stoff der Funktionalanalysis 1 hinausgehen.

Bemerkung 1.1.15. Ist A eine Algebra mit Einselement, so ist die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda e$ ein injektiver Algebren-Homomorphismus, welcher offensichtlich sogar ein Isomorphismus ist, dh. zusätzlich surjektiv, wenn man $\dim A = 1$ annimmt.
Ist A eine Banachalgebra mit Eins, so ist $\lambda \mapsto \lambda e$ wegen $\|e\| = 1$ sogar isometrisch.

Satz 1.1.16 (*Satz von Gelfand-Mazur*)**.** *Für eine Banachalgebra A mit Eins folgt aus* $\mathrm{Inv}(A) = A \setminus \{0\}$*, dass* $\dim A = 1$ *und damit dass $\lambda \mapsto \lambda e$ ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Beweis. Setzt man $\mathrm{Inv}(A) = A \setminus \{0\}$ voraus, und ist $a \in A$, so folgt aus $\sigma(a) \neq \emptyset$ (siehe Satz 1.1.14) die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\lambda e - a \notin \mathrm{Inv}(A) = A \setminus \{0\}$. Also $\lambda e - a = 0$ bzw. $a = \lambda e$, was wiederum $\mathbb{C}e = A$ bedingt. ∎

Proposition 1.1.17. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $B \subseteq A$ eine abgeschlossene e enthaltende Unteralgebra, dh. B für sich selber genommen ist auch eine Banachalgebra mit Eins. Dann gilt:*

- $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Inv}(B)$ *ist eine offene und abgeschlossene Teilmenge von* $B \cap \mathrm{Inv}(A)$ *(versehen mit der Spurtopologie).*
- $\rightsquigarrow$ *Für jedes $b \in B$ gilt $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$, wobei $\rho_B(b)$ offen und abgeschlossen in $\rho_A(b)$ ist.*

Beweis. Die Inklusion $\mathrm{Inv}(B) \subseteq B \cap \mathrm{Inv}(A)$ ist offensichtlich, da aus $b^{-1} \in B$ auch $b^{-1} \in A$ folgt. Dann ist gemäß Lemma 1.1.9 $\mathrm{Inv}(B)$ offen in B und daher auch in $\mathrm{Inv}(A) \cap B$ jeweils versehen mit der Spurtopologie[1].
Ist b im Abschluss von $\mathrm{Inv}(B)$ in $\mathrm{Inv}(A) \cap B$, dh.

$$b \in \overline{\mathrm{Inv}(B)} \cap \mathrm{Inv}(A) \cap B,$$

so gilt insbesondere $b \in B$ und b^{-1} existiert in A. Außerdem ist $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ für eine Folge (b_n) auf $\mathrm{Inv}(B) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$. Wegen der Stetigkeit der Inversenbildung auf $\mathrm{Inv}(A)$ folgt $b^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_n^{-1}$, wobei die Folge (b_n^{-1}) in der abgeschlossenen Menge B liegt. Also $b^{-1} \in B$ und daher $b \in \mathrm{Inv}(B)$.

Für $b \in B$ folgt aus $\mathrm{Inv}(B) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ sofort auch $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$ bzw. $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$.
Nun ist $\lambda \mapsto b - \lambda e$ als Abbildung von $\rho_A(b)$ nach $B \cap \mathrm{Inv}(A)$ stetig. Das Urbild von $\mathrm{Inv}(B)$, welches ja $\rho_B(b)$ ist, ist als Urbild einer offenen und abgeschlossenen Menge selber offen und abgeschlossen in $\rho_A(b)$. ∎

Die Tatsache, dass $\rho_B(b)$ abgeschlossen in $\rho_A(b)$ enthalten ist, ist äquivalent zu $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ und $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.
In der Tat bedeutet ersteres $\rho_B(b) = \overline{\rho_B(b)}^{\rho_A(b)} = \overline{\rho_B(b)} \cap \rho_A(b)$. Das besagt aber genau, dass jeder Punkt aus $\partial\sigma_B(b) = \partial\rho_B(b) = \overline{\rho_B(b)} \setminus \rho_B(b)$ in $\mathbb{C} \setminus \rho_A(b)$ liegt.

1.2 Kommutanten*

Für spezielle Unteralgebren B gilt in Proposition 1.1.17 immer Gleichheit. Dafür benötigen wir folgende Begriffsbildung:

Definition 1.2.1. Sei A eine Algebra und $C \subseteq A$. Der *Kommutant* C' von C ist definiert als

$$C' := \{x \in A : xc = cx \ \text{ für alle } \ c \in C\}.$$

Die Menge $C'' := (C')'$ bezeichnet man als *Bikommutant* von C.

[1] Die stimmt übrigens mit der von der Norm auf der jeweiligen Menge erzeugten Topologie überein.

Der topologische Dualraum eines topologischen Vektorraumes C wird auch mit C' bezeichnet. Es handelt sich beim Kommutant aber um ganz etwas anderes. Aus dem Zusammenhang sollte jedoch immer klar sein, um was aus sich bei C' handelt.

Fakta 1.2.2.

1. C' ist der Durchschnitt der Kerne folgender linearer Abbildungen:

$$\psi_c : A \to A,\ x \mapsto xc - cx,\ c \in C\,.$$

   Insbesondere ist C' ein linearer Teilraum von A. Wegen $(xy)c - c(xy) = x(yc - cy) + (xc - cx)y$ ist $\ker\psi_c$ und damit auch C' eine Unteralgebra.

2. Wenn A eine normierte Algebra ist, so ist C' der Durchschnitt von abgeschlossenen Teilräumen, und somit auch abgeschlossen.

3. Offenbar folgt aus $C_1 \subseteq C_2$, dass $C_1' \supseteq C_2'$.

4. Da $cx = xc$ für alle $x \in C'$ und alle $c \in C$, gilt auch $C \subseteq C''$.

5. Aus $C \subseteq C''$ folgt wegen dem vorletzen Punkt $C' \supseteq C'''$. Andererseits folgt aus dem letzten Punkt, dass $C' \subseteq (C')''$, womit $C' = C'''$ und infolge $C'' = C''''$.

6. $C \subseteq C'$ bedeutet genau, dass $cd = dc$ für alle $c, d \in C$. Insbesondere folgt aus dieser Bedingung (zusammen mit dem letzten und vorvorletzten Punkt), dass $C''' = C' \supseteq C''$, womit sich C'' als kommutative Unteralgebra herausstellt.

7. Falls A ein Einselement enthält, so liegt dieses immer in C'. Ist außerdem $c \in C \cap \mathrm{Inv}(A)$, so folgt aus $xc = cx$ für alle $x \in C'$, dass auch $c^{-1}x = xc^{-1}$ für alle $x \in C'$ und somit $c^{-1} \in C''$.

Proposition 1.2.3. *Sei A eine Algebra (Banachalgebra) mit Einselement e und $C \subseteq A$, sodass $cd = dc$ für alle $c, d \in C$. $B := C''$ ist dann eine kommutative (abgeschlossene) Unteralgebra, sodass* $\mathrm{Inv}(B) = \mathrm{Inv}(A) \cap B$. *Außerdem gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ für alle $a \in B$.*

Beweis. Wegen Fakta 1.2.2 ist B eine kommutative (abgeschlossene) Unteralgebra. Für $a \in \mathrm{Inv}(A) \cap B$ folgt aus Fakta 1.2.2, dass $a^{-1} \in B'' = C'''' = C'' = B$ und somit $a \in \mathrm{Inv}(B)$. Also gilt $\mathrm{Inv}(B) = \mathrm{Inv}(A) \cap B$, woraus wegen $e \in B$ auch $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ für alle $a \in B$ folgt. ∎

1.3 Maximale Ideale und multiplikative Funktionale

Definition 1.3.1. Sei A $(\neq \{0\})$ eine Algebra.

- Eine Unteralgebra I von A heißt *Ideal*, wenn $ai, ia \in I$ für alle $i \in I$ und $a \in A$. Im Falle $I \neq A$ heißt I *echtes Ideal*.

- Ein echtes Ideal I heißt *maximales Ideal*, falls jedes weitere echte Ideal J mit $I \subseteq J$ schon mit I übereinstimmt.

- Ein lineares Funktional $m : A \to \mathbb{C}$ heißt *multiplikatives Funktional*, wenn $m \neq 0$ und
$$m(ab) = m(a) \cdot m(b), \quad \text{für alle } \ a, b \in A.$$
Mit M bezeichnen wir die Menge aller multiplikativen Funktionale auf A und sprechen vom *Gelfandraum* von A. Um anzudeuten, dass es sich um den Gelfandraum der Algebra A handelt, schreibt man auch M_A dafür.

Fakta 1.3.2. Sei A eine Algebra.

1. Ist $\psi : A \to B$ eine nicht verschwindender Algebrenhomomorphismus, also $\neq 0$, linear und und mit der Multiplikation verträglich, in eine Algebra $B\,(\neq \{0\})$, so ist $\ker\psi$ wegen $\ker\psi \neq A$ und $\psi(ai) = \psi(a)\psi(i) = 0 = \psi(i)\psi(a) = \psi(ia)$ für alle $a \in A, i \in \ker\psi$, ein echtes Ideal.

   Insbesondere sind die Kerne multiplikativer Funktionale Ideale mit Kodimension eins und infolge auch maximale Ideale.

2. Ist umgekehrt I ein echtes Ideal, so bildet A/I bekannterweise ein Vektorraum $\neq \{0\}$. Zudem wird durch $[a]_I \cdot [b]_I := [a \cdot b]_I$ eine bilineare und assoziative Multiplikation auf A/I definiert, da für $i, j \in I$ wegen der Idealeigenschaft $(a + i) \cdot (b + j) = a \cdot b + i \cdot b + i \cdot b + i \cdot j \in [a \cdot b]_I$ und folglich $[a \cdot b]_I$ nicht von der Repräsentanten von $[a]_I$ bzw. $[b]_I$ abhängt. Die Faktorisierungsabbildung $\pi : A \to A/I$ mit $\pi(a) = [a]_I$ ist dann ein Algebrenhomomorphismus und erfüllt $\ker\pi = I$.

3. Gemäß der ersten beiden Punkte sind die echten Ideale einer Algebra A genau die Kerne von surjektiven Algebrenhomomorphismen $\neq 0$ bzw. genau die Kerne von Algebrenhomomorphismen $\neq 0$.

   Folglich sind die Ideale mit Kodimension eins, also Ideale, die Hyperebenen sind, genau die Kerne surjektiver Algebrenhomomorphismen $\psi : A \to B$ mit $\dim B = 1$.

4. Hat A ein Einselement e und ist $\psi : A \to B$ surjektiver Algebrenhomomorphismus, so ist $\psi(e)$ eine Einselement von B.

   Insbesondere ist für ein echtes Ideal I in einer Algebra A mit Einselement e die Restklasse $[e]_I$ ein Einselement von A/I.

5. Habe A wieder ein Einselement e. Die Abbildung $m \mapsto \ker m$ bildet dann den Gelfandraum M bijektive auf die Menge aller Ideale mit Kodimension eins ab.

   In der Tat ist $I := \ker m$ ist eindeutig durch m bestimmt. Ist nämlich auch $\tilde{m} \in M$ mit $\ker\tilde{m} = I$, so folgt für $a \in A$ aus $m(a - m(a)e) = 0$, dass $a - m(a)e \in I$ und infolge $\tilde{m}(a - m(a)e) = 0$, also $m(a) = \tilde{m}(a)$. Also ist $m \mapsto \ker m$ injektiv.

   Für die Surjektivität sei I ein Ideal von Kodimension ein. $\pi : A \to A/I$ ist dann ein surjektiver Algebrenhomomorphismus mit $\dim A/I = 1$. Da $[e]_I$ Einselement von A/I ist und folglich $A/I = \operatorname{span}\{[e]_I\}$, ist die lineare Abbildung $\beta : \mathbb{C} \to A/I$ mit $\beta(\lambda) = \lambda[e]_I$ ein bijektiver Algebrenhomomorphismus, also ein Algebrenisomorphismus. Die Abbildung $\beta^{-1} \circ \pi : A \to \mathbb{C}$ ist dann ein multiplikatives Funktional mit $\ker\beta^{-1} \circ \pi = I$.

6. Hat A ein Einselement e und ist I ein echtes Ideal, so enthält I keine invertierbaren Elemente, da aus $a \in \operatorname{Inv}(A) \cap I$ wegen der Idealeigenschaft der Widerspruch $A = eA = a(a^{-1}A) \subseteq I \subsetneq A$ folgt.

7. Habe A abermals ein Einselement e. Jedes echte Ideal I ist dann in einem maximalen Ideal enthalten.

   Bezeichnet nämlich $\mathcal{I}$ die Menge aller echten Ideale J mit $J \supseteq I$ und ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}$ eine bzgl. der Inklusion total geordnete Teilmenge, so überprüft man leicht, dass auch
   $$\bigcup_{J \in \mathcal{T}} J$$
   ein Ideal ist. Dass es ein echtes solches ist, folgt aus der Tatsache, dass die echten Ideale $J \in \mathcal{T}$ wegen des ersten Punktes alle das Element e nicht enthalten. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{I}$ ein maximales Element, welches offensichtlich ein maximales Ideal ist.

8. Hat A ein Einselement e und ist A kommutativ, so ist ein $a \in A$ genau dann invertierbar, wenn es in keinem echten Ideal liegt, bzw. wenn es in keinem maximalen Ideal enthalten ist.

   Für $a \in A \setminus \mathrm{Inv}(A)$ ist wegen der Kommutativität $aA = Aa$ ein in $A \setminus \{e\}$ enthaltendes und somit echtes Ideal. Nach dem vorherigen Punkt ist $a \in aA = Aa$ auch in einem maximalen Ideal enthalten. Dass invertierbare Elemente in keinem echten Ideal enthalten sind, haben wir schon gesehen.

Trägt unsere Algebra eine Norm, so kann man weitere Aussagen tätigen.

Fakta 1.3.3. Sei $(A, \|.\|)$ eine normierte Algebra.

1. Ist I ein abgeschlossenes und echtes Ideal, so ist auch A/I versehen mit der Faktorraumnorm
   $$\|a + I\| = \inf_{i \in I} \|a + i\|$$
   eine normierte Algebra. In der Tat gilt für beliebiges $i, j \in I$
   $$\|a + i\| \, \|b + j\| \geq \|(a + i)(b + j)\| = \|ab + \underbrace{ib + aj + ij}_{\in I}\| \geq \|ab + I\|\,,$$
   und folglich $\|ab + I\| \leq \|a + I\| \, \|b + I\|$.

   Wie aus der Funktionalanalysis bekannt bzw. unmittelbar aus der Definition der Norm auf A/I ersichtlich hat die Abbildung π hat die Abbildungsnorm 1. Zudem ist A/I versehen der Faktorraumnorm ein Banachraum, wenn $(A, \|.\|)$ ein solcher ist.

2. Ist e ein Einselement von A, so erfüllt das Einselement $[e]_I$ von A/I die Ungleichung $0 \neq \|[e]_I\| = \|[e]_I[e]_I\| \leq \|[e]_I\| \, \|[e]_I\|$ und folglich $1 \leq \|[e]_I\|$. Ist e eine Eins, gilt also $\|e\| = 1$, so haben wir auch $\|[e]_I\| = \inf_{i \in I} \|e + i\| \leq \|e + 0\| = 1$, womit Insgesamt $\|[e]_I\| = 1$.

3. Der Abschluss eines beliebigen Ideals I ist wieder ein Ideal, da wegen der Stetigkeit der Multiplikation von links (rechts) mit einem festen $a \in A$ sicherlich $a\bar{I} \subseteq \overline{(aI)} \subseteq \bar{I}$ ($\bar{I}a \subseteq \overline{(Ia)} \subseteq \bar{I}$).

4. Ist A eine Banachalgebra mit Eins, so ist der Abschluss eines echten Ideal wieder ein echtes Ideal, womit insbesondere jedes maximale Ideal abgeschlossen ist.

   In der Tat gilt gemäß Fakta 1.3.2 $\mathrm{Inv}(A) \cap I = \emptyset$ bzw. $I \subseteq (\mathrm{Inv}(A))^c$. Da $(\mathrm{Inv}(A))^c$ abgeschlossen ist, gilt auch $I \subseteq \bar{I} \subseteq (\mathrm{Inv}(A))^c \subsetneq A$.

5. Ist A eine normierte Algebra mit Eins, so ist jedes multiplikativen Funktionale beschränkt mit Abbildungsnorm eins und bildet e auf 1 ab.

   Wie in Fakta 1.3.2 gesehen, gilt nämlich für ein multiplikatives Funktional m und $I := \ker m$, dass $m = \beta^{-1} \circ \pi$, wobei $\beta : \mathbb{C} \to A/I$ mit $\beta(\lambda) = \lambda[e]_I$ ein bijektiver Algebrenisomorphismus und $\pi : A \to A/I$ die Faktorisierungsabbildung ist. Insbesondere gilt $m(e) = 1$.

   Nach 4 ist I als maximales Ideal abgeschlossen, weshalb wir A/I mit der Faktorraumnorm versehen können. Wegen 2 ist β isometrisch, weshalb aus $\|\pi\| = 1$ auch $\|m\| = 1$ folgt.

Satz 1.3.4. *Ist A sogar eine kommutative Banachalgebra mit Eins, so hat jedes maximale Ideal Kodimension eins.*
Also stellt $m \mapsto \ker m$ eine bijektive Beziehung zwischen dem Gelfandraum und allen allen maximalen Idealen her, und ein $a \in A$ ist genau dann invertierbar, wenn $m(a) \neq 0$ für alle multiplikativen Funktionale m gilt.

Beweis. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins, und sei I ein maximales Ideal. Nach Fakta 1.3.3 ist I abgeschlossen und infolge A/I eine Banachalgebra mit Eins. Wegen $[a]_I \cdot [b]_I = [ab]_I = [ba]_I = [b]_I \cdot [a]_I$ ist A/I auch kommutativ.
Für ein $[a]_I \neq (0 + I)$, dh. $a \notin I$, und für jedes $[a]_I$ enthaltende Ideal $L \subseteq A/I$ ist auch $\pi^{-1}(L)$ ein Ideal und zwar von A. Dabei gilt $I = \pi^{-1}(\{[0]_I\}) \subseteq \pi^{-1}(L)$ sowie $a \in \pi^{-1}(L)$ und $a \notin I$. Wegen der Maximalität von I folgt $\pi^{-1}(L) = A$ und weiter $L = A/I$.
Somit ist $[a]_I \neq (0 + I)$ in keinem echten Ideal von A/I enthalten, und nach Fakta 1.3.2 invertierbar. Wegen Satz 1.1.16 ist damit A/I eindimensional, weshalb I Kodimension eins haben muss.
Die restlichen Aussagen folgen dann aus Fakta 1.3.2, 5 und 8. ∎

Bemerkung 1.3.5. Banachalgebren mit Eins von Dimension eins sind nach Bemerkung 1.1.15 zu $\mathbb{C}$ isometrisch isomorph, wobei die Abbildung $\lambda e \mapsto \lambda$ das einzige multiplikative Funktional ist.

1.4 Gelfandtransformation

Für das folgende Lemma sei an die w^*-Topologie auf A' erinnert, welche die gröbste Topologie auf A' ist, sodass alle linearen Funktionale der Form $f \mapsto f(a)$, $a \in A$, auf A' stetig sind.

Lemma 1.4.1. *M ist eine w^*-kompakte Teilmenge von $K_1(0) = \{f \in A' : \|f\| \leq 1\}$ in A'.*

Beweis. $M \subseteq K_1(0) \subseteq A'$ haben wir in Fakta 1.3.3, 5, gezeigt; es gilt ja sogar $M \subseteq K_1(0) \setminus U_1(0)$.
Sind $a, b \in A$, so kann die Abbildung $\psi_{a,b} : A' \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(ab) - f(a) \cdot f(b)$ als Zusammensetzung der Abbildungen

$$A' \to \mathbb{C}^3,\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(ab) \\ f(a) \\ f(b) \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \xi - \eta\,\zeta,$$

geschrieben werden. Versieht man A' mit der w^*-Topologie, $\mathbb{C}^3$ und $\mathbb{C}$ mit der Euklidischen Topologie, so sind diese zwei Abbildungen stetig, da auf $\mathbb{C}^3$ die Euklidische mit der Produkttopologie übereinstimmt. Also ist auch $\psi_{a,b}$ stetig und somit die Menge $M_{a,b} := \psi_{a,b}^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge w^*-abgeschlossen in A'.
Die Menge $\{f \in A' : f(e) = 1\}$ ist auch w^*-abgeschlossen, da sie das Urbild der Menge $\{1\}$ unter der w^*-stetigen Abbildung $f \mapsto f(e)$ ist.
Man überzeugt sich nun leicht, dass ein $m \in A'$ genau dann ein multiplikatives Funktional ist, wenn $m \in \{f \in A' : f(e) = 1\} \cap \bigcap_{a,b\in A} M_{a,b}$, dh.

$$M = \{f \in A' : f(e) = 1\} \cap \bigcap_{a,b\in A} M_{a,b}.$$

Als Schnitt von w^*-abgeschlossenen Mengen ist M damit selber w^*-abgeschlossen. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $K_1(0)$ w^*-kompakt und daher auch die w^*-abgeschlossene Teilmenge $M = K_1(0) \cap M$. ■

Im Folgenden sei M immer mit der w^*-Spur-Topologie versehen. Da die w^*-Topologie sicher Hausdorffsch ist, ist M damit auch Hausdorffsch und kompakt. Unser nächstes Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen A und der Banachalgebra $C(M)$ herzustellen. Beachte, dass der Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen $C(M) = C(M, \mathbb{C})$ auf M versehen mit der Supremumsnorm eine Banachalgebra mit Eins abgibt.

Definition 1.4.2. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann heißt die Abbildung

$$\hat{} : A \to C(M), \quad a \mapsto \hat{a},$$

wobei

$$\hat{a}(m) = m(a),$$

die *Gelfandtransformation*.

Da M die w^*-Topologie trägt, ist $\hat{a}$ tatsächlich stetig und daher in $C(M)$. Weitere Eigenschaften der Gelfandtransformation beschreibt der nächste Satz.

Satz 1.4.3. *Für eine kommutative Banachalgebra A mit Eins ist* $\hat{} : (A, \|.\|) \to (C(M), \|.\|_\infty)$ *ein beschränkter Algebrenhomomorphismus mit Abbildungsnorm* 1. *Genauer gilt für* $a \in A$, *dass* $\hat{a}(M) = \sigma(a)$ *und damit* $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Beweis. Die Homomorphismuseigenschaft ist offensichtlich. Die Ungleichung $\|\hat{}\| \leq 1$ folgt aus $|\hat{a}(m)| = |m(a)| \leq \|m\|\,\|a\| = \|a\|$, und $\hat{e} = \mathbb{1}$ bedingt sogar $\|\hat{}\| = 1$.
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen Satz 1.3.4 gilt $\lambda e - a \notin \mathrm{Inv}(A)$ genau dann, wenn $m(\lambda e - a) = 0$ für irgend ein $m \in M$. Also

$$\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \exists m \in M : \; m(a) = \lambda \Leftrightarrow \lambda \in \hat{a}(M).$$

Daraus folgt $\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{m\in M} |\hat{a}(m)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{a}(M)\} = r(a)$. ■

Proposition 1.4.4 (*). *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und* $a_1, \ldots, a_n \in A$, *welche untereinander kommutieren. Ist p ein Polynom in n komplexen Variablen, dh.* $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, *so gilt für das Spektrum von* $p(a_1, \ldots, a_n)$

$$\sigma(p(a_1, \ldots, a_n)) \subseteq \{\, p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_j \in \sigma(a_j),\; j = 1, \ldots, n \,\}.$$

Für $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ und kommutierenden $a_1, a_2 \in A$ mit $\sigma(a_1 + a_2), \sigma(i(a_1 - a_2)) \subseteq \mathbb{R}$ gilt sogar

$$\sigma\big(p(a_1, a_2)\big) = \{\, p(\lambda, \bar{\lambda}) : \lambda \in \sigma(a_1)\,\}\,.$$

Beweis. Für $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ sei B der Bikommutator von C. Aus Proposition 1.2.3 erhalten wir $\sigma_A\big(p(a_1, \dots, a_n)\big) = \sigma_B\big(p(a_1, \dots, a_n)\big)$, wobei B für sich genommen eine kommutative Banachalgebra mit Eins ist. Bezeichnet M den Gelfandraum von B, so folgt aus Satz 1.4.3

$$\sigma_B\big(p(a_1, \dots, a_n)\big) = \{m\big(p(a_1, \dots, a_n)\big) : m \in M\} = \{p\big(m(a_1), \dots, m(a_n)\big) : m \in M\} \subseteq$$

$$\{p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j \in \sigma_B(a_j),\ j = 1, \dots, n\}\,.$$

Wegen $\sigma_B(a_j) = \sigma_A(a_j)$ (vgl. Proposition 1.2.3) ergibt sich die erste Behauptung. Wenn $n = 2$, so folgt für $m \in M$ aus $\sigma(a_1 + a_2), \sigma(i(a_1 - a_2)) \subseteq \mathbb{R}$

$$\overline{m(a_1)} = \frac{1}{2}\overline{(a_1 + a_2)} + \frac{1}{2}\overline{m(a_1 - a_2)} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \frac{1}{2}m(a_1 - a_2) = m(a_2)\,,$$

womit

$$\sigma_B\big(p(a_1, a_2)\big) = \{p\big(m(a_1), m(a_2)\big) : m \in M\} = \{\, p(\lambda, \bar{\lambda}) : \lambda \in \sigma_B(a_1)\,\}\,.$$

∎

Als schöne Anwendung erhalten wir

Korollar 1.4.5 (*)**.** *Seien X, Y Banachräume und $A \in L_b(X)$, $B \in L_b(Y)$, sodass $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Dann hat für jedes $T \in L_b(Y, X)$ die Operatorgleichung*

$$AS - SB = T$$

eine eindeutige Lösung $S \in L_b(Y, X)$. Insbesondere folgt aus $AS = SB$, dass $S = 0$.

Beweis. Die Abbildungen $\mathcal{A} : S \mapsto AS$, $L_b : S \mapsto SB$ sind lineare Abbildungen von $L_b(Y, X)$ nach $L_b(Y, X)$, die wegen $\|AS\| \le \|S\| \cdot \|A\|$, $\|SB\| \le \|S\| \cdot \|B\|$ auch beschränkt sind, dh. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L_b(L_b(Y, X))$.
Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$(\lambda I_X - A)^{-1}(\lambda S - AS) = S = \lambda(\lambda I_X - A)^{-1}S - A(\lambda I_X - A)^{-1}S\,,$$

womit der Operator $S \mapsto (\lambda I_X - A)^{-1}S$ aus $L_b(L_b(Y, X))$ die Inverse von $\lambda I_{L_b(Y,X)} - \mathcal{A}$ ist. Also gilt $\rho(A) \subseteq \rho(\mathcal{A})$ bzw. $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(A)$. Entsprechend gilt $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(B)$.
Wenden wir Proposition 1.4.4 auf die Algebra $\mathcal{B}(L_b(Y, X))$, die Elemente $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und das Polynom $p(z_1, z_2) = z_1 - z_2$ an, so folgt

$$\sigma(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) - \sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(A) - \sigma(B)\,,$$

wobei voraussetzungsgemäß 0 nicht in der rechten Seite und somit auch nicht in der linken Seite liegt. Also ist $\mathcal{A} - \mathcal{B} = (S \mapsto AS - SB)$ in $L_b(L_b(Y, X))$ invertierbar, dh. $S \mapsto AS - SB$ ist eine bijektive Abbildung von $L_b(Y, X)$ auf sich. ∎

1.5 C^*-Algebren

Definition 1.5.1. Eine Algebra A versehen mit einer Abbildung $.^* : A \to A$ heißt $*$-*Algebra*,

- falls $.^*$ involutorisch ist, dh. $(a^*)^* = a,\ a \in A$,
- falls $.^*$ konjugiert linear ist, dh. $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*,\ a, b \in A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- und falls $(ab)^* = b^* a^*,\ a, b \in A$.

Ist A sogar eine Banachalgebra und

- ist $.^*$ isometrisch, dh. $\|a^*\| = \|a\|,\ a \in A$,

so spricht man von einer *Banach-$*$-Algebra*. Eine Banach-$*$-Algebra heißt C^*-*Algebra*, falls zusätzlich noch

- $\|aa^*\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$ gilt.

Ein Element a in einer $*$-Algebra A heißt *selbstadjungiert*, falls $a = a^*$, und *normal*, falls $aa^* = a^*a$.
Hat A ein Einselement, so heißt $a \in A$ *unitär*, falls $aa^* = e = a^*a$, und *positiv*, falls a selbstadjungiert ist und zusätzlich $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ erfüllt.

Offensichtlich sind selbstadjungierte und unitäre Elemente auch normal.

Fakta 1.5.2. Sei A eine $*$-Algebra.

1. Jedes $x \in A$ können wir in der Form

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + x^*)}_{=:x_r} + \mathrm{i}\ \underbrace{\frac{1}{2\mathrm{i}}(x - x^*)}_{=:x_i}$$

   schreiben, wobei man sich unmittelbar davon überzeugt, dass x_r, x_i beide selbstadjungierte Elemente sind, die im Fall einer Banach-$*$-Algebra $\|x_r\|, \|x_i\| \leq \|x\|$ erfüllen, und $x^* = x_r - \mathrm{i} x_i$ gilt.

2. Hat A ein Einselement e, so gilt $e^* = ee^* = (e^*)^* e^* = (ee^*)^* = (e^*)^* = e$.

   Ist dabei $a \in A$ invertierbar, so folgt $(a^{-1})^* a^* = (a(a^{-1}))^* = e = e^* = ((a^{-1})a)^* = a^*(a^{-1})^*$. Also ist auch a^* invertierbar, wobei $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$. Zusammen mit der Tatsache, dass $.^*$ involutorisch ist, schließen wir auf $\mathrm{Inv}(A)^* = \mathrm{Inv}(A)$ und wegen $(\lambda e - a)^* = (\bar{\lambda} e - a^*)$ auch auf $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ und $r(a) = r(a^*)$ für jedes $a \in A$.

3. Ist A eine Banachalgebra versehen mit einer konjugiert linearen und involutorischen Abbildung $.^*$, welche $(ab)^* = b^* a^*$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Gilt darüberhinaus immer $\|a\|^2 \leq \|aa^*\|$, so folgt für $a \neq 0$ aus

$$\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \leq \|a\|\,\|a^*\|$$

   durch Kürzen $\|a\| \leq \|a^*\|$. Wendet man das auf a^* an, so folgt $\|a\| = \|a^*\|$. Die konjugierte Linearität liefert das auch für $a = 0$. Schließlich folgt für alle $a \in A$

$$\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \leq \|a\|\,\|a^*\| = \|a\|^2.$$

   Also ist A eine C^*-Algebra.

4. Ist x normal in einer C^*-Algebra A mit Eins, so gilt wegen $x^*x = xx^*$

$$\|x\|^4 = \|xx^*\|^2 = \|xx^*(xx^*)^*\| = \|x(x^*x)x^*\| = \|x(xx^*)x^*\| = \|x^2(x^2)^*\| = \|x^2\|^2;$$

also immer $\|x\|^2 = \|x^2\|$. Rekursiv folgt daraus $\|x\|^{2^k} = \|x^{2^k}\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und gemeinsam mit Satz 1.1.14

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x).$$

Beispiel 1.5.3.

(i) Ist X ein topologischer Raum und bezeichnet $C_b(X, \mathbb{C})$ den Vektorraum aller beschränkten und stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in X} |f(t)|$, so haben wir in Beispiel 1.1.3 gesehen, dass $C_b(X, \mathbb{C})$ mit dem punktweisen Multiplizieren eine Banachalgebra ist.

Die Abbildung $f \mapsto \bar{f}$, also das punktweise Konjugieren, ist offensichtlich eine isometrische, konjugiert lineare Involution, die wegen

$$\|f\bar{f}\|_\infty = \sup_{t\in X} |f(t)\bar{f}(t)| = \sup_{t\in X} |f(t)|^2 = \|f\|_\infty^2$$

den Raum $C_b(X, \mathbb{C})$ zu einer C^*-Algebra macht. Da diese C^*-Algebra kommutativ ist, sind alle Elemente von $C_b(X, \mathbb{C})$ normal.

Die selbstadjungierten Elemente von $C_b(X, \mathbb{C})$ sind offensichtlich die reellwertigen Funktionen. Wegen $f(t)\bar{f}(t) = |f(t)|^2$ sind die unitären gerade alle Funktionen mit Werten in $\mathbb{T}$.

Schließlich zeigt man unschwer für $f \in C_b(X, \mathbb{C})$, dass $f \in Inv(C_b(X, \mathbb{C}))$ dazu äquivalent ist, dass f keine Nullstellen hat und $\frac{1}{f}$ beschränkt ist, was aber genau $0 \notin \overline{f(X)}$ (topologischer Abschluss) bedeutet. Infolge haben wir $\sigma(f) = \overline{f(X)}$. Insbesondere ist ein f genau dann positiv, wenn f Werte in $[0, +\infty)$ annimmt.

(ii) Ist X wie im vorherigen Beispiel, so bildet $C_0(X, \mathbb{C})$ gemäß Beispiel 1.1.3 eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_b(X, \mathbb{C})$. Da $C_0(X, \mathbb{C})$ invariant unter dem punktweisen komplexen Konjugieren ist, identifizieren wir $C_0(X, \mathbb{C})$ sogar als Unter-C^*-Algebra.

(iii) Ist H ein Hilbertraum und $L_b(H)$ alle beschränkten linearen Abbildungen von H nach H, so ist $L_b(H)$ bekannterweise eine Banachalgebra.

Aus der Funktionalanalysis 1, Proposition 6.5.2 in [4], wissen wir, dass die Abbildung $C \mapsto C^*$ (Adjungierter Operator zu A) $\|C^*\| = \|C\|$, $(\lambda C + \mu D)^* = \bar{\lambda}C^* + \bar{\mu}D^*$, $(C^*)^* = C$ und auch $\|CC^*\| = \|C\|^2$ erfüllt. Also ist auch $L_b(H)$ eine C^*-Algebra.

Die normalen, selbstadjungierten bzw. unitären $C \in L_b(H)$ im Sinne der C^*-Algebren sind genau die normalen, selbstadjungierten bzw. unitären Operatoren im Sinne der Funktionalanalysis 1. Korollar 6.5.10 in [4] zeigt auch, dass C genau dann positiv ist, wenn

$$(Cx, x) \geq 0, \quad \text{für alle } \; x \in H\,.$$

Satz 1.5.4. *Seien A und B jeweils C^*-Algebren mit Eins. Ist $\varphi : A \to B$ ein C^*-*Algebrenhomomorphismus*, dh. eine lineare, mit der Algebrenmultiplikation und mit $.^*$ verträgliche Abbildung, mit $\varphi(e_A) = e_B$, so ist φ automatisch beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\varphi\| = 1$. Dabei gilt $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$ für alle $a \in A$.
Ist $\varphi : A \to B$ zudem bijektiv, also ein Isomorphismus, so ist φ sogar isometrisch.*

Beweis. Für $a \in A$ sei $\lambda \in \rho(a)$, also $a - \lambda e \in \mathrm{Inv}(A)$. Es folgt

$$(\varphi(a) - \lambda e)\, \varphi((a - \lambda e)^{-1}) = \varphi(a - \lambda e)\, \varphi((a - \lambda e)^{-1}) = \varphi[(a - \lambda e)(a - \lambda e)^{-1}] = \varphi(e) = e,$$

und genauso $\varphi((a - \lambda e)^{-1})\, (\varphi(a) - \lambda e) = e$. Somit ist $\lambda \in \rho(\varphi(a))$. Übergang zu den Komplementen ergibt $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$ und daher $r(\varphi(a)) \leq r(a)$.
Für $a \in A$ sind aa^* und $\varphi(a)\varphi(a)^* = \varphi(aa^*)$ offensichtlich normal. Es folgt

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)\varphi(a)^*\| = r(\varphi(aa^*)) \leq r(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Wegen $\varphi(e) = e$ gilt $\|\varphi\| = 1$.
Ist φ bijektiv, und wendet man obiges auf φ^{-1} an, so folgt auch $\|a\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(a))\| \leq \|\varphi(a)\|$ für $a \in A$. ■

Lemma 1.5.5. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins. Für $f \in A'$ mit $\|f\| = f(e) = 1$ und ein selbstadjungiertes $a \in A$ gilt $f(a) \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f(a) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und wollen $\beta = 0$ zeigen. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $f(a - \mathrm{i}\lambda e) = \alpha + \mathrm{i}(\beta - \lambda)$ und daher

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2 - 2\beta\lambda = |\alpha + \mathrm{i}(\beta - \lambda)|^2 = |f(a - \mathrm{i}\lambda e)|^2 \leq \|a - \mathrm{i}\lambda e\|^2 = \|(a - \mathrm{i}\lambda e)(a - \mathrm{i}\lambda e)^*\| \\ = \|(a - \mathrm{i}\lambda e)(a + \mathrm{i}\lambda e)\| = \|a^2 + \lambda^2 e\| \leq \|a\|^2 + \lambda^2\,.\end{aligned}$$

Umformen ergibt $\alpha^2 + \beta^2 - \|a\|^2 \leq 2\beta\lambda$. Damit diese Ungleichung für alle positiven und negativen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\beta = 0$. ■

Korollar 1.5.6. *Für eine C^*-Algebra A mit Eins und ein selbstadjungiertes $a \in A$ gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Offenbar ist die lineare Hülle in A von $\{a^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ eine kommutative Unteralgebra mit Einselement von A, wobei $a^0 := e$. Wegen der Stetigkeit der Algebrenmultiplikation bildet infolge der Abschluss B dieser linearen Hülle eine Banachalgebra mit e als Eins.
Für $\lambda \in \sigma(a) = \sigma_A(a)$ folgt $\lambda \in \sigma_B(a)$; siehe Korollar 1.5.6. Gemäß Satz 1.4.3 gibt es ein $m \in M_B$ mit $m(a) = \hat{a}(m) = \lambda$, wobei $\|m\| = m(e) = 1$; siehe Fakta 1.3.3, 5. Bezeichnet $f \in A'$ eine Fortsetzung gemäß des Satzes von Hahn-Banach von m mit $\|f\| = \|m\|$, so erhalten wir $\lambda = m(a) = f(a) \in \mathbb{R}$ aus Lemma 1.5.5. ■

Satz 1.5.7. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins e und $B \subseteq A$ eine abgeschlossene e enthaltende, unter der Abbildung $.^*$ abgeschlossene Unteralgebra, dh. B für sich selber genommen ist auch eine C^*-Algebra mit Eins. Dann gilt* $\mathrm{Inv}(A) \cap B = \mathrm{Inv}(B)$. *Insbesondere gilt für jedes $b \in B$, dass $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.*

Beweis. Zunächst sei $b \in B$ selbstadjungiert. Wegen Korollar 1.5.6, gilt $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \subseteq \mathbb{R}$, vgl. auch Proposition 1.1.17. Komplementbildung ergibt

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho_B(b) \subseteq \rho_A(b),$$

wobei gemäß Proposition 1.1.17 die Menge $\rho_B(b)$ abgeschlossen in $\rho_A(b)$ ist, dh. $\overline{\rho_B(b)} \cap \rho_A(b) = \rho_B(b)$. Nun ist aber wegen obiger Inklusion $\overline{\rho_B(b)} = \mathbb{C}$ und daher $\rho_B(b) = \overline{\rho_B(b)} \cap \rho_A(b) = \rho_A(b)$. Insbesondere gilt $b \in \mathrm{Inv}(A)$ genau dann, wenn $b \in \mathrm{Inv}(B)$.

Für allgemeines $b \in B$ folgt aus $b \in \mathrm{Inv}(A)$, dass $ab = ba = e$ für ein $a \in A$. Daraus ergibt sich $b^*a^* = a^*b^* = e^* = e$ und damit

$$(a^*a)(bb^*) = a^*(ab)b^* = a^*b^* = e = ba = b(b^*a^*)a = (bb^*)(a^*a).$$

Also liegt bb^* in $\mathrm{Inv}(A)$ mit $(bb^*)^{-1} = a^*a \in A$. Nun ist aber bb^* ein selbstadjungiertes Element von B, was wegen dem schon gezeigten $bb^* \in \mathrm{Inv}(B)$ nach sich zieht. Also hat bb^* eine Inverse in B, die wegen der Eindeutigkeit der Inversen in $\mathrm{Inv}(A)$ mit a^*a übereinstimen muss; also $a^*a \in \mathrm{Inv}(B)$. Es folgt $a = ea = b^*(a^*a) \in B$. Somit ist $b \in \mathrm{Inv}(B)$.
Wir haben somit $\mathrm{Inv}(A) \cap B \subseteq \mathrm{Inv}(B)$. Die umgekehrte Inklusion ist klar, vgl. Proposition 1.1.17. Schließlich ist $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ eine offensichtliche Konsequenz aus $\mathrm{Inv}(A) = \mathrm{Inv}(B)$. ∎

Satz 1.5.8. *Ist A eine kommutative C^*-Algebra mit Eins, so ist die Gelfand-Transformation $\hat{} : A \to C(M)$ ein isometrischer, mit $.^*$-verträglicher Algebrenisomorphismus, dh. ein isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus, von A auf $C(M)$, wobei M der Gelfandraum von A ist.*

Beweis. Aus Satz 1.4.3 zusammen mit Fakta 1.5.2, 4, – man beachte, dass wegen der Kommutativität alle Elemente von A normal sind – folgt sofort, dass $\hat{} : A \mapsto C(M)$ ein isometrischer, und daher injektiver, Algebrenhomomorphismus ist.
Um die Verträglichkeit mit $.^*$ zu zeigen, schreiben wir $x \in A$ wie in Fakta 1.5.2, 1, als $x_r + \mathrm{i}x_i$ mit selbstadjungierten $x_r, x_i \in A$. Gemäß Korollar 1.5.6 gilt $\sigma(x_r), \sigma(x_i) \subseteq \mathbb{R}$. Aus Satz 1.4.3 wissen wir aber auch, dass $\hat{x}_r(M) = \sigma(x_r)$ und $\hat{x}_i(M) = \sigma(x_i)$. Also sind $\hat{x}_r : M \to \mathbb{C}$ und $\hat{x}_i : M \to \mathbb{C}$ rein reellwertig, womit

$$\overline{\hat{x}(m)} = \overline{\hat{x}_r(m) + \mathrm{i}\hat{x}_i(m)} = \hat{x}_r(m) - \mathrm{i}\hat{x}_i(m) = \widehat{x^*}(m), \quad m \in M.$$

Schließlich folgt aus dem gezeigten, dass $\hat{A}$ eine bzgl. Konjugation abgeschlossene Unter-Banachalgebra von $C(M)$ ist. Insbesondere ist $\hat{A}$ abgeschlossen in $C(M)$.
Aus $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$ folgt $\hat{x}(m_1) = m_1(x) \neq m_2(x) = \hat{x}(m_2)$ für ein gewisses $x \in A$. Zusammen mit $\mathbb{1} = \hat{e} \in \hat{A}$ erweist sich $\hat{A}$ daher als punktetrennend und nirgends verschwindend. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass liegt $\hat{A}$ dicht in $C(M)$, was schließlich $\hat{A} = C(M)$ nach sich zieht. ∎

Definition 1.5.9. Ist x ein normales Element ($x^*x = xx^*$) einer C^*-Algebra A mit Eins ($= e$), dann nennen wir die Menge[2]

$$A(e, x) := \mathrm{cls}\left(\left\{x^j x^{*k} : j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right) \quad (\subseteq A)$$

die von x *erzeugte C^*-Algebra* mit Eins.

[2] $x^0 := e$.

Fakta 1.5.10.

1. Wie man leicht mit Hilfe der Stetigkeit der Algebrenmultiplikation und der Abbildung $.^*$ nachrechnet, ist $A(e,x)$ eine kommutative C^*-Algebra mit Eins, die x, x^* und e enthält. Sie ist offensichtlich die kleinste C^*-Unter-Algebra von A, die x und e enthält.

2. Wegen der Kommutativität von $A(e,x)$ sind alle Elemente von $A(e,x)$ normal.

3. Ein Element $a \in A$ vertauscht mit ganz $A(e,x)$, also $ay = ya$ für alle $y \in A(e,x)$ genau dann, wenn $ax = xa$ und $ax^* = x^*a$.

   Um das einzusehen, gelte $ax = xa$ und $ax^* = x^*a$. Wegen der Assoziativität der Algebrenmultiplikation gilt $a(x^j x^{*k}) = (x^j x^{*k})a$ für alle $j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aus der Bilinearität folgt dann, dass a mit allen Elementen der linearen Hülle von $\left\{x^j x^{*k} : j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ vertauscht, und wegen der Stetigkeit der Algebrenmultiplikation vertauscht a schließlich mit allen $y \in A(e,x)$. Die Umkehrung ist trivial.

Satz 1.5.11. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins, $x \in A$ normal und $A(e,x)$ die von x erzeugte C^*-Algebra. Dann ist die Abbildung $\varphi : M_{A(e,x)} \to \sigma(x)$, $m \mapsto m(x)$, die nichts anderes als $\hat{x}$ ist, ein Homöomorphismus* [3].

Beweis. Nach Definition 1.4.2 gilt $\varphi = \hat{x}$, wobei $\hat{} : A(e,x) \to C(M_{A(e,x)})$ die Gelfandtransformation ist. Also ist ist $\varphi : M_{A(e,x)} \to \mathbb{C}$ stetig. Nach Satz 1.4.3 ist φ surjektiv als Abbildung auf $\sigma(x)$.
Aus $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ für $m_1, m_2 \in M_{A(e,x)}$, folgt $m_1(x) = \hat{x}(m_1) = \hat{x}(m_2) = m_2(x)$ sowie wegen der Verträglichkeit von Gelfandtransformation mit $.^*$,

$$m_1(x^*) = \widehat{x^*}(m_1) = \overline{\hat{x}(m_1)} = \overline{\hat{x}(m_2)} = \widehat{x^*}(m_2) = m_2(x^*).$$

Aus der Multiplikativität von m_1, m_2 folgt dann $m_1(x^j x^{*k}) = m_2(x^j x^{*k})$ für alle $j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aus der Linearität und Stetigkeit folgt schließlich, dass $m_1(y) = m_2(y)$ für alle $y \in A(e,x)$, dh. $m_1 = m_2$.
Also ist $\varphi : M_{A(e,x)} \to \sigma(x)$ bijektiv und stetig. Aus der Kompaktheit von $M_{A(e,x)}$ und da die Euklidische Topologie auf $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}$ Hausdorffsch ist, folgt aus der Topologie, dass φ in der Tat ein Homöomorphismus ist. ■

Bemerkung 1.5.12. Wegen Satz 1.5.11 ist die Abbildung $\varphi^t : C(\sigma(x)) \to C(M_{A(e,x)})$ definiert durch $f \mapsto f \circ \varphi$ offensichtlich ein isometrischer, mit der Konjugation verträglicher Algebrenisomorphismus, dh. ein isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus. Dabei gilt für die Abbildung $\xi \mapsto \xi$ als Abbildung von $\sigma(x)$ nach $\mathbb{C}$, die ja in $C(\sigma(x))$ liegt,

$$\varphi^t((\xi \mapsto \xi))(m) = (\xi \mapsto \xi) \circ \varphi(m) = \varphi(m) = \hat{x}(m).$$

Also $\varphi^t((\xi \mapsto \xi)) = \hat{x}$. Aus der Multiplikativität und Verträglichkeit mit $.^*$ von φ^t und Gelfandtransformation folgt allgemein

$$\varphi^t((\xi \mapsto \xi^j \, \bar{\xi}^k)) = \hat{x}^j (\widehat{x^*})^k, \quad j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.8}$$

Definition 1.5.13 (*Funktionalkalkül für C^*-Algebren*)**.** Sei A eine C^*-Algebra mit Eins, $x \in A$ normal und $A(e,x)$ die von x erzeugte C^*-Algebra. Weiters sei $\varphi : M_{A(e,x)} \to$

[3] Nach Satz 1.5.7 ist $\sigma(x)$ unabhängig davon, ob wir x als Element von A oder von $A(e,x)$ betrachten.

$\sigma(x)$, $m \mapsto m(x)$ wie in Satz 1.5.11 und $\varphi^t : C(\sigma(x)) \to C(M_{A(e,x)})$ wie in Bemerkung 1.5.12. Schließlich sei $\hat{}: A(e,x) \to C(M_{A(e,x)})$ die Gelfand-Transformation von $A(e,x)$ nach $C(M_{A(e,x)})$, vgl. Satz 1.5.8.
Ist $f \in C(\sigma(x))$, so sei

$$f(x) := (\hat{})^{-1} \circ \varphi^t(f) \ \in A(e,x) \subseteq A.$$

Also ist $f(x)$ jenes eindeutige Element in $A(e,x)$, für das $\widehat{f(x)} = \varphi^t(f)$ $(\in C(M_{A(e,x)}))$, bzw.

$$m(f(x)) = \widehat{f(x)}(m) = \varphi^t(f)(m) = f \circ \varphi(m) = f \circ \hat{x}(m) = f(m(x)) \ \ (\in \mathbb{C}) \tag{1.9}$$

für alle $m \in M_{A(e,x)}$ gilt.

Satz 1.5.14. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins (= e) und $x \in A$ normal.*

(i) Die Abbildung $f \mapsto f(x)$ von $C(\sigma(x))$ auf $A(e,x)$ ist ein isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus. Insbesondere ist $f(x)$ genau dann selbstadjungiert, unitär bzw. positiv wenn f Werte in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{T}$ bzw. in $[0,+\infty)$ annimmt.

(ii) Ist $y \in A$ mit $yx = xy$ und $yx^* = x^*y$, so gilt $yf(x) = f(x)y$ für alle $f \in C(\sigma(x))$.

(iii) Für $f \in C(\sigma(x))$ gilt

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))\,. \tag{1.10}$$

(iv) Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z,\bar{z}]$, dh. für Funktionen auf $\sigma(x)$ der Form

$$p(\zeta) = \sum_{j,k=0}^{N} \lambda_{j,k}\, \zeta^j \overline{\zeta}^k$$

mit $\lambda_{m,n} \in \mathbb{C}$ gilt

$$p(x) = \sum_{j,k=0}^{N} \lambda_{j,k}\, x^j (x^*)^k\,. \tag{1.11}$$

(v) Ist darüber hinaus $g \in C(\sigma(f(x)))$, so gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Beweis. Nach Bemerkung 1.5.12 bzw. Satz 1.5.8 sind $\varphi^t : C(\sigma(x)) \to C(M_{A(e,x)})$ und $\hat{} : A(e,x) \to C(M_{A(e,x)})$ beide C^*-Algebrenisomorphismen, also auch $(f \mapsto f(x)) = (\hat{})^{-1} \circ \varphi^t : C(\sigma(x)) \to A(e,x)$.
Für $f \in C(\sigma(x))$ folgt zusammen mit Satz 1.5.7

$$\sigma(f(x)) = \sigma_{A(e,x)}(f(x)) = \sigma_{C(\sigma(x))}(f) = \overline{f(\sigma(x))} = f(\sigma(x))\,.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\sigma(x)$ kompakt und f stetig ist. Zudem folgt nach Fakta 1.5.10, 3, aus $y \in A$ mit $yx = xy$ und $yx^* = x^*y$ wegen $f(x) \in A(e,x)$, dass $yf(x) = f(x)y$.
Die Beziehung (1.11) folgt wegen der Linearität von $f \mapsto f(x)$ unmittelbar aus (1.8).

Da $A(e,x)$ eine kommutative C^*-Algebra ist, gilt wegen $f(x) \in A(e,x)$ sicher $A(e,f(x)) \subseteq A(e,x)$. $A(e,f(x))$ ist ja die kleinste $f(x)$ und e enthaltende C^*-Algebra. Insbesondere liegt für $g \in C(\sigma(f(x)))$ das Element $g(f(x))$ auch in $A(e,x)$. Wegen $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ ist $g \circ f$ auf $\sigma(x)$ wohldefiniert.

Außerdem liegt für $m \in M_{A(e,x)}$ die Einschränkung $m|_{A(e,f(x))}$ offensichtlich in $M_{A(e,f(x))}$. Also gilt

$$[g(f(x))]^\wedge(m) = m(g(f(x))) = m|_{A(e,f(x))}(g(f(x))).$$

Dabei ist $[g(f(x))]^\wedge$ die Gelfand-Transformation von $g(f(x))$ auf $A(e,x)$. Mit (1.9) zuerst angewandt auf $f(x)$ statt x und g statt f in $A(e,f(x))$ und dann angewandt auf x und f in $A(e,x)$ folgt schließlich

$$m|_{A(e,f(x))}(g(f(x))) = g(m|_{A(e,f(x))}(f(x))) = g(m(f(x))) = \\ g(f(m(x))) = (g \circ f)(m(x)) = [(g \circ f)(x)]^\wedge(m).$$

Da $m \in M_{A(e,x)}$ beliebig war, folgt $[g(f(x))]^\wedge = [(g \circ f)(x)]^\wedge$ und daher $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. ■

1.6 Positive Elemente einer C^*-Algebra mit Eins

Es sei daran erinnert, dass für eine C^*-Algebra A mit Eins ein $a \in A$ positiv heißt, wenn $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Zudem setzen wir

$$A_+ := \{a \in A : a = a^*,\ \ \sigma(a) \subseteq [0, +\infty)\}\,.$$

Beispiel 1.6.1. Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $a \in A$ selbstadjungiert.

⇝ Die Abbildung $\sqrt{.} : t \mapsto \sqrt{t}$ auf $[0, +\infty)$ mit Werten in $[0, +\infty)$ ist stetig. Im Fall eines positiven a ist somit $\sqrt{.}|_{\sigma(a)}$ wohldefiniert und stetig, weshalb $\sqrt{a}$ ein Element von A – sie sogenannte *Quadratwurzel* von a – abgibt, welches nach (1.10) $\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{\sigma(a)}$ erfüllt und sich infolge auch als positiv herausstellt.

Wegen $\sqrt{.}|_{\sigma(a)} \cdot \sqrt{.}|_{\sigma(a)} = (\sigma(a) \ni \zeta \mapsto \zeta \in \mathbb{C})$ folgt aus Satz 1.5.14, i, zusammen mit (1.11) die Gleichheit $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Wenden wir Satz 1.5.14, v, auf die stetigen Funktionen $f, g : \sigma(a) \to [0, +\infty)$ mit $f(t) = t^2$ und $g(t) = \sqrt{t}$ an, so erhalten wir $\sqrt{a^2} = a$.

⇝ Die Funktionen $|.|$, $\max(.,0)$ und $-\min(.,0)$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0, +\infty)$ und infolge auch ihre Einschränkung auf $\sigma(a)$; siehe Korollar 1.5.6. Zudem ist a^2 gemäß (1.10) positiv.

Die infolge von Definition 1.5.13 wohldefinierten Elemente $|a|$, $a_+ := \max(a, 0)$ und $a_- := -\min(a, 0)$ von A sind nach (1.10) allesamt positiv. Weil für $f : \sigma(a) \to \mathbb{R}$ offenbar $\|\max(f, 0)\|_\infty, \|-\min(f, 0)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $f = \max(f, 0) - (-\min(f, 0))$, $|f| = \max(f, 0) + (-\min(f, 0))$, $0 = \max(f, 0) \cdot (-\min(f, 0))$ und $|f|^2 = f^2$ gilt, ergibt Satz 1.5.14, i, $\|a_+\|, \|a_-\| \leq \|a\|$ $a = a_+ - a_-$, $|a| = a_+ + a_-$, $a_+a_- = 0$ und $|a|^2 = a^2$. Letzteres ergibt nach dem vorherigen Punkt $|a| = \sqrt{a^2}$.

Proposition 1.6.2. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $a \in A$ positiv. Für $u \in A$ mit $au = ua$ gilt auch $\sqrt{a}u = u\sqrt{a}$. Zudem ist $\sqrt{a}$ das eindeutige positive Element q von A mit $q^2 = a$.*

Beweis. Die erste Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 1.5.14, ii.
Für ein positives $q \in A$ mit $q^2 = a$ gilt offenbar $a \in A(e, q)$ und folglich $A(e, a) \subseteq A(e, q)$. Mit $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(t) = t^2$ folgt wegen $f \circ g(\zeta) = \zeta$ aus Satz 1.5.14, iv und v,

$$q = (f \circ g)(q) = f(g(q)) = f(a) = q\,.$$

■

Fakta 1.6.3. Sei A eine C^*-Algebra mit Eins.

1. Gilt $\|te - a\| \leq t$ für ein selbstadjungiertes $a \in A$ und ein $t \geq 0$, so ist a positiv.

   In der Tat gilt $a = f(a)$ für $f : \sigma(a)\,(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit $f(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in \sigma(a)$. Aus $f(\zeta) = \zeta \in \sigma(a) \cap (-\infty, 0)$ würden wir den Widerspruch
   $$t < t\mathbb{1}(\zeta) - f(\zeta) \leq \|t\mathbb{1} - f\|_\infty = \|te - a\|$$
   erhalten.

2. Für positives $a \in A$ und $t \geq \|a\|$ gilt $\|te - a\| \leq t$.

   Ist nämlich $f : \sigma(a)\,(\subseteq [0, +\infty)) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in \sigma(a)$, so bedingt die Annahme $t < \|te - a\| = \|t\mathbb{1} - f\|_\infty$ die Existenz eines $\eta = f(\eta) \in \sigma(a)$ mit $t < |t - \eta|$, was wegen $t \geq \|a\| = \|f\|_\infty \geq f(\eta) = \eta$ zunächst $t < t - \eta$ und schließlich den Widerspruch $\eta < 0$ nach sich zieht.

3. A_+ ist als Teilmenge von A abgeschlossen, da wir für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A_+ mit existierendem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n =: a \in A$ zunächst wegen der Stetigkeit von $.^*$ die Gleichung $a^* = \lim_{n\to\infty} a_n^* = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ haben und nach 2 die Ungleichung $\|\,\|a\|e - a\,\| = \lim_{n\to\infty} \|\,\|a_n\|e - a_n\,\| \leq \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$ zutrifft, was gemäß 1 die Positivität von a bedingt.

4. Sind $p, q \in A$ positiv und $a \in A$ selbstadjungiert, so sind es auch $p + q$, p^n und a^{2n} für alle $n \in \mathbb{N}$.

   In der Tat ist $p + q$ offenbar selbstadjungiert. Aus der Dreiecksungleichung und wegen 2 erhalten wir $\|p + q - (\|p\| + \|q\|)e\| \leq \|p - \|p\|e\| + \|q - \|q\|e\| \leq \|p\| + \|q\|$, was wegen 1 die Positivität von $p + q$ nach sich zieht. $p^n, a^2 \in A_+$ ergeben sich unmittelbar aus Satz 1.1.7.

5. Für selbstadjungierte $a, b \in A$ schreiben wir $a \leq b$, wenn das selbstadjungierte Element $b - a$ positiv ist. Insbesondere bedeutet $a \geq 0$, dass a positiv ist. $\leq$ bildet eine Halbordnung auf der Menge den selbstadjungierten Elemente von A.

   Die Reflexivität ist klar. Die Transitivität folgt aus dem vorherigen Punkt, da sich aus $a \leq b$ und $b \leq c$, also positiven $b - a$ und $c - b$ die Positivität von $(c - b) + (b - a) = c - a$ ergibt. Bezüglich der Antisymmetrie gelte $a \leq b$ und $b \leq a$, also $\sigma(b - a) \subseteq [0, +\infty)$ und $-\sigma(b - a) = \sigma(a - b) \subseteq [0, +\infty)$ und infolge $\sigma(b - a) \subseteq \{0\}$; siehe Satz 1.1.7. Da $b - a$ selbstadjungiert ist, können wir Fakta 1.5.2, 4, verwenden, um auf $\|b - a\| = r(b - a) = 0$, also $a = b$ zu schließen.

6. Seien $a, b, c, p \in A$ selbstadjungiert, wobei $a \leq b$ und $0 \leq p$. Aus $a \leq b$ folgt unmittelbar $a + c \leq b + c$.

   Außerdem erhalten wir aus $\sigma(-p) = -\sigma(p) \subseteq K^{\mathbb{C}}_{\|p\|}(0)$, dass $-\|p\| - t \notin \sigma(-p)$ für jedes $t > 0$, womit $\sigma(\|p\|e - p) \subseteq [0, +\infty)$, also $p \leq \|p\|e$.

   Im Fall $0 \leq a \leq b$ gilt sogar $\|a\| \leq \|b\|$. In der Tat erhalten wir aus dem gerade Gezeigten mit der Transitivität $0 \leq a \leq \|b\|e$, also $\|b\| - \sigma(a) = \sigma(\|b\|e - a) \subseteq [0, +\infty)$ beziehungsweise $\sigma(a) \subseteq (-\infty, \|b\|]$; siehe Satz 1.1.7. Zusammen mit $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ folgt $\|a\| = r(a) \leq \|b\|$; siehe Fakta 1.5.2, 4.

7. Sind $a \in A$ selbstadjungiert, $c_1, c_2 \in A$ positiv und gilt $c_1 c_2 = 0$ sowie $c_1 - c_2 = a$, so folgt zunächst $(c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 = (c_1 - c_2)^2 = a^2$. Da nach 4 $c_1 + c_2$ positiv ist, erhalten wir wegen der in Proposition 1.6.2 gezeigten Eindeutigkeit der Quadratwurzel $c_1 + c_2 = \sqrt{a^2} = |a|$; siehe Beispiel 1.6.1.

   Mit den in Beispiel 1.6.1 eingeführten positiven a_+, a_- ergibt sich $c_1 = \frac{|a|+a}{2} = a_+$ und $c_2 = \frac{|a|-a}{2} = a_-$. Also sind a_+, a_- in A eindeutig mit der Eigenschaft, dass $a_+, a_- \geq 0$, $a = a_+ - a_-$ und $a_+ a_- = 0$.

8. Für $a \in A$ ist $a^* a$ immer positiv.

   Um das einzusehen, schreiben wir das offensichtlich selbstadjungierte $b := a^* a$ als $b_+ - b_-$ mit $b_+, b_- \geq 0$; siehe Beispiel 1.6.1. Für $c := a b_-$ folgt aus 4

$$-c^* c = -b_- a^* a b_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = b_-^3 \geq 0\,. \tag{1.12}$$

   Gemäß Fakta 1.5.2, 1, schreiben wir $c = c_r + \mathrm{i}c_i$ und $c^* = c_r - \mathrm{i}c_i$ mit selbstadjungierten $c_r, c_i \in A$ und erhalten $c^*c + cc^* = 2c_r^2 + 2c_i^2$, also $cc^* = 2c_r^2 + 2c_i^2 - c^*c \geq 0$; siehe 6. Gemäß Fakta 1.1.5 folgt $\sigma(c^*c)\setminus\{0\} = \sigma(cc^*)\setminus\{0\} \subseteq (0, +\infty)$. Zusammen mit $\sigma(-c^*c) \subseteq [0, +\infty)$ erhalten wir $\sigma(c^*c) \subseteq \{0\}$, was $\|c^*c\| = r(c^*c) = 0$ und nach (1.12) $b_-^3 = 0$ ergibt. Wegen $0 = \sigma(b_-^3) = \sigma(b_-)^3$ folgt $\|b_-\| = r(b_-) = 0$, also $b_- = 0$ und schließlich $a^*a = b_+ - b_- = b_+ \geq 0$.

9. Nach dem vorherigen Punkt zusammen mit der Existenz von Quadratwurzeln folgt $A_+ = \{a^*a : a \in A\}$.

   Damit erkennen wir auch, dass für selbstadjungierte $a, b \in A$ mit $a \leq b$ und $x \in A$ immer $x^*ax \leq x^*bx$, da $x^*bx - x^*ax = x^*(b-a)x = x^*q^2x = (qx)^*(qx) \in A_+$, wobei q die Quadratwurzel von $b - a$ bezeichnet.

10. Für $0 \leq a$ ist die Invertierbarkeit von a äquivalent zu $\sigma(a) \subseteq (0, +\infty)$ und wegen der Kompaktheit des Spektrums auch zu $\sigma(a) \subseteq [\delta, +\infty)$ beziehungsweise zu $\delta e \leq a$ für ein $\delta > 0$. Wegen $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\} \subseteq (0, +\infty)$ zusammen mit $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1} = a^{-1}$ ist dann auch a^{-1} positiv.

11. Ist a positiv und invertierbar, so folgt aus $\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{\sigma(a)} \subseteq (0, +\infty)$ die Invertierbarkeit von $\sqrt{a}$, wobei auch $(\sqrt{a})^{-1}$ positiv ist. Aus $((\sqrt{a})^{-1})^2 = ((\sqrt{a})^2)^{-1} = a^{-1}$ zusammen mit Eindeutigkeit der Quadratwurzel eines positiven Elementes folgt schließlich $(\sqrt{a})^{-1} = \sqrt{(a^{-1})}$.

12. Sind $a, b \in A$ mit $0 \leq a \leq b$ und ist a invertierbar, so gilt $\delta e \leq a$ für ein $\delta > 0$ und damit $\delta e \leq b$, was wiederum die Invertierbarkeit von b bedeutet.

    Zudem erhalten wir $0 \leq e = \sqrt{a}^{-1} a \sqrt{a}^{-1} \leq \sqrt{a}^{-1} b \sqrt{a}^{-1} =: c$ und wegen $0 \leq \sqrt{c}^{-1}(c - e)\sqrt{c}^{-1} = e - c^{-1}$ die Ungleichung $c^{-1} = \sqrt{a} b^{-1} \sqrt{a} \leq e$, weshalb schließlich $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$ bedingt.

13. Für $a, b \in A$ mit $0 \leq a \leq b$ folgt $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

    Um das einzusehen, setzen wir $p := \sqrt{a}$ und $q := \sqrt{b}$. Für reelles $t > 0$ bezeichnet zudem c_t (d_t) den Realteil (Imaginärteil) von $x_t := (te + q + p)(te + q - p)$; siehe Fakta 1.5.2, 1. Wir erhalten $x_t^* = (te + q - p)(te + q + p)$ und infolge

$$c_t = \frac{1}{2}(x_t + x_t^*) = t^2 e + 2tq + q^2 - p^2 = t^2 e + 2tq + b - a \geq t^2 e\,.$$

Nach den vorherigen Punkten ist c_t invertierbar und positiv. Nach Satz 1.1.7 haben wir $\sigma(e + i\sqrt{c_t}^{-1} d_t \sqrt{c_t}^{-1}) = 1 + i\sigma(\sqrt{c_t}^{-1} d_t \sqrt{c_t}^{-1}) \subseteq 1 + i\mathbb{R}$, womit $e + i\sqrt{c_t}^{-1} d_t \sqrt{c_t}^{-1} = \sqrt{c_t}^{-1} x_t \sqrt{c_t}^{-1}$ und infolge auch x_t sowie x_t^* invertierbar sind. Wegen $x_t^{-1}(te+q+p)(te+q-p) = e$ und $(te+q-p)(te+q+p)(x_t^*)^{-1} = e$ hat $te+q-p$ sowohl eine Links- als auch eine Rechtsinverse und ist daher invertierbar; siehe Fakta 1.1.5. Da $t > 0$ beliebig war, erhalten wit $\sigma(q - p) \subseteq [0, +\infty)$, also $\sqrt{a} = p \leq q = \sqrt{b}$.

Als Anwendung von Proposition 1.6.2 auf die Banachalgebra $A = L_b(H)$ bringen wir folgenden Satz.

Satz 1.6.4 (*Polarzerlegung*). *Sei $T \in L_b(H_1, H_2)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Operatoren $U \in L_b(H_1, H_2)$ und $B \in L_b(H_1)$ mit*

$$T = UB,$$

wobei B positiv und U eine partielle Isometrie auf $\overline{\operatorname{ran}(B)}$ ist, d.h. für $x \in \overline{\operatorname{ran}(B)}$ gilt $\|Ux\| = \|x\|$ und für $x \in \operatorname{ran}(B)^\perp$ gilt $Ux = 0$.
Dabei gilt $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{ran}(U) = \overline{\operatorname{ran}(T)}$, sowie $\ker T = \ker B$.

Beweis. (Existenz): T^*T ist selbstadjungiert und wegen

$$\left(T^*Tg, g\right) = \left(Tg, Tg\right) = \|Tg\|^2 \geq 0$$

existiert eine nichtnegative Quadratwurzel B von T^*T (Proposition 1.6.2). Wir definieren eine Abbildung ($x \in H_1$)

$$V : \begin{cases} \operatorname{ran}(B) & \to & \operatorname{ran}(T), \\ Bx & \mapsto & Tx. \end{cases}$$

Diese ist wegen $Bx = 0 \Rightarrow B^2x = T^*Tx = 0 \Rightarrow 0 = (T^*Tx, x) = \|Tx\|^2 \Rightarrow Tx = 0$ wohldefiniert und hat offensichtlich $\operatorname{ran} T$ als Bild. V ist linear und isometrisch, wobei eingeht, dass B als Wurzel nichtnegativ und daher selbstadjungiert ist ($y = Bx$):

$$\|Vy\|^2 = \|Tx\|^2 = \left(T^*Tx, x\right) = \left(Bx, Bx\right) = \|Bx\|^2 = \|y\|^2$$

V ist insbesondere beschränkt und hat somit eine stetige Fortsetzung $\tilde{V}$ von V auf $\overline{\operatorname{ran}(B)}$. $\tilde{V}$ ist auch isometrisch und hat daher $\overline{\operatorname{ran}(T)}$ als Bild. Durch

$$Ux := \begin{cases} \tilde{V}x, & x \in \overline{\operatorname{ran}(B)}, \\ 0, & x \in \operatorname{ran}(B)^\perp, \end{cases}$$

wird eine partielle Isometrie definiert, die wieder $\overline{\operatorname{ran}(T)}$ als Bild hat. Wegen

$$UBx = VBx = Tx, \ x \in H_1,$$

ist UB die gewünschte Zerlegung von T. $\ker T = \ker B$ folgt sofort aus $UB = T$, da $\ker(U|_{\operatorname{ran} B}) = \{0\}$.
(Eindeutigkeit): Angenommen wir haben auch $\tilde{U}\tilde{B} = T$ für ein weiteres positives $\tilde{B} \in L_b(H_1)$ und eine partielle Isometrie $\tilde{U} \in L_b(H_1, H_2)$ auf $\overline{\operatorname{ran}(\tilde{B})}$. Wegen $(T^*Tx, y) = (\tilde{U}\tilde{B}x, \tilde{U}\tilde{B}y) = (\tilde{B}x, \tilde{B}y) = (\tilde{B}^2x, y)$ für beliebige $x, y \in H$ folgt $B^2 = T^*T = \tilde{B}^2$. Die Eindeutigkeit der Wurzel (Proposition 1.6.2) ergibt $B = \tilde{B}$. Wegen ($y \in \operatorname{ran} B$, dh. $y = Bx$)

$$Uy = UBx = Tx = \tilde{U}Bx = \tilde{U}y$$

stimmen U und $\tilde{U}$ auf $\operatorname{ran} B$ überein, und wegen ihrer Stetigkeit sogar auf $\overline{\operatorname{ran}(B)}$. Schließlich folgt aus $U|_{\operatorname{ran}(B)^\perp} = 0 = \tilde{U}|_{\operatorname{ran}(B)^\perp}$, dass $U = \tilde{U}$. ■

Korollar 1.6.5 (*). *Für $T \in L_b(H_1, H_2)$ mit der Polarzerlegung $T = UB$ ist $T^* = U^*(UBU^*)$ die Polarzerlegung von $T^* \in L_b(H_2, H_1)$.*

Beweis. U^*U ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{ran}(B)}$, woraus $T^* = BU^* = U^*(UBU^*)$ folgt. Wegen $((UBU^*)x, x) = (BU^*x, U^*x) \geq 0$ ist dabei $UBU^* \in L_b(H_2)$ ein positiver Operator.
Aus $U = \iota_{\overline{\operatorname{ran}(T)}} V P_{\overline{\operatorname{ran}(B)}}$, wobei $P_{\overline{\operatorname{ran}(B)}} \in L_b(H_1, \overline{\operatorname{ran}(B)})$ die orthogonale Projektion ist, $V \in L_b(\overline{\operatorname{ran}(B)}, \overline{\operatorname{ran}(T)})$ unitär ist, und $\iota_{\overline{\operatorname{ran}(T)}} \in B(\overline{\operatorname{ran}(T)}, H_2)$ die Einbettungsabbildung ist, folgt $U^* = \iota_{\overline{\operatorname{ran}(B)}} V^* P_{\overline{\operatorname{ran}(T)}}$. Somit ist U^* eine partielle Isometrie auf $\overline{\operatorname{ran}(T)}$ mit $\ker U^{\perp} = \overline{\operatorname{ran} U^*} = \overline{\operatorname{ran}(B)} = \ker B^{\perp}$. Also folgt $\operatorname{ran}(UBU^*) = U(\operatorname{ran} B) = \operatorname{ran} T$, und somit $\overline{\operatorname{ran}(T)} = \overline{\operatorname{ran}(UBU^*)}$. Aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung von T^* folgt die Behauptung. ■

1.7 Positive Funktionale und die GNS-Konstruktion

Definition 1.7.1. Sei A eine C^*-Algebra mit Eins. Ein $f \in A^*$ nennt man positiv, wenn $f(a) \geq 0$ für alle $a \in A_+$.

Fakta 1.7.2. Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $f \in A^*$ positiv.

1. Schreiben wir ein selbstadjungiertes $a \in A$ als $a = a_+ - a_-$ mit positiven a_+, a_- wie in Beispiel 1.6.1, so gilt $f(a) = f(a_+) - f(a_-) \in \mathbb{R}$. Infolge bedingt $a \leq b$ mit einem weiteren selbstadjungierten $b \in A$ wegen $f(b - a) \geq 0$ die Ungleichung $f(a) \leq f(b)$ in $\mathbb{R}$.

   Schreiben wir ein beliebiges $x \in A$ gemäß Fakta 1.5.2, 1, als $x = x_r + \mathrm{i}x_i$ mit selbstadjungierten x_r, x_i, so erhalten wir infolge

   $$f(x^*) = f(x_r - \mathrm{i}x_i) = f(x_r) - \mathrm{i}f(x_i) = \overline{f(x_r) + \mathrm{i}f(x_i)} = \overline{f(x)}\,.$$

2. $f(A_+ \cap K_1^A(0))$ ist beschränkt, da es anderenfalls zu jedem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein $a_n \in A_+ \cap K_1^A(0)$ mit $2^n \leq f(a_n)$ gäbe. Für das nach Fakta 1.6.3, 3 und 4, in A_+ liegende $a := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a_n$ hätten wegen der vorhin gezeigten Monotonie von f

   $$f(a) \geq f(\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} a_n) = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} f(a_n) \geq N + 1$$

   für jedes $N \in \mathbb{N}$.

3. Für $C := \sup f(A_+ \cap K_1^A(0)) \in [0, +\infty)$ und ein selbstadjungiertes $a \in A$ geschrieben als $a = a_+ - a_-$ mit positiven a_+, a_- wie in Beispiel 1.6.1 gilt $|f(a)| \leq |f(a_+)| + |f(a_-)| \leq C(\|a_+\| + \|a_-\|) \leq 2C\|a\|$.

   Schreiben wir ein beliebiges $x \in A$ gemäß Fakta 1.5.2, 1, als $x = x_r + ix_i$, so stellt sich f wegen $|f(x)| \leq |f(x_r)| + |f(x_i)| \leq 2C(\|x_r\| + \|x_i\|) \leq 4C\|x\|$ als beschränkt heraus.

4. $A \times A \ni (x; y) \mapsto f(y^* x) \in \mathbb{C}$ eine offenbar sesqulineare und wegen des vorherigen Punktes hermitesche Abbildung. Wegen $A_+ = A^* A$ ist diese sogar positiv semidefinit.

5. Für $c \in A$ mit $f(c^* c) = 0$ folgt aus der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewendet auf $(x; y) \mapsto f(y^* x)$, dass $|f(d^* c)|^2 \leq f(c^* c) \cdot f(d^* d) = 0$, weshalb $f(c^* d) = 0 = \overline{f(c^* d)} = f((c^* d)^*) = f(d^* c)$ für alle $d \in A$. Also gilt

$$N_f := \{c \in A : f(c^* c) = 0\} = \bigcap_{d \in A} \ker(x \mapsto f(d^* x)),$$

womit N_f einen (nach Punkt 3 abgeschlossenen) Unterraum von A bildet. Da aus $f(c^* d) = 0$ für alle $d \in A$ auch $f((bc)^* d) = f(c^*(b^* d)) = 0$ folgt, gilt $bN_f \subseteq N_f$ für jedes $b \in A$, bildet N_f also ein Linksideal in A.

6. Auf A/N_f ist durch $([x]_{N_f}, [y]_{N_f})_f := f(y^* x)$ eine Abbildung von $(A/N_f) \times (A/N_f)$ nach $\mathbb{C}$ wohldefiniert, da für zwei andere Repräsentanten $u \in [x]_{N_f}$ und $v \in [y]_{N_f}$, also $u - x, v - y \in N_f$ nach dem vorherigen Punkt

$$\begin{aligned} f(v^* u) &= f((y + (v - y))^*(x + (u - x))) \\ &= f(y^* x) + f((v - y)^* x) + f(y^*(u - x)) + f((v - y)^*(u - x)) = f(y^* x). \end{aligned}$$

Die Eigenschaften, sesquiliniar, hermitesch und positiv semidefinit zu sein, vererben sich offenbar von $(x; y) \mapsto f(y^* x)$ auf $(.,.)_f$. Zudem bedingt $([x]_{N_f}, [x]_{N_f})_f = f(x^* x) = 0$ die Tatsache, dass $x \in N_f$, also dass $[x]_{N_f} = [0]_{N_f}$, weshalb sich $(.,.)_f$ sogar als positiv definit herausstellt.

Mit $(H_f, (.,.)_f)$ bezeichnen wir die Hilbertraumvervollständigung von $(A/N_f, (.,.)_f)$ und mit $\|.\|_f$ die auf H_f von $(.,.)_f$ induzierte Norm.

7. Für $b \in A$ ist durch $b_f([x]_{N_f}) := [bx]_{N_f}$ eine offenbar lineare Abbildung von A/N_f nach A/N_f wohldefiniert, da wegen der Linksidealeigenschaft von N_f für $u \in [x]_{N_f}$ immer $bu = bx - b(u - x) \in [bx]_{N_f}$ und damit $[bu]_{N_f} = [bx]_{N_f}$.

Nach Fakta 1.6.3, 6 und 9, gilt $b^* b \leq \|b^* b\| e$ und daher $x^* b^* bx \leq \|b^* b\| x^* x$. Da f monoton auf selbstadjungierten Elementen ist, erhalten wir

$$\|b_f([x]_{N_f})\|_f^2 = \|[bx]_{N_f}\|_f^2 = f(x^* b^* bx) \leq \|b^* b\| f(x^* x) = \|b\|^2 \|[x]_{N_f}\|_f^2,$$

weshalb $b_f : A/N_f \to A/N_f$ eine Abbildungsnorm kleiner oder gleich $\|b\|$ hat.

Die stetige Fortsetzung von b_f zu einem ebenfalls durch $\|b\|$ beschränkt linearen Oper von H_f nach H_f bezeichnen wir ebenfalls mit b_f, also $b_f \in L_b(H_f)$.

8. Weil für $b, c, x \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sowohl $(bc)_f([x]_{N_f}) = [bcx]_{N_f} = b_f([cx]_{N_f}) = b_f(c_f([x]_{N_f}))$ als auch $(\alpha b + \beta c)_f([x]_{N_f}) = [(\alpha b + \beta c)x]_{N_f} = (\alpha b_f)([x]_{N_f}) + (\beta c_f)([x]_{N_f})$, gilt $(bc)_f = b_f c_f$ und $(\alpha b + \beta c)_f = \alpha b_f + \beta c_f$ auf A/N_f und infolge auf H_f. Also stellt $\psi_f(b) := b_f$ einen Algebrenhomomorphismus von A nach $L_b(H_f)$ dar, der wegen $\|b_f\| \leq \|b\|$ kontraktiv ist und wegen $e_f([x]_{N_f}) = [ex]_{N_f} = [x]_{N_f}$ die Eins $e \in A$ auf die Eins $I_f \in L_b(H_f)$ (Identität auf H_f) abbildet. Schließlich erhalten wir aus

$$(b_f([x]_{N_f}), [y]_{N_f})_f = f(y^* bx) = f((b^* y)^* x) = ([x]_{N_f}, (b^*)_f([y]_{N_f}))_f$$

für $b, x, y \in A$ zusammen mit der Dichtheit von A/N_f in H_f, dass auch $\psi_f(b_f)^* = \psi_f(b^*)$, wodurch sich $\psi_f : A \to L_b(H_f)$ sogar als C^*-Algebrenhomomorphismus herausstellt.

Proposition 1.7.3. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins. Ein $f \in A^*$ ist genau dann positiv, wenn $\|f\| = f(e)\,(< +\infty)$.*

Beweis. Ein positives $f \in A^*$ ist nach Fakta 1.7.2, 3, beschränkt, also $f \in A'$. Zudem können wir nach Fakta 1.7.2,4, auf $(x; y) \mapsto f(y^*x)$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung anwenden und erhalten für $x, y \in A$ die Ungleichung

$$|f(y^*x)|^2 \leq f(x^*x) \cdot f(y^*y)\,,$$

was speziell für $y = e$ wegen $|f(x)|^2 = |f(e^*x)|^2 \leq f(e)f(x^*x) \leq f(e)\,\|f\|\,\|x^*x\| = f(e)\|f\|\,\|x\|^2$ die Ungleichung $\|f\|^2 \leq f(e)\|f\|$ ergibt. Wegen $f(e) = |f(e)| \leq \|f\|\,\|e\|$ haben wir in der Tat $\|f\| = f(e)$.
Für die Umkehrung sei $f \in A'$ mit $\|f\| = f(e)$, wobei wir wegen der Linearität von f ohne Beschränkund der Allgemeinheit $\|f\| = f(e) = 1$ annehmen können. Nach Lemma 1.5.5 gilt $f(a) \in \mathbb{R}$ für selbstadjungierte $a \in A$.
Für $a \in A_+$ gilt nach Fakta 1.6.3, 2, $\|\,\|a\|e - a\,\| \leq \|a\|$ und $f(a) \in [-\|a\|, +\|a\|]$, weshalb

$$\|a\| - f(a) = |\,\|a\| - f(a)\,| = |f(\|a\|e - a)| \leq \|\,\|a\|e - a\,\| \leq \|a\|$$

und folglich $f(a) \geq 0$. ∎

Lemma 1.7.4. *Ist A eine C^*-Algebra mit Eins und $x \in A$ normal, so gibt es ein positives $f \in A'$ mit $\|f\| = 1$ und $|f(x)| = \|x\|$.*

Beweis. Ist M den Gelfandraum der kommutieren C^*-Algebra $A(e, x)$ mit Eins und $\hat{.} : A(e, x) \to C(M)$ die Gelfandtransformation, so gilt $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$, weshalb kompaktheitsbedingt $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty = |\hat{x}(m)| = |m(x)|$ für zumindest ein $m \in M$; siehe Satz 1.5.8 und Lemma 1.4.1. Bezeichnet $f \in A'$ eine Fortsetzung gemäß des Satzes von Hahn-Banach von m mit $\|f\| = \|m\| = 1$, so ist f wegen $f(e) = m(e) = 1$ nach Proposition 1.7.3 positiv, wobei $|f(x)| = |m(x)| = \|x\|$. ∎

Satz 1.7.5 (Gelfand-Naimark-Segal)**.** *Zu jeder C^*-Algebra A mit Eins gibt es einen Hilbertraum H und eine C^*-Unteralgebra C von $L_b(H)$ mit der Identität I als Eins und einen C^*-Algebrenisomorphismus $\psi : A \to C$. Dabei ist die Identität $I : H \to H$ die Eins von C und es gilt $\psi(e_A) = I$.*
Insbesondere kann jede C^*-Algebra mit Eins als C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ aufgefasst werden.

Beweis. Nach Proposition 1.7.3 ist $I := \{f \in A' : f(e) = 1 = \|f\|\}$ genau die Menge aller positiven Funktionale von Abbildungsnorm eins auf A. Für $f \in I$ bezeichnen wir mit H_f den in Fakta 1.7.2, 6, betrachteten Hilbertraum und setzen

$$H = \ell^2(H_f; f \in I) = \{(\xi_f)_{f\in I} \in \prod_{f\in I} H_f : \sum_{f\in I} \|\xi_f\|_f^2 < +\infty\}\,.$$

Ähnlich wie der klassische ℓ^2 bildet $\ell^2(H_f; f \in I)$ einen Hilbertraum, wenn man ihn mit dem Skalarprodukt $((\xi_f)_{f\in I}, (\eta_f)_{f\in I}) = \sum_{f\in I}(\xi_f, \eta_f)_f$ versieht. Mit den Kontraktionen $\psi_f : A \to L_b(H_f)$ wie in Fakta 1.7.2, 8, ist für $b \in A$ die Abbildung $\psi(b) : H \to \prod_{f\in I} H_f$ mit $\psi(b)((\xi_f)_{f\in I}) = (\psi_f(b)(\xi_f))_{f\in I}$ offenbar linear, wobei $\psi(b)$ wegen

$$\sum_{f\in I} \|\psi_f(b)(\xi_f)\|_f^2 \leq \sum_{f\in I} \underbrace{\|\psi_f(b)\|^2}_{\leq\|b\|^2} \|\xi_f\|_f^2 = \|b\|^2 \sum_{f\in I} \|\xi_f\|_f^2 < +\infty$$

in der Tat nach H hinein abbildet und durch $\|b\|$ beschränkt ist. Folglich stellt unser $\psi : A \to L_b(H)$ nach Fakta 1.7.2, 8, einen kontraktiven Algebrenhomomorphismus dar. Dabei folgt aus $\psi_f(e) = I_f$, dass $\psi(e) = I \in L_b(H)$ und aus

$$\sum_{f\in I}(\psi_f(b)(\xi_f), \eta_f)_f = \sum_{f\in I}(\xi_f, \psi_f(b^*)(\eta_f))_f \,,$$

dass $\psi : A \to L_b(H)$ sogar ein C^*-Algebrenhomomorphismus ist.
Zu $c \in A$ gibt es nach Lemma 1.7.4 ein $g \in I$ mit $g(c^*c) = \|c^*c\| = \|c\|^2$, was $(\psi_g(c)([e]_{N_g}), \psi_g(c)([e]_{N_g}))_g = g(c^*c) = \|c^*\|$ und infolge

$$(\psi(c)(\delta_{fg} \cdot [e]_{N_f})_{f\in I}, \psi(c)(\delta_{fg} \cdot [e]_{N_f})_{f\in I}) = (\psi_g(c)([e]_{N_g}), \psi_g(c)([e]_{N_g}))_g = \|c\|^2$$

nach sich zieht, wobei $\delta_{fg} = 1 \in \mathbb{C}$ für $f = g$ und $\delta_{fg} = 0 \in \mathbb{C}$ anderenfalls. Wegen $((\delta_{fg} \cdot [e]_{N_f})_{f\in I}, (\delta_{fg} \cdot [e]_{N_f})_{f\in I}) = ([e]_{N_g}, [e]_{N_g})_g = g(e^*e) = 1$ erfüllt die Abbildungsnorm von $\psi(c)$ neben $\|\psi(c)\| \le \|\psi\|\,\|c\| = \|c\|$ auch $\|\psi(c)\| \ge \|c\|$.
Also ist $\psi : A \to L_b(H)$ sogar eine Isometrie, weshalb $C := \psi(A)$ eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ bildet. ■

1.8 C^*-Algebren ohne Eins*

Für eine Banachalgebra A, $a \in A$ und die Abbildung $L_a : A \to A$ definiert durch $L_a(x) = ax$ ist L_a wegen der Linearität der Algebrenmultiplikation im zweiten Argument linear und hat wegen

$$\|L_a(x)\| = \|ax\| \le \|a\|\,\|x\|, \quad x \in A \,,$$

eine Abbildungsnorm kleiner oder gleich $\|a\|$. Folglich ist die wegen $L_{\alpha a+\beta b}(x) = (\alpha a + \beta b)x = \alpha ax + \beta bx = (\alpha L_a + \beta L_b)(x)$ lineare Abbildung $\Psi : A \to L_b(A)$ definiert durch $\Psi(a) = L_a$ eine Kontraktion. Wir schließen von

$$L_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = L_a(L_b(x)), \quad x \in A \,,$$

sogar darauf, dass Ψ ein Algebrenhomomorphismus ist und infolge $\Psi(A)$ eine Unteralgebra von $L_b(A)$ abgibt.
In dem Fall, dass A eine Banachalgebra mit Eins ist, gilt $\|L_a(e)\| = \|a\|$, weshalb sogar $\|L_a\| = \|a\|$ und infolge Ψ eine Isometrie ist. Im Fall einer C^*-Algebra trifft diese Tatsache auch ohne Eins zu.

Lemma 1.8.1. *Ist A eine C^*-Algebra mit oder ohne Eins, so stellt die Abbildung $\Psi : A \to L_b(A)$ mit $\Psi(a) = L_a$ eine Isometrie dar.*
Setzen wir zudem $\Psi(a)^* := \Psi(a^*)$ für $a \in A$, so bildet $\Psi(A)$ ($\subseteq L_b(A)$) versehen mit der Abbildungsnorm, mit der Hintereinanderausführung als Algebrenmultiplikation und mit der soeben eingeführten Abbildung $.^*$ eine C^*-Algebra und Ψ als Abbildung von A auf $\Psi(A)$ ist ein C^*-Algebrenisomorphismen.

Beweis. Wegen $\|L_a\| \le \|a\|$ folgt aus

$$\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|L_a(a^*)\| \le \|L_a\|\,\|a^*\| = \|L_a\|\,\|a\| \le \|a\|^2$$

$\|L_a\| = \|a\|$, womit $\Psi : A \to \Psi(A)$ einen isometrischen Algebrenisomorphismus darstellt. Insbesondere kann $.^* : \Psi(A) \to \Psi(A)$ als $\Psi \circ (.^*) \circ \Psi^{-1}$ geschrieben werden, woraus sich sofort ergibt, dass diese Abbildung die in Definition 1.5.1 geforderten Eigenschaften hat, auf dass sich $\Psi(A)$ als C^*-Algebra herausstellt. Offenbar ist $\Psi : A \to \Psi(A)$

dann ein C^*-Algebrenisomorphismus. ■

Proposition 1.8.2. *Mit der Notation aus Lemma 1.8.1 liegt die Identität $I \in L_b(A)$ genau dann in $\Psi(A)$, wenn A eine Eins enthält.*
In dem Fall, dass A keine Eins enthält, bildet $\Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}\,(\subseteq L_b(A))$ versehen mit der Hintereinanderausführung und der Involution $(\Psi(a)+\alpha I)^* := \Psi(a^*)+\bar{\alpha}I$ eine C^*-Algebra mit I als Eins, welche die Hyperebene $\Psi(A)$ als Ideal enthält.

Beweis. Ist e eine Eins in A, so hat man offenbar $\Psi(e) = L_e = I$. Gilt umgekehrt $\Psi(b) = L_b = I$, so folgt aus $\Psi(ba) = \Psi(b)\Psi(a) = \Psi(a) = \Psi(a)\Psi(b) = \Psi(ab)$ für jedes $a \in A$ und $\|\Psi(b)\| = 1$, dass $ba = a = ab$ und $\|b\| = 1$, womit b eine Eins in A abgibt.
In dem Fall, dass A keine Eins enthält, identifiziert man $\Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}$ versehen mit der Hintereinanderausführung leicht als Unteralgebra von $L_b(A)$ mit Eins und $\Psi(A)$ als Ideal in $\Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}$. Man zeigt auch ohne Schwierigkeiten, dass die in der Aussage definierte Abbildung $.^* : \Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\} \to \Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}$ eine konjugiert lineare Involution abgibt. Zudem gilt für $a, b \in A$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\Big((\Psi(a)+\alpha I)(\Psi(b)+\beta I)\Big)^* &= \Big(\Psi(a)\Psi(b)+\beta\Psi(a)+\alpha\Psi(b)+\alpha\beta I\Big)^* \\
&= \Big(\Psi(ab+\beta a+\alpha b)+\alpha\beta I\Big)^* \\
&= \Psi((ab+\beta a+\alpha b)^*)+\overline{\alpha\beta}I) = \Psi(b^*a^*+\bar{\beta}a^*+\bar{\alpha}b^*)+\bar{\alpha}\bar{\beta}I) \\
&= (\Psi(b^*)+\bar{\beta}I)(\Psi(a^*)+\bar{\alpha}I) = (\Psi(b)+\beta I)^*(\Psi(a)+\alpha I)^* .
\end{aligned}$$

Für $a, x \in A$ und $\alpha \in A$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\|(\Psi(a)+\alpha I)(x)\|^2 &= \|ax+\alpha x\|^2 = \|(ax+\alpha x)^*(ax+\alpha x)\| \\
&= \|x^*a^*ax+\alpha x^*a^*x+\bar{\alpha}x^*ax+|\alpha|^2x^*x\| \\
&= \|x^*(\Psi(a^*a)(x)+\alpha\Psi(a^*)(x)+\bar{\alpha}\Psi(a)(x)+|\alpha|^2x)\| \\
&= \|\Psi(x^*)\circ((\Psi(a)+\alpha I)^*(\Psi(a)+\alpha I))(x)\| \\
&\le \|\Psi(x^*)\circ((\Psi(a)+\alpha I)^*(\Psi(a)+\alpha I))\|\,\|x\| \\
&\le \|(\Psi(a)+\alpha I)^*(\Psi(a)+\alpha I)\|\,\|x\|^2
\end{aligned}$$

die Ungleichung

$$\|(\Psi(a)+\alpha I)\|^2 = \sup_{x\in A,\|x\|=1} \|(\Psi(a)+\alpha I)(x)\|^2 \le \|(\Psi(a)+\alpha I)^*(\Psi(a)+\alpha I)\|\,,$$

weshalb sich $\Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}$ nach Fakta 1.5.2, 3, als C^*-Algebra herausstellt. ■

Korollar 1.8.3. *Jede C^*-Algebra A ohne Eins ist in einer C^*-Algebra B mit Eins als Hyperebene isometrisch enthalten.*
Ist C eine beliebige C^*-Algebra mit Eins e_C, die ebenfalls A als Hyperebene enthält, so bildet A in C immer ein Ideal. Zudem ist $\varphi : B \to C$, welches definiert ist durch $\varphi|_A \equiv \mathrm{id}_A$ und $\varphi(e_B) = e_C$, eine isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus.

Beweis. Für die Existenz einer um eine Dimension größere C^*-Algebra setzen wir $B := A \dotplus \operatorname{span}\{e_B\}$ mit einem abstrakten Element e_B und betrachten die lineare Bijektion $\mathit{\Psi} : A \dotplus \operatorname{span}\{e\} \to \Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\}$ mit $\mathit{\Psi}|_A = \Psi$ und $\mathit{\Psi}(e_B) = I$, wobei $\Psi : A \to L_b(H)$

und $\Psi(A) \dotplus \operatorname{span}\{I\} \subseteq L_b(A)$ wie in Lemma 1.8.1 bzw. Proposition 1.8.2 sind. Definieren wir die Multiplikation, $.^*$ und $\|.\|$ auf B so, dass Ψ einen isometrischen Algebrenisomorphismus abgibt, dann stellt sich B als C^*-Algebra B mit e_B als Eins, die A als Hyperebene enthält, heraus.
Ist C eine beliebige C^*-Algebra mit Eins e_C, die ebenfalls A als Hyperebene enthält, so gilt $e_C \notin A$ und daher $C = A \dotplus \operatorname{span}\{e_C\}$, woraus sich direkt ergibt, dass A ein Ideal in C abgibt. Schließlich überprüft man leicht, dass $\varphi : B \to C$ mit $\varphi(a + \alpha e_B) = a + \alpha e_C$ einen C^*-Algebrenisomorphismus abgibt, welcher gemäß Satz 1.5.4 isometrisch ist. ■

Korollar 1.8.4 (Gelfand-Naimark-Segal)**.** *Zu jeder C^*-Algebra A (mit oder ohne Eins) gibt es einen Hilbertraum H und eine C^*-Unteralgebra C von $L_b(H)$ und einen C^*-Algebrenisomorphismus $\psi : A \to C$. Im Fall, dass A eine Eins e hat, ist die Identität I eine Eins von C und es gilt $\psi(e_A) = I$.*
Insbesondere kann jede C^*-Algebra als C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ aufgefasst werden.

Beweis. Hat A eine Eins, so folgt die Aussage aus Satz 1.7.5. Anderenfalls gibt es eine C^*-Algebra B mit Eins wie in Korollar 1.8.3. Wenden wir Satz 1.7.5 auf B an und schränken den entsprechenden C^*-Algebrenisomorphismus $\psi : B \to C$ auf A ein, so erhalten wir die Aussage auch in diesem Fall. ■

Proposition 1.8.5. *Ist A eine kommutative C^*-Algebra ohne Eins und B eine C^*-Algebra mit Eins, welche A als Hyperebene enthält, so ist auch B kommutativ.*
Zudem bildet die Gelfandtransformation $\hat{}\ : B \to C(M_B, \mathbb{C})$ die Hyperebene A isometrisch auf $\{f \in C(M_B, \mathbb{C}) : f(m_\infty) = 0\}$ ab, wobei $m_\infty \in M_B$ jenes multiplikative Funktional ist, das gemäß Satz 1.3.4 durch $\ker m_\infty = A$ *bestimmt ist.*
Schließlich ist $\hat{}|_A : A \to \{f \in C(M_B, \mathbb{C}) : f(m_\infty) = 0\}$ ein isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus.

Beweis. Die Kommutativität von B erhalten wir unmittelbar aus $B = A \dotplus \operatorname{span}\{e_B\}$. Als Ideal mit Kodimension eins bildet A natürlich ein maximales Ideal, weshalb m_∞ durch $\ker m_\infty = A$ gemäß Satz 1.3.4 eindeutig bestimmt ist. Für $b \in B$ gilt $b \in A$ genau dann, wenn $0 = m_\infty(b) = \hat{b}(m_\infty)$, was offenbar $\hat{}(A) = \{f \in C(M_B, \mathbb{C}) : f(m_\infty) = 0\}$ nach sich zieht.
Schließlich bildet $\hat{}|_A$ als Einschränkung eines isometrischen C^*-Algebrenisomorphismus auf die C^*-Unteralgebra A auf die C^*-Unteralgebra $\{f \in C(M_B, \mathbb{C}) : f(m_\infty) = 0\}$ ab und $\hat{}|_A : A \to \{f \in C(M_B, \mathbb{C}) : f(m_\infty) = 0\}$ stellt einen isometrischer C^*-Algebrenisomorphismus dar. ■

Definition 1.8.6. Ist A eine C^*-Algebra ohne Eins, so definieren wir das Spektrum $\sigma_A(a)$ für $a \in A$ als $\sigma_B(a)$, wobei B wie in Korollar 1.8.3 ist.

Man beachte, dass $\sigma_B(a)$ wegen der zweiten Aussage von Korollar 1.8.3 nicht von der konkret gewählten Erweiterung B, die A als Hyperebene enthält, abhängt.

Bemerkung 1.8.7. Für $a \in A$ gilt in der Situation von Definition 1.8.6 immer $0 \in \sigma_A(a)$, da anderenfalls $ab = e_B = ba$ für ein $b \in B$, was aber der Tatsache, dass A ein Ideal in B mit $e_B \notin A$ ist, aus Korollar 1.8.3 widerspricht.

Beispiel 1.8.8. Wie wir in Beispiel 1.5.3 gesehen haben, bildet für einen topologischen Raum X der Banachraum $C_0(X,\mathbb{C})$ eine C^*-Algebra. Wir setzen X als lokalkompakt und Hausdorffsch voraus. Als Folge des Lemma von Urysohn gibt es dann zu jedem $t \in X$ ein $f \in C_0(X,\mathbb{C})$ mit $f(t) \neq 0$; siehe Topologiekapitel in der Analysis.

- Ist X kompakt, so hat $C_0(X,\mathbb{C}) = C_b(X,\mathbb{C})$ die konstante Einsfunkion $\mathbb{1}$ als Eins. Ist umgekehrt $h \in C_0(X,\mathbb{C})$ ein Einselement, so folgt $h(t) = 1$ für alle $t \in X$, für die es ein $f \in C_0(X,\mathbb{C})$ mit $f(t) \neq 0$ gibt, weshalb $h = \mathbb{1}_X$. Wegen $h \in C_0(X,\mathbb{C})$ gilt $h(t) < \frac{1}{2}$ für alle $t \in X \setminus K$ mit einer kompakten Teilmenge von X. Weil es aber keine solchen $t \in X$ gibt, ist $X = K$ kompakt.

  Insbesondere hat $C_0(X,\mathbb{C})$ genau dann eine Eins, wenn X sogar kompakt ist. In diesem Fall gilt für $f \in C_0(X,\mathbb{C})$ gemäß Beispiel 1.5.3, i,

$$\sigma_{C_0(X,\mathbb{C})}(f) = \sigma_{C_b(X,\mathbb{C})}(f) = f(X)\,.$$

- Ist X nicht kompakt, so können wir jede Funktion $f \in C_0(X,\mathbb{C})$ durch $f(\infty) = 0$ zu einer stetigen Funktion auf der Alexandroff-Kompaktifizierung $X \cup \{\infty\}$ forsetzen, wodurch sich $C_0(X,\mathbb{C})$ auf natürliche Weise mit der Hyperebene $\{f \in C_b(X \cup \{\infty\}) : f(\infty) = 0\}$ identifizieren lässt. $C_b(X \cup \{\infty\})$ ist wie in Korollar 1.8.3 eine größere C^*-Algebra mit Eins, die $C_0(X,\mathbb{C})$ isometrisch als Hyperebene enthält. Nach Beispiel 1.5.3, i, gemäß Definition 1.8.6 und wegen der Kompaktheit von $X \cup \{\infty\}$ gilt für $f \in C_0(X,\mathbb{C})$

$$\sigma_{C_0(X,\mathbb{C})}(f) = \sigma_{C_b(X\cup\{\infty\},\mathbb{C})}(f) = f(X \cup \{\infty\}) = f(X) \cup \{0\}\,.$$

Satz 1.8.9. *Sind A und B zwei C^*-Algebren, wobei A isometrisch in B enthalten ist, so gilt $\sigma_A(a) \setminus \{0\} = \sigma_B(a) \setminus \{0\}$ für jedes $a \in A$.*

Beweis. Gemäß Korollar 1.8.3 und Definition 1.8.6 können wir annehmen, dass B die Eins e_B enthält.
Im Fall, dass A keine Eins enthält, ist $A \dotplus \operatorname{span}\{e_B\}$ eine C^*-Algebra mit Eins, die A mit Kodimension eins enthält, womit gemäß Definition 1.8.6 $\sigma_A(a) = \sigma_{A\dotplus \operatorname{span}\{e_B\}}$. Aus Satz 1.5.7 erhalten wir $\sigma_B(a) = \sigma_{A\dotplus \operatorname{span}\{e_B\}}$.
Im Fall, dass A eine Eins enthält und diese mit e_B übereinstimmt, folgt wieder mit Satz 1.5.7 die Gleichheit $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.
Im Fall, dass A die Eins e_A enthält und dieses nicht mit e_B übereinstimmt, womit auch $e_B \notin A$, gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u := -\frac{1}{\lambda}a$

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma_A(a) &\Leftrightarrow \exists v \in A : (e_A + v)(e_A + u) = e_A = (e_A + u)(e_A + v)\\
&\Leftrightarrow \exists v \in A : v + u + vu = 0 = v + u + uv\\
&\Leftrightarrow \exists v \in A + \operatorname{span}\{e_B\} : v + u + vu = 0 = v + u + uv\,.
\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz ergibt sich aus der Tatsache, dass für $v = w + \eta e_B \in A + \operatorname{span}\{e_B\}$ mit $w \in A$ aus $v + u + vu = 0$ sicherlich $v = -u - vu = -u - wu - \eta u \in A$ folgt. Man verifiziert leicht, dass auch $A \dotplus \operatorname{span}\{e_B\}$ eine C^*-Algebra mit der Eins e_B ist, weshalb zusammen mit Satz 1.5.7

$$\begin{aligned}
\exists v \in A + \operatorname{span}\{e_B\} :& v + u + vu = 0 = v + u + uv\\
&\Leftrightarrow \exists v \in A + \operatorname{span}\{e_B\} : (e_B + v)(e_B + u) = e_B = (e_B + u)(e_B + v)\\
&\Leftrightarrow \lambda \in \sigma_{A\dotplus \operatorname{span}\{e_B\}}(a) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_B(a)\,.
\end{aligned}$$

■

Definition 1.8.10. Für eine C^*-Algebra A ohne Eins heißt ein $a \in A$ positiv, wenn $a = a^*$ und $\sigma_A(a) \subseteq [0, +\infty)$. Mit A_+ bezeichnen wir die Menge aller positiven $a \in A$.

Bemerkung 1.8.11. Da $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ zu $\sigma(a) \setminus \{0\} \subseteq (0, +\infty)$ äquivalent ist, erkennen wir aus Satz 1.8.9, dass für zwei C^*-Algebren $A \subseteq B$ (mit oder ohne Eins) und $a \in A$ die Tatsache, dass a positiv ist, nicht davon abhängt, ob a als Element von A oder von B angesehen wird. Insbesondere gilt $A_+ = B_+ \cap A$.

Fakta 1.8.12. Sei A eine C^*-Algebra ohne Eins und B eine C^*-Algebra mit Eins, welche A als Hyperebene enthält. Folgende Eigenschaften aus Fakta 1.6.3 von positiven Elementen vererben sich auf A.

1. Wegen $A_+ = B_+ \cap A$ und der Abgeschlossenheit von B_+ in B ist auch A_+ in A abgeschlossen.

   Da A eine Unteralgebra von B ist gilt zudem $p+q, p^n, a^{2n}, x^*x \in A_+$ für $p, q \in A_+$, selbstadjungierte $a \in A$ und $x \in A$.

2. Für selbstadjungierte $a, b \in A$ schreiben wir $a \leq b$, wenn $a \leq b$ in B, was zur Positivität von $b - a$ äquivalent ist. $\leq$ ist dann eine Halbordnung auf A.

   Für selbstadjungierte $a, b, c \in A$ folgt aus $a \leq b$ immer $a+c \leq b+c$, $x^*ax \leq x^*bx$ und im Fall $0 \leq a \leq b$ sogar $\|a\| \leq \|b\|$, da A eine Unteralgebra von B abgibt.

3. Für $a \in A_+$ liegt $\sqrt{a}$ ad hoc in B_+. Aus $\sqrt{a} = c + \gamma e_b$ mit $c \in A$, $\gamma \in \mathbb{C}$ folgt aber $c^2 + 2\gamma c + \gamma^2 e_b = \sqrt{a}^2 = a \in A$ mit $c^2 + 2\gamma c \in A$, weshalb $\gamma = 0$ sein muss. Also liegt $\sqrt{a}$ sogar in A_+ und ist das eindeutig positive Element p mit $p^2 = a$.

   Für ein selbstadjungiertes $a \in A$ erhalten wir aus $a^2 \in A$ auch $|a| = \sqrt{a^2} \in A_+$ und infolge $a_+ = \frac{|a|+a}{2} \in A$ sowie $a_- = \frac{|a|-a}{2} \in A$.

Kapitel 2

Spektraltheorie beschränkter normaler Operatoren

2.1 Spektralmaße

Wir möchten zunächst die bereits bekannte Theorie der Spektralmaße aus der Funktionalanalysis 1, [4], wiederholen, da sie für der Verallgemeinerung des Spektralsatzes auf normale Operatoren eine wichtige Rolle spielt.
Für das Folgende sei daran erinnert, dass ein $P \in L_b(H)$ genau dann eine orthogonale Projektion ist, wenn $P^* = P = P^2$.

Definition 2.1.1. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und H ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist eine Funktion $E : \mathcal{A} \to L_b(H)$, sodass gilt

(SM1) Für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion.

(SM2) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$.

(SM3) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für je zwei $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$.

(SM4) Sind $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt

$$E\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \Delta_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

im Sinne der starken Operatortopologie, dh. $E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\Big)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x$ für alle $x \in H$.

Aus (SM3) folgt insbesondere, dass $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_2)E(\Delta_1)$. Für disjunkte $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$ gilt wegen (SM2) sogar $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\emptyset) = 0$. Insbesondere ist für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, wie in (SM4) die Voraussetzung des folgenden Lemma 2.1.2 erfüllt. Also konvergiert die Reihe in (SM4) sowieso im Sinne der starken Operatortopologie.
Wegen $(P_m x, P_n y) = (P_n P_m x, y)$ für alle $x, y \in H$ bedeutet die Voraussetzung $P_n P_m = 0$ für $n \neq m$ gerade, dass $\operatorname{ran} P_m \perp \operatorname{ran} P_n$ für alle $n \neq m$.

Lemma 2.1.2. *Sei H ein Hilbertraum, und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Projektionen auf H mit $P_nP_m = 0$, $n \neq m$. Dann konvergiert die Reihe*

$$P := \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

im Sinne der starken Operatortopologie, dh. es gilt $Px = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N P_n x$ für alle $x \in H$. Ihre Summe P ist eine orthogonale Projektion, und es gilt

$$\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n, \qquad \operatorname{ran} P = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} P_n} .$$

Beweis. Wie man aus $P_nP_m = P_mP_n = 0$, $n \neq m$, leicht herleitet ist die Summe $\sum_{n=1}^N P_n$ eine orthogonale Projektion mit Bildraum $\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^N \operatorname{ran} P_n$. Insbesondere gilt $\| \sum_{n=1}^N P_n\| \leq 1$. Für $x \in H$ gilt

$$\|x\|^2 \geq \Big\| \sum_{n=1}^N P_n x\Big\|^2 = \sum_{n=1}^N \|P_n x\|^2 .$$

Also ist die Folge $\sum_{n=1}^N \|P_n x\|^2$ in N konvergent und daher eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Wegen $(M \leq N)$

$$\Big\| \sum_{n=1}^N P_n x - \sum_{n=1}^M P_n x\Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=M+1}^N P_n x\Big\|^2 = \sum_{n=M+1}^N \|P_n x\|^2 ,$$

ist auch die Folge $(\sum_{n=1}^N P_n x)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und somit konvergent gegen ein $Px \in H$. Offensichtlich ist $x \mapsto Px$ linear. Wegen

$$\|Px\|^2 = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^N P_n x\Big\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \|P_n x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.1}$$

gilt sogar $P \in L_b(H)$. Wir zeigen als nächstes, dass P eine selbstadjungierte Projektion ist:

$$P^2 x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^N P_m \sum_{n=1}^{\infty} P_n x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} P_m P_n x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^N P_m x = Px ,$$

$$(Px, y) = \lim_{N\to\infty} (\sum_{n=1}^N P_n x, y) = \lim_{N\to\infty} (x, \sum_{n=1}^N P_n y) = (x, Py) .$$

Schließlich gilt wegen (2.1) $\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n$, und wir erhalten damit auch

$$\operatorname{ran} P = (\ker P)^{\perp} = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n \Big)^{\perp} = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\ker P_n)^{\perp}} = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} P_n} .$$

■

Um mit Spektralmaßen zu arbeiten, werden wir uns oft mit Hilfe des nächsten Lemmas auf Sätze über komplexe Maße zurückziehen.

Bemerkung 2.1.3. Zunächst wollen wir einige wichtige Eigenschaften von komplexen Maßen aufzählen, vgl. Analysis 3 Skriptum oder [3]. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darauf.

- ⇝ Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß, wenn für alle paarweise disjunkten Folgen $\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}$, von Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta_n). \tag{2.2}$$

  Endliche nichtnegative Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sind spezielle komplexe Maße.

- ⇝ Für ein komplexes Maß μ wird durch $(\Delta \in \mathcal{A})$

$$|\mu|(\Delta) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N},\ \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j = \Delta\right\} \tag{2.3}$$

  eine nichtnegative Mengenfunktion $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definiert, die als *Variation* von μ bezeichnet wird.

  Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches nichtnegatives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist. Es ist damit offensichtlich das kleinste nichtnegative Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sodass $|\mu(\Delta)| \leq \nu(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

- ⇝ Für ein komplexes Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnet $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ die *Totalvariation* von μ.

  Die Abbildung $\mu \mapsto \|\mu\|$ ist in der Tat eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $M(\Omega, \mathcal{A})$ aller komplexen Maße. Mit dieser Norm ist $M(\Omega, \mathcal{A})$ ein Banachraum.

- ⇝ Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein nichtnegatives Maß und $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$, so heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls aus $A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0$ folgt, dass $\nu(A) = 0$. Man zeigt leicht, dass das zu $|\nu| \ll \mu$ äquivalent ist. Offensichtlich gilt immer $\nu \ll |\nu|$.

  Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sagen wir, dass $\nu \ll \mu$, falls $\nu \ll |\mu|$.

- ⇝ Sei μ ein σ-endliches nichtnegatives Maß. Dann ist ein Maß $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ genau dann absolut stetig bezüglich μ, wenn es eine sogenannte *Dichte-Funktion* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ gibt, sodass

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

  Der Zusammenhang zwischen ν und f ist bijektiv (f ist μ-fast überall eindeutig durch ν bestimmt), wobei sogar

$$|\nu|(A) = \int_A |f|\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}, \tag{2.5}$$

  und damit $\|f\|_1 = \|\nu\|$. f heißt die Dichte von ν bzgl. μ.

  Die Dichte von ν bezüglich $|\nu|$ ist unimodular, dh. hat Werte auf der Einheitskreislinie.

⇝ Für $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sei μ irgendein nichtnegatives, σ-endliches Maß mit $\nu \ll \mu$, und sei f die Dichte von ν bezüglich μ.

Eine messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar bzgl. ν ($\in M(\Omega, \mathcal{A})$), wenn $g \cdot f$ integrierbar bzgl. μ ist. Wir definieren dann

$$\int_\Omega g \, d\nu := \int_\Omega g f \, d\mu.$$

Diese Definition ist unabhängig von μ. Außerdem ist das Integral linear im Maß ν und im Integranden g. Für beschränktes g gilt dabei

$$\left| \int_\Omega g \, d\nu \right| \leq \|g\|_\infty \, \|\nu\|. \tag{2.6}$$

⇝ Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ folgt aus den letzten beiden Punkten, dass $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn (2.4) gilt, wobei die Dichte f auch in diesem Fall $|\mu|$-fast überall durch ν eindeutig bestimmt ist.

Ist $g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so gilt dann auch hier

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g f \, d\mu \tag{2.7}$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann integrierbar ist, wenn es die rechte ist.

⇝ Trägt Ω eine Hausdorffsche und lokalkompakte Topologie $\mathcal{T}$ und sind $\mathcal{A}$ die Borelmengen, dh. die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra, so heißen Maße $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ Borelmaß, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq \Omega$. Ein solches Maß heißt *regulär*, falls für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, \ K \text{ ist kompakt}\},$$

und

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A, \ O \text{ ist offen}\}.$$

Ein $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ heißt regulär, falls $|\mu|$ regulär ist.

⇝ Ist $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär, f bzgl. μ integrierbar und ν definiert wie in (2.4), so ist auch ν regulär.

⇝ Die Menge aller regulären $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ bildet einen bzgl. $\|.\|$ abgeschlossenen Unterraum $M_{reg}(\Omega)$, welcher nach dem Rieszschen Darstellungssatz, isometrisch isomorph zu $(C_0(\Omega))'$ ist.

⇝ Hat die Topologie $\mathcal{T}$ auf Ω eine abzählbare Basis, so ist jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär. Insbesondere ist für jede offene oder abgeschlossene Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^p$ jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär.

Lemma 2.1.4. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, und seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung $E_{g,h} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, die definiert ist durch*

$$E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g, h),$$

ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$. Für die Variation $|E_{g,h}|$ gilt die Abschätzung

$$|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$$

Die Totalvariation von $E_{g,h}$ ist somit höchstens gleich $\|g\| \cdot \|h\|$.
Für diese komplexen Maße gilt $E_{g,h} = \overline{E_{h,g}}$, $E_{\lambda g_1+\mu g_2,h} = \lambda E_{g_1,h}+\mu E_{g_2,h}$ sowie $E_{g,\lambda h_1+\mu h_2} = \bar{\lambda} E_{g,h_1} + \bar{\mu} E_{g,h_2}$ für $g, g_1, g_2, h.h_1, h_2 \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Außerdem ist $E_{g,g}$ immer ein nichtnegatives Maß.

Beweis. Seien Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E_{g,h}(\Delta_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (E(\Delta_n)g, h) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)g, h\Big) =$$

$$= \Big(E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)g, h\Big) = E_{g,h}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)\,,$$

also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} E_{g,h}(\Delta_n)$ und zwar gegen $E_{g,h}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)$. Wir sehen, dass $E_{g,h}$ ein komplexes Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist.
Offenbar gilt $E_{g,h}(\Delta) = (E(\Delta)g, h) = (g, E(\Delta)h) = \overline{(E(\Delta)h, g)} = \overline{E_{h,g}(\Delta)}$. Die Sesquilinearität der Abbildung $(g, h) \mapsto E_{g,h}$ überprüft man ähnlich elementar. Klarerweise ist $E_{g,g}(\Delta) = (E(\Delta)g, g) = \|E(\Delta)g\|^2$ nichtnegativ.
Um die Variation $|E_{g,h}|$ von $E_{g,h}$ abzuschätzen, seien $\Delta \in \mathcal{A}$ sowie paarweise disjunkte Mengen Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \Delta$ gegeben. Wähle $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$, sodass $|E_{g,h}(\Delta_n)| = \alpha_n E_{g,h}(\Delta_n)$. Da für $m \neq n$ der Bildraum von $E(\Delta_m)$ orthogonal auf den von $E(\Delta_n)$ steht, gilt ($N \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=1}^{N} |E_{g,h}(\Delta_n)| = \sum_{n=1}^{N} \Big(E(\Delta_n)(\alpha_n g), h\Big) = \sum_{n=1}^{N} \Big(E(\Delta_n)(\alpha_n g), E(\Delta_n)h\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(\alpha_n g), \sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)h\Big) \leq \Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(\alpha_n g)\Big\| \cdot \|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)h\|\,.$$

Da die Vektoren $E(\Delta_n)(\alpha_n g)$ paarweise orthogonal sind, gilt

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(\alpha_n g)\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|E(\Delta_n)(\alpha_n g)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|E(\Delta_n)g\|^2 =$$

$$= \Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)g\Big\|^2 = \Big\|E(\bigcup_{n=1}^{N} \Delta_n)g\Big\|^2 \leq \|E(\Delta)g\|^2\,.$$

Genauso zeigt man $\Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(h)\Big\|^2 \leq \|E(\Delta)h\|^2$. Wir erhalten insgesamt $\sum_{n=1}^{\infty} |E_{g,h}(\Delta_n)| \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$. Also ist für jede Menge $\Delta \in \mathcal{A}$

$$\Big|E_{g,h}\Big|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|\,.$$

Insbesondere gilt $\|E_{g,h}\| = \Big|E_{g,h}\Big|(\Omega) \leq \|g\| \cdot \|h\|$ ■

Bezeichne die Menge aller beschränkten $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $B(\Omega, \mathcal{A})$. Für $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ sei $\|\phi\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|$. Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich einem Spektralmaß integrieren kann.

Lemma 2.1.5. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ und sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $A \in L_b(H)$, sodass für alle $g, h \in H$*

$$(Ag, h) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,h} \,.$$

Dabei ist $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$.
Der Operator A heißt das Integral von ϕ bezüglich E, *und wird mit $\int \phi \, dE$ bezeichnet.*

Beweis. Für $g, h \in H$ bezeichne $B(g, h) := \int_\Omega \phi \, dE_{g,h}$. Mit $(g, h) \mapsto E_{g,h}(\Delta)$ ist auch $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear, vgl. Lemma 2.1.4. Wegen (2.6) und Lemma 2.1.4 gilt zudem

$$|B(g, h)| \leq \|\phi\|_\infty \|g\| \, \|h\| \,.$$

Also ist B sogar eine beschränkte Sesquilinearform. Nach Proposition 3.2.6 in [4] existiert ein eindeutiger Operator $A \in L_b(H)$, sodass $B(g, h) = (Ag, h)$, $g, h \in H$, und dieser erfüllt $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$. ■

$B(\Omega, \mathcal{A})$ ist, versehen mit der normalen Addition und skalaren Multiplikation, der Multiplikation von Funktionen, der Involution $f \mapsto \bar{f}$, sowie mit der Norm $\|.\|_\infty$ eine kommutative C^*-Algebra mit dem Einselement $\phi \equiv 1$.
Wir zeigen nun, dass man aus einem Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ einen *-Homomorphismus von $B(\Omega, \mathcal{A})$ in $L_b(H)$ erhält.

Satz 2.1.6. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi_E : \begin{cases} B(\Omega, \mathcal{A}) & \to & L_b(H) \\ \phi & \mapsto & \int \phi \, dE \end{cases}$$

ein *-Homomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$.

(ii) $\|\Phi_E\| = 1$.

(iii) *Jeder Operator im Bild von Φ_E ist normal.*

(iv) *Vertauscht ein Operator $B \in L_b(H)$ mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, so auch mit allen Operatoren der Form $\Phi_E(\phi)$, $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.*

(v) $\sigma(\Phi_E(\phi)) \subseteq \overline{\phi(\Omega)}$ *(topologischer Abschluss), wobei für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\phi(\Omega)}$ $(\subseteq \rho(\Phi_E(\phi)))$*

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E(\frac{1}{\phi - \lambda}).$$

(vi) *Für $g \in H$ und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $\|\Phi_E(\phi)g\|^2 = \int_\Omega |\phi|^2 \, dE_{g,g}$.*

(vii) *Ist $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und für alle $g \in H$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_E(\phi_n)g = \Phi_E(\phi)g.$$

Also konvergiert die Folge $\Phi_E(\phi_n), n \in \mathbb{N}$, bzgl. der starken Operatortopologie gegen $\Phi_E(\phi)$.

(*viii*) *Ist $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_E(\phi_n) = \Phi_E(\phi)$$

bezüglich der Operatornorm. Dasselbe gilt für gleichmäßig konvergente Netze.

Beweis.

⇝ Der Operator $\int \phi \, dE$ ist eindeutig durch die Beziehung

$$\Big([\int \phi \, dE]g, h\Big) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,h}$$

definiert. Damit folgt unmittelbar, dass Φ_E linear ist. Wegen Lemma 2.1.5 gilt $\| \int \phi \, dE\| \le \|\phi\|_\infty$ und daher $\|\Phi_E\| \le 1$.

Aus der Definition von $\int \phi \, dE$ in Lemma 2.1.5 folgt unmittelbar $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\Phi_E(\mathbb{1}_\Omega) = E(\Omega) = I$, und somit $\|\Phi_E\| = 1$.

⇝ Weiters ist

$$\Big([\int \phi \, dE]^* g, h\Big) = \Big(g, [\int \phi \, dE]h\Big) =$$

$$\overline{\int_\Omega \phi \, dE_{h,g}} = \int_\Omega \overline{\phi} \, dE_{g,h} = \Big([\int \overline{\phi} \, dE]g, h\Big),$$

und daher Φ_E mit * verträglich.

⇝ Angenommen, $B \in L_b(H)$ vertauscht mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Für $g, h \in H$ gilt $E_{g,B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, B^*h) = (BE(\Delta)g, h) = (E(\Delta)Bg, h) = E_{Bg,h}(\Delta)$ und daher

$$\Big(B[\int \phi \, dE]g, h\Big) = \Big([\int \phi \, dE]g, B^*h\Big) =$$

$$\int_\Omega \phi \, dE_{g,B^*h} = \int_\Omega \phi \, dE_{Bg,h} = \Big([\int \phi \, dE]Bg, h\Big).$$

Also gilt $B[\int \phi \, dE] = [\int \phi \, dE]B$.

⇝ Da für jedes feste $\Delta_0 \in \mathcal{A}$ die Projektion $E(\Delta_0)$ mit allen $E(\Delta)$ vertauscht, folgt insbesondere $E(\Delta_0)[\int \phi \, dE] = [\int \phi \, dE]E(\Delta_0)$.

Aus $E_{E(\Delta_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta_0)E(\Delta)g, h) = (E(\Delta_0 \cap \Delta)g, h) = E_{g,h}(\Delta_0 \cap \Delta)$ folgt damit

$$E_{[\int \phi \, dE]g,h}(\Delta_0) = (E(\Delta_0)[\int \phi \, dE]g, h) = ([\int \phi \, dE]E(\Delta_0)g, h) =$$

$$= \int_\Omega \phi \, dE_{E(\Delta_0)g,h} = \int_{\Delta_0} \phi \, dE_{g,h}.$$

Da Δ_0 beliebig war, ist $E_{[\int \phi \, dE]g,h}$ absolut stetig bezüglich $E_{g,h}$ mit ϕ als Dichte.

Halten wir nun ein $\phi_0 \in B(\Omega, \mathcal{A})$ fest, so folgt daraus mit (2.7)

$$([\int \phi_0 \, dE][\int \phi \, dE]g, h) = \int_\Omega \phi_0 \, dE_{[\int \phi \, dE]g,h} =$$

$$= \int_\Omega \phi_0 \cdot \phi \, dE_{g,h} = ([\int \phi_0 \cdot \phi \, dE]g, h).$$

Somit ist Φ_E multiplikativ.

- Das Bild von Φ_E ist, als *-homomorphes Bild einer kommutativen C^*-Algebra ebenfalls kommutativ und enthält mit einem Operator T auch dessen adjungierten T^*. Daher gilt $TT^* = T^*T$ für jeden Operator der Gestalt $T = \Phi_E(\phi)$.
- Für $\lambda \notin \overline{\phi(\Omega)}$ ist die Funktion $\frac{1}{\phi-\lambda}$ beschränkt und daher in $B(\Omega, \mathcal{A})$. Aus der Linearität und der Multiplikativität von Φ_E folgt
$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I)\, \Phi_E(\frac{1}{\phi - \lambda}) = \Phi_E(\frac{1}{\phi - \lambda})\, (\Phi_E(\phi) - \lambda I) = \Phi_E(\mathbb{1}_\Omega) = I,$$
und daher $\lambda \notin \sigma(\Phi_E(\phi))$, wobei $(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E(\frac{1}{\phi-\lambda})$.
- Wegen der Multiplikativität gilt
$$\|[\int \phi\, dE]g\|^2 = (\int \phi\, dEg, \int \phi\, dEg) = ([\int \phi\, dE]^*[\int \phi\, dE]g, g) =$$
$$([\int |\phi|^2\, dE]g, g) = \int_\Omega |\phi|^2\, dE_{g,g}.$$
- Konvergiert eine gleichmäßige beschränkte Funktionenfolge $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ punktweise gegen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, so ist aus der Maßtheorie bekannt, dass ϕ messbar ist und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit ist ϕ auch beschränkt, also $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Zudem gilt für $g \in H$
$$\|\Phi_E(\phi_n)g - \Phi_E(\phi)g\|^2 = \|\int (\phi_n - \phi)\, dEg\|^2 = \int_\Omega |\phi_n - \phi|^2\, dE_{g,g} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz, da $|\phi_n - \phi|^2$ sicherlich gleichmäßig beschränkt ist und punktweise gegen Null konvergiert.
- Konvergiert schließlich $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, so folgt wegen $\|\Phi_E\| = 1$
$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \le \|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0,\ n \to \infty.$$

■

Folgendes Lemma zeigt auf, wie man $\int \phi\, dE$ nicht nur schwach wie in Lemma 2.1.5 definieren kann, sondern auch als Grenzwert bzgl. der Operatornorm einer Folge von Operatoren der Bauart $\sum_{k=1}^m \alpha_k E(\Delta_k)$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und einer $\mathcal{A}$-*Partition* $\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ von Ω erhält. Dabei bedeutet $\mathcal{A}$-*Partition*, dass $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = \Omega$ sind.

Korollar 2.1.7. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ und sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Ist ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Treppenfunktionen von Ω nach $\mathbb{C}$ der Form*
$$\phi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n \mathbb{1}_{\Delta_k^n},$$
mit $\mathcal{A}$-Partitionen $\{\Delta_1^n, \dots, \Delta_{m(n)}^n\}$ von Ω und $\alpha_k^n \in \mathbb{C}$, sodass ϕ_n gleichmäßig gegen ϕ konvergiert, d.h. $\|\phi - \phi_n\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, dann konvergiert
$$\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$$
bzgl. der Operatornorm gegen $\int \phi\, dE$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Phi_E(\phi_n) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n \, \Phi_E(\mathbb{1}_{\Delta_k^n}) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$. Wegen $\|\Phi_E\| = 1$ gilt

$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0, \; n \to \infty.$$

■

Bemerkung 2.1.8. Man beachte, dass jede Funktion aus $B(\Omega, \mathcal{A})$ beliebig gut gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar ist, da man zu jeder Funktion $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und beliebigem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung der abgeschlossenen Kreisscheibe $K_{\|\phi\|_\infty}^{\mathbb{C}}(0)$ durch offene Kugeln U_j, $j = 1, \dots, n$, mit Durchmesser ϵ wählen kann.
Setzt man $V_j := \phi^{-1}(U_j)$, definiert Δ_j induktiv durch $\Delta_1 := V_1$, $\Delta_{j+1} := V_{j+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{j} \Delta_j$, und wählt $x_k \in \Delta_k$ beliebig, so ist $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ eine $\mathcal{A}$-Partition von Ω und

$$\begin{aligned}\|\phi - \phi_\epsilon\|_\infty &= \sup\{|\phi(x_k) - \phi(y)| : \; y \in \Delta_k\} \\ &\leq \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : \; x, y \in \Delta_j\} < \epsilon, \;\; j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Dabei ist $\phi_\epsilon := \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) \mathbb{1}_{\Delta_k}$.

Ist Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, dann ist $C(\Omega)$ mit der Supremumsnorm und den natürlichen algebraischen Operationen eine kommutative C^*-Algebra mit Eins.
Es ist eine tiefliegende Tatsache, dass alle *-Homomorphismen von $C(\Omega)$ in eine C^*-Algebra $L_b(H)$ in der in Satz 2.1.6 dargestellten Weise erhalten werden können. Zum Beweis verwenden wir den Darstellungssatz von Riesz.

Satz 2.1.9. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, sei H ein Hilbertraum, und sei $\Phi : C(\Omega) \to L_b(H)$ ein beschränkter *-Homomorphismus. Bezeichne mit $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Borelmengen in Ω. Dann existiert ein Spektralmaß E für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, sodass*

$$\Phi(\phi) = \int \phi \, dE, \quad \phi \in C(\Omega). \tag{2.8}$$

Unter allen Spektralmaßen mit dieser Eigenschaft gibt es genau eines, sodass für alle $g, h \in H$ das komplexe Borelmaß $E_{g,h}$ regulär ist.
Dieses eindeutige Spektralmaß hat zusätzlich die Eigenschaft, dass für einen Operator $B \in L_b(H)$ genau dann $B\,\Phi(\phi) = \Phi(\phi)\,B$ für alle $\phi \in C(\Omega)$ gilt, wenn $B\,E(\Delta) = E(\Delta)\,B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

Beweis.

Schritt 1: Wir konstruieren einen Kandidaten E für ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{g,h} : \phi \mapsto (\Phi(\phi)g, h)$$

ein lineares Funktional auf $C(\Omega)$, für das ($\phi \in C(\Omega)$)

$$|(\Phi(\phi)g, h)| \leq \|\Phi(\phi)\| \, \|g\| \, \|h\| \leq \|\Phi\| \, \|\phi\|_\infty \, \|g\| \, \|h\|,$$

und damit $\|\Phi_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \, \|g\| \, \|h\|$ gilt. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß $\mu_{g,h}$ auf Ω mit $\|\mu_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \, \|g\| \, \|h\|$, sodass

$$(\Phi(\phi)g, h) = \Phi_{g,h}(\phi) = \int_\Omega \phi \, d\mu_{g,h}, \;\; \phi \in C(\Omega). \tag{2.9}$$

Sind $g_1, g_2, h \in H$, so gilt

$$(\Phi(\phi)(g_1 + g_2), h) = (\Phi(\phi)g_1, h) + (\Phi(\phi)g_1, h),\ \phi \in C(\Omega)\,,$$

woraus wegen der Eindeutigkeit im Rieszschen Darstellungssatz $\mu_{g_1+g_2,h} = \mu_{g_1,h} + \mu_{g_2,h}$ folgt. Genauso sieht man, dass $\mu_{\lambda g,h} = \lambda\mu_{g,h}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, und dass $\mu_{h,g} = \overline{\mu_{g,h}}$.
Sei nun $\Delta \in \mathcal{A}$ gegeben. Definiere $[g, h]_\Delta := \mu_{g,h}(\Delta)$. Dann ist $[g, h]_\Delta$ eine Sesquilinearform und es gilt $|[g, h]_\Delta| \leq \|\mu_{g,h}\| = \|\Phi\|\,\|g\|\,\|h\|$. Nach dem weiter oben schon zitierten Ergebnis Proposition 3.2.6 in [4] aus der Funktionalanalysis 1 existiert ein eindeutiger Operator $E(\Delta) \in L_b(H)$, sodass

$$[g, h]_\Delta = (E(\Delta)g, h),\ g, h \in H\,.$$

Wegen

$$(E(\Delta)g, h) = \mu_{g,h}(\Delta) = \overline{\mu_{h,g}(\Delta)} = \overline{(E(\Delta)h, g)} = (g, E(\Delta)h)$$

sind die Operatoren $E(\Delta)$ selbstadjungiert.

Schritt 2: Angenommen $B \in L_b(H)$ vertauscht mit allen $\Phi(\phi),\ \phi \in C(\Omega)$. Dann gilt für $g, h \in H$ und beliebige $\phi \in C(\Omega)$

$$\int_\Omega \phi\, d\mu_{Bg,h} = (\Phi(\phi)Bg, h) = (B\Phi(\phi)g, h) = (\Phi(\phi)g, B^*h) = \int_\Omega \phi\, d\mu_{g,B^*h}.$$

Da die Maße $\mu_{g,h}$ eindeutig durch (2.9) bestimmt sind, stimmen die komplexen Maße $\mu_{Bg,h}$ und μ_{g,B^*h} überein. Für $\Delta \in \mathcal{A}$ folgt somit

$$(E(\Delta)Bg, h) = \mu_{Bg,h}(\Delta) = \mu_{g,B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, B^*h) = (BE(\Delta)g, h),$$

also $E(\Delta)B = BE(\Delta)$.
Da jeder Operator $\Phi(\phi_0)$ mit allen $\Phi(\phi)$, $\phi \in C(\Omega)$, vertauscht, gilt insbesondere

$$\Phi(\phi_0)E(\Delta) = E(\Delta)\Phi(\phi_0), \quad \phi_0 \in C(\Omega), \Delta \in \mathcal{A}\,.$$

Schritt 3: Aus der Multiplikativität von Φ werden wir nun insbesondere die Tatsache herleiten, dass die $E(\Delta)$ Projektionen sind. Dazu seien $\phi, \phi_0 \in C(\Omega)$. Es folgt

$$\int_\Omega \phi \cdot \phi_0\, d\mu_{g,h} = (\Phi(\phi \cdot \phi_0)g, h) = (\Phi(\phi)\Phi(\phi_0)g, h) = \int_\Omega \phi\, d\mu_{\Phi(\phi_0)g,h}.$$

Da mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta \mapsto \int_\Delta \phi_0\, d\mu_{g,h}$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Eindeutigkeit in (2.9)

$$\int_\Omega \phi_0 \cdot \mathbb{1}_\Delta\, d\mu_{g,h} = \mu_{\Phi(\phi_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta)\Phi(\phi_0)g, h) =$$

$$= (\Phi(\phi_0)E(\Delta)g, h) = \int_\Omega \phi_0\, d\mu_{E(\Delta)g,h}\,.$$

Da für jedes feste $\Delta \in \mathcal{A}$ mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta_1 \mapsto \int_{\Delta_1} \mathbb{1}_\Delta\, d\mu_{g,h} = \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta)$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Tatsache, dass obige Gleichung für alle $\phi_0 \in C(\Omega)$ gilt, wegen der Eindeutigkeit in (2.9)

$$(E(\Delta_1 \cap \Delta)g, h) = \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta) = \int_{\Delta_1} \mathbb{1}_\Delta\, d\mu_{g,h} =$$

$$= \mu_{E(\Delta)g,h}(\Delta_1) = (E(\Delta_1)E(\Delta)g, h).$$

Also gilt $E(\Delta_1 \cap \Delta) = E(\Delta_1)E(\Delta)$. Insbesondere ist wegen $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$ der Operator $E(\Delta)$ eine selbstadjungierte und somit orthogonale Projektion.

Schritt 4: Wir zeigen, dass E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ ist. Es ist schon bekannt, dass $E(\Delta)$ immer eine orthogonale Projektion ist, und dass $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$. Aus

$$(E(\Omega)g, h) = \mu_{g,h}(\Omega) = \int_\Omega 1\, d\mu_{g,h} = (\Phi(1)g, h) = (g, h)$$

und $(E(\emptyset)g, h) = \mu_{g,h}(\emptyset) = 0$ für alle $g, h \in H$ folgt $E(\Omega) = I$ und $E(\emptyset) = 0$.
Gemäß Lemma 2.1.2 gilt für paarweise disjunkte Borelmengen Δ_k, $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k)g = Pg, \quad \text{für alle} \quad g \in H,$$

wobei $P : H \to H$ eine orthogonale Projektion ist. Da $\mu_{g,h} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß ist, gilt aber für alle $g, h \in H$

$$(Pg, h) = \sum_{k=1}^{\infty}(E(\Delta_k)g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{g,h}(\Delta_k) = \mu_{g,h}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k\Big) = (E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k\Big)g, h),$$

und daher $P = E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k\Big)$. Also ist E bzgl. der starken Operatortopologie σ-additiv.

Schritt 5: Wegen Lemma 2.1.5 ist für $\phi \in C(\Omega)$ der Operator $A := \int \phi\, dE$ eindeutig durch $(Ag, h) = \int_\Omega \phi\, dE_{g,h}$ definiert. Nun gilt aber $E_{g,h} = \mu_{g,h}$ und aus (2.9) folgt somit (2.8).
Gilt schließlich $B\, E(\Delta) = E(\Delta)\, B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$, so folgt $B\, \Phi(\phi) = \Phi(\phi)\, B$ für alle $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A}) \supseteq C(\Omega)$ wegen Satz 2.1.6. ■

Wegen Satz 1.5.4 ist die Voraussetzung in Satz 2.1.9, dass Φ beschränkt ist, nicht vonnöten.

Korollar 2.1.10. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, bezeichne mit $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Borelmengen in Ω, und sei H ein Hilbertraum. Weiters sei $\Phi : C(\Omega) \to L_b(H)$ ein beschränkter *-Homomorphismus.*
Dann besitzt Φ eine Fortsetzung zu einem *-Homomorphismus $\Phi_E : B(\Omega, \mathcal{A}) \to L_b(H)$ mit den Eigenschaften wie in Satz 2.1.6, wobei E das Spektralmaß zu Φ wie in Satz 2.1.9 ist. Insbesondere gilt $\|\Phi\| = \|\Phi_E\| = 1$.
Dabei sind für ein $B \in L_b(H)$ folgende Aussagen äquivalent

- ⇝ $E(\Delta)\, B = B\, E(\Delta)$ *für alle* $\Delta \in \mathcal{A}$.
- ⇝ $\Phi(\phi)\, B = B\, \Phi(\phi)$ *für alle* $\phi \in C(\Omega)$.
- ⇝ $\Phi_E(\phi)\, B = B\, \Phi_E(\phi)$ *für alle* $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.1.9 und Satz 2.1.6. ■

Bemerkung 2.1.11. Ein Spektralmaß E, das mit Satz 2.1.9 konstruiert wurde, ist definiert auf $\mathcal{A}$. Im Szenario der Spektralsätze ist $\mathcal{A}$ gleich den Borelmengen $\mathfrak{B}(K)$ auf einer Borelteilmenge K von $\mathbb{C}$. Da die Euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$ und damit auch auf $K \subseteq \mathbb{C}$ eine abzählbare Basis hat, sind alle Borelmaße auf K regulär. Also fällt die Regularitätsbedingung in Satz 2.1.9 weg.

Fakta 2.1.12.

1. Sei E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ und $\Delta \in \mathcal{A}$. Ist $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und auf Δ beschränkt, so ist offenbar $\mathbb{1}_\Delta \cdot \phi$ auf ganz Ω beschränkt. Also ist $\int \mathbb{1}_\Delta \cdot \phi \, dE$ wohldefiniert und wir setzen
$$\int_\Delta \phi \, dE := \int \mathbb{1}_\Delta \cdot \phi \, dE \,. \tag{2.10}$$
Ist die Abbildung ϕ nur auf Δ definiert, darauf messbar und beschränkt, und setzen wir ϕ irgendwie auf ganz Ω messbar fort zu einer Funktion $\hat{\phi} : \Omega \to \mathbb{C}$– z.B. mit $\hat{\phi}(t) = 0, \; t \in \Omega \setminus \Delta$– , so hängt $\mathbb{1}_\Delta \cdot \hat{\phi}$ klarerweise nur von ϕ ab. Wir schreiben für $\mathbb{1}_\Delta \cdot \hat{\phi}$ daher auch $\mathbb{1}_\Delta \cdot \phi$ und definieren $\int_\Delta \phi \, dE$ gemäß (2.10).

2. Sei E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$, Υ eine weitere Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Υ und $T : \Omega \to \Upsilon$ sei $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ messbar.

   Man überzeugt sich leicht, dass durch $E^T(\Delta) := E(T^{-1}(\Delta)), \; \Delta \in \mathcal{B}$, ein Spektralmaß für $\langle\Upsilon, \mathcal{B}, H\rangle$ definiert wird. Für $f \in H$ gilt dabei offensichtlich $(E^T_{f,f}) = (E_{f,f})^T$, wobei $(E_{f,f})^T$ das aus der Maßtheorie bekannte Transformierte Maß auf Υ zu dem nichtnegativen Maß $E_{f,f}$ auf Ω ist. Somit gilt für $\phi \in B(\Upsilon, \mathcal{B})$
$$\int \phi \, dE^T_{f,f} = \int \phi \circ T \, dE_{f,f}.$$
Aus der Polarformel $4(f, g) = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2$ folgt dann
$$\int \phi \, dE^T_{f,g} = \int \phi \circ T \, dE_{f,g}$$
für alle $f, g \in H$ und damit
$$\int \phi \, dE^T = \int \phi \circ T \, dE \tag{2.11}$$

3. Sei Υ eine Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Υ. Weiters sei $\Omega \subseteq \Upsilon$ versehen mit der Spur-σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\Omega = \{\Delta \cap \Omega : \Delta \in \mathcal{B}\}$.

   Ist dann E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ und $\iota_\Omega : \Omega \to \Upsilon, \; x \mapsto x$ die Einbettungsabbildung, so gilt für das Spektralmaß E^{ι_Ω} für $\langle\Upsilon, \mathcal{B}, H\rangle$
$$E^{\iota_\Omega}(\Delta) = E(\iota_\Omega^{-1}(\Delta)) = E(\Delta \cap \Omega), \;\; \Delta \in \mathcal{B}.$$
Das Spektralmaß E^{ι_Ω} lebt dabei nur auf Ω in dem Sinn, dass $E^{\iota_\Omega}(\Upsilon \setminus \Omega) = 0$. Wegen (2.11) gilt dabei für $\phi \in B(\Upsilon, \mathcal{B})$
$$\int \phi \, dE^{\iota_\Omega} = \int \phi \circ \iota_\Omega \, dE = \int \phi|_\Omega \, dE \,. \tag{2.12}$$

4. Sei nun wieder $\Upsilon \supseteq \Omega$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\Omega$ wie zuvor, wobei wir zusätzlich $\Omega \in \mathcal{B}$ verlangen.

   Ist nun F ein Spektralmaß für $\langle\Upsilon, \mathcal{B}, H\rangle$, das nur auf Ω lebt, dh. $F(\Upsilon \setminus \Omega) = 0$, und setzen wir $(\Delta \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$
$$E(\Delta) := F(\Delta)$$
so sieht man unmittelbar, dass E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ ist, sodass $F = E^{\iota_\Omega}$. Wegen (2.12) gilt dabei für jedes $\phi \in B(\Upsilon, \mathcal{B})$
$$\int \phi \cdot \mathbb{1}_\Omega \, dF = \int \phi|_\Omega \, dE = \int \phi \, dF \,. \tag{2.13}$$

2.2 Der Spektralsatz für normale beschränkte Operatoren

Im Folgenden wollen wir den Spektralsatz für normale Operatoren beweisen. H bezeichnet dabei immer einen Hilbertraum. Wie schon im aus der Funktionalanalysis 1 bekannten Spezialfall der selbstadjungierte Operatoren konstruieren wir dafür zunächst einen *-Homomorphismus – konkret die Gelfandtransformation – und stellen dann durch Satz 2.1.9 die Verbindung zu den Spektralmaßen her.

Satz 2.2.1 (*Spektralsatz für normale Operatoren*)**.** *Sei $T \in L_b(H)$ normal. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H\rangle$, sodass für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ gilt, dass $E(\mathbb{C} \setminus K) = 0$ und*[1]

$$T = \int_K z \, dE(z) \,.$$

Weiters gilt:

(i) *Man kann jedes kompakte $K \supseteq \sigma(T)$ wählen. Insbesondere lebt E nur auf $\sigma(T)$.*

(ii) *Ist $\mathfrak{C}(T)$ die von T in $L_b(H)$ erzeugte C^*-Algebra (siehe Definition 1.5.9), und ist $\Phi_T : C(\sigma(T)) \to \mathfrak{C}(T)$ der C^*-Algebrenisomorphismus aus Definition 1.5.13, $\Phi_T : \phi \mapsto \phi(T)$, so gilt im Sinne von Fakta 2.1.12, 1,*

$$\Phi_T(\phi) = \int_{\sigma(T)} \phi \, dE,$$

für alle $\phi \in C(\sigma(T))$.

(iii) *Liegt $B \in L_b(H)$, so gilt*

$$BT = TB \ \wedge \ BT^* = T^*B \quad \Leftrightarrow \quad BE(\Delta) = E(\Delta)B, \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

Beweis. Existenz und (ii)*:* Nach Satz 1.5.14 ist $\Phi_T : C(\sigma(T)) \to \mathfrak{C}(T)$ tatsächlich ein C^*-Algebrenisomorphismus, der wegen (1.11)

$$\Phi_T((\zeta \mapsto \sum_{j,k=0}^{N} \lambda_{j,k} \, \zeta^j \overline{\zeta}^k)) = \sum_{j,k=0}^{N} \lambda_{j,k} \, T^j (T^*)^k, \tag{2.14}$$

und somit insbesondere $\Phi_T(\mathbb{1}) = I$ sowie $\Phi_T((\xi \mapsto \xi)) = T$ erfüllt.
Da $\sigma(T)$ kompakt ist, lässt sich Satz 2.1.9 anwenden. Es existiert also genau ein Spektralmaß E_0 für $\langle \sigma(T), \mathfrak{B}(\sigma(T)), H\rangle$, sodass

$$\Phi_T(\phi) = \int \phi \, dE_0, \quad \phi \in C(\sigma(T)). \tag{2.15}$$

Bezeichnet $\iota_{\sigma(T)} : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ die Einbettungsabbildung, so ist $E := (E_0)^{\iota_{\sigma(T)}}$ ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H\rangle$ mit $E(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$, vgl. Fakta 2.1.12, 3. Dabei gilt für $\phi \in C(\sigma(T))$ wegen (2.12) und Fakta 2.1.12, 1

$$\int_{\sigma(T)} \phi \, dE = \int \phi \cdot \mathbb{1}_{\sigma(T)} \, d(E_0)^{\iota_{\sigma(T)}} = \int \phi \, dE_0 = \Phi_T(\phi) \,, \tag{2.16}$$

[1] Vergleiche Fakta 2.1.12, 1

und damit $T = \int_{\sigma(T)} z\,dE(z)$.
Eindeutigkeit und (i)*:* Wir nehmen an, es gäbe ein weiteres Spektralmaß $\tilde{E}$ für $\langle\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H\rangle$, sodass für ein gewisses kompaktes $\tilde{K} \subseteq \mathbb{C}$

$$\tilde{E}(\mathbb{C} \setminus \tilde{K}) = 0 \ \text{ und } \ T = \int_{\tilde{K}} z\,d\tilde{E}(z).$$

Ist $K \supseteq \tilde{K} \cup \sigma(T)$ ein beliebiges Kompaktum, so leben E und $\tilde{E}$ jeweils nur auf K. Für ein messbares und beschränktes $\phi : K \to \mathbb{C}$ gilt gemäß (2.13) und Fakta 2.1.12, 1 wegen $\mathbb{1}_{\sigma(T)} \cdot \mathbb{1}_K = \mathbb{1}_{\sigma(T)}$ (diese Gleichheit verifiziert auch (i))

$$\int_K \phi\,dE = \int \mathbb{1}_K \phi\,dE = \int \mathbb{1}_{\sigma(T)}\phi\,dE = \int_{\sigma(T)} \phi\,dE\ .$$

genauso wie

$$\int_K \phi\,d\tilde{E} = \int_{\tilde{K}} \phi\,d\tilde{E}.$$

Insbesondere haben wir $\int_K z\,d\tilde{E} = T = \int_K z\,dE$, woraus mit Hilfe von Satz 2.1.6 die Beziehungen ($m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$T^n = \int_K z^n\,dE = \int_K z^n\,d\tilde{E}, \quad (T^*)^m = \int_K \bar{z}^m\,dE = \int_K \bar{z}^m\,d\tilde{E}$$

und damit

$$\int_K q\,dE = \int_K q\,d\tilde{E} \tag{2.17}$$

für $q \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ folgt. Dabei ist

$$\mathbb{C}[z, \bar{z}] := \left\{ \sum_{m,n=0}^{N} \lambda_{m,n} z^n \bar{z}^m : \lambda_{m,n} \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

der Raum aller komplexen Polynome in den Variablen z und $\bar{z}$. Betrachten wir $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ als Teilmenge von $C(K)$ – setzen also bei $q(z)$ mit $q \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ nur Zahlen z aus K ein –, so ist $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ eine nirgends verschwindende, Punkte trennende und unter Konjugation abgeschlossene Unteralgebra. Nach dem Satz von Weierstraß ist somit $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ dicht in $C(K)$.
Gemäß (2.17) stimmen die beiden gemäß Satz 2.1.6 beschränkten und damit stetigen *-Homomorphismen[2]

$$\phi \mapsto \int_K \phi\,dE, \quad \phi \mapsto \int_K \phi\,d\tilde{E}$$

von $C(K)$ nach $L_b(H)$ auf der dichten Teilmenge $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ und damit auf ganz $C(K)$ überein. Setzen wir $F(\Delta) = E(\Delta)$ und $\tilde{F}(\Delta) = \tilde{E}(\Delta)$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(K)$, so folgt aus (2.13) für jedes $\phi \in C(K)$

$$\int \phi\,dF = \int_K \phi\,dE = \int_K \phi\,d\tilde{E} = \int \phi\,d\tilde{F}\ .$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.1.9 ergibt $F = \tilde{F}$ und damit

$$E(\Delta) = E(\Delta \cap K) = F(\Delta \cap K) = \tilde{F}(\Delta \cap K) = \tilde{E}(\Delta \cap K) = \tilde{E}(\Delta), \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})\ .$$

[2] Vergleiche auch Fakta 2.1.12, 1

Eigenschaft (iii): Gemäß Korollar 2.1.10, (2.15) und wegen $E(\Delta) = E_0(\Delta \cap \sigma(T))$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, gilt für ein $B \in L_b(H)$

$$\begin{aligned} & B\Phi_T(\phi) = \Phi_T(\phi)B, \quad \phi \in C(\sigma(T)) \\ \Leftrightarrow \quad & BE(\Delta) = E(\Delta)B, \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

In Fakta 1.5.10, 3, haben wir andererseits gesehen, dass

$$B\,\Phi_T(\phi) = \Phi_T(\phi)\,B, \quad \phi \in C(\sigma(T)) \quad \Leftrightarrow \quad BT = TB \ \wedge\ T^*B = BT^*$$

■

Die Bedingung $BT = TB, BT^* = T^*B$ aus Satz 2.2.1 ist in der Tat äquivalent zu $BT = TB$, wie aus dem folgenden Satz hervorgeht.

Satz 2.2.2 (*Satz von Fuglede**)**.** *Ist $T \in L_b(H)$ normal und $B \in L_b(H)$, so folgt aus $BT = TB$ automatisch $BT^* = T^*B$.*

Beweis. Zunächst seien K_1, K_2 kompakte und disjunkte Teilmengen von $\mathbb{C}$. Der Operator $E(K_1)TE(K_1)$ eingeschränkt auf den abgeschlossenen Unterraum $Y := E(K_1)H$ hat ein Spektrum, welches in K_1 enthalten ist, da für $\lambda \notin K_1$ der beschränkte Operator $\int_{K_1} \frac{1}{\lambda - z}\, dE(z)$ eingeschränkt auf Y die Inverse von $(\lambda I - E(K_1)TE(K_1))|_Y$ ist. Entsprechend gilt $\sigma(E(K_2)TE(K_2)|_X) \subseteq K_2$, wobei $X := E(K_2)H$. Also gilt

$$\sigma(E(K_1)TE(K_1)|_Y) \cap \sigma(E(K_2)TE(K_2)|_X) \subseteq K_1 \cap K_2 = \emptyset\,.$$

Aus $BT = TB$ zusammen mit der Tatsache, dass die $E(\Delta)$ mit T vertauschen, folgt

$$\big(E(K_2)TE(K_2)\big)\big(E(K_2)BE(K_1)\big) = \big(E(K_2)BE(K_1)\big)\big(E(K_1)TE(K_1)\big),$$

und daher auch

$$\big(E(K_2)TE(K_2)\big)|_X\,\big(E(K_2)BE(K_1)\big)|_Y = \big(E(K_2)BE(K_1)\big)|_Y\,\big(E(K_1)TE(K_1)\big)|_Y\,.$$

Gemäß Korollar 1.4.5 muss dann $\big(E(K_2)BE(K_1)\big)|_Y \in L_b(Y, X)$ mit dem Nulloperator übereinstimmen, womit $E(K_2)BE(K_1) = 0$.
Seien nun $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ disjunkt und $K_j \subseteq \Delta_j$ kompakt für $j = 1, 2$. Für $x \in H$ erhält man

$$\begin{gathered} \|E(\Delta_2)BE(\Delta_1)x\| = \|E(\Delta_2)BE(\Delta_1)x - E(K_2)BE(K_1)x\| \le \\ \|E(\Delta_2)BE(\Delta_1)x - E(K_2)BE(\Delta_1)x\| + \|E(K_2)BE(\Delta_1)x - E(K_2)BE(K_1)x\| \le \\ \Big(E_{BE(\Delta_1)x, BE(\Delta_1)x}(\Delta_2 \setminus K_2)\Big)^{\frac{1}{2}} + \|B\| \cdot \Big(E_{x,x}(\Delta_1 \setminus K_1)\Big)^{\frac{1}{2}}\,. \end{gathered}$$

Da die Maße $E_{z,z}$ für alle $z \in H$ von innen regulär sind und somit die rechte Seite beliebig klein wird für geeignete Kompakta $K_j \subseteq \Delta_j$, erhalten wir $E(\Delta_2)BE(\Delta_1) = 0$ für beliebige disjunkte $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.
Wenden wir das auf $\Delta_1 = \mathbb{C} \setminus \Delta, \Delta_2 = \Delta$ und dann auf $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2 = \mathbb{C} \setminus \Delta$ an, so folgt $E(\Delta)B(I - E(\Delta)) = 0 = (I - E(\Delta))BE(\Delta)$ und daher auch $BE(\Delta) = E(\Delta)B$ für alle $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Gemäß Satz 2.2.1 ist das aber zu $BT^* = T^*B, BT = TB$ äquivalent. ■

Die Aussage des Spektralsatzes für normale beschränkte Operatoren lässt sich auf die Spezialfälle selbstadjungierter oder unitärer Operatoren anwenden. Dabei ist zu beachten, dass gemäß Korollar 6.5.9 und Proposition 6.5.12 in [4] für selbstadjungierte A und unitäre Operatoren U

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R} \ \text{ und } \ \sigma(U) \subseteq \mathbb{T}\,.$$

Korollar 2.2.3. *[*Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren*] Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H\rangle$, sodass für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}$ die Beziehungen $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ und*

$$A = \int_K t\, dE(t)$$

gelten. Weiters gilt:

(i) *Man kann jedes kompakte $K \supseteq \sigma(A)$ wählen. Insbesondere lebt E nur auf $\sigma(A)$.*

(ii) *Für $B \in L_b(H)$ gilt*

$$BA = AB \quad \Leftrightarrow \quad BE(\Delta) = E(\Delta)B,\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,.$$

Beweis. Selbstadjungierte Operatoren sind insbesondere normal. Da selbstadjungierte beschränkte Operatoren nur reelles Spektrum haben, folgt der Rest aus Satz 2.2.1, wenn wir das Spektralmaß von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}$ einschränken. ■

Korollar 2.2.4. *[*Spektralsatz für unitäre Operatoren*] Sei $U \in L_b(H)$ unitär. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), H\rangle$, sodass*

$$U = \int z\, dE(z).$$

Weiters gilt:

(i) *E lebt nur auf $\sigma(U)$.*

(ii) *Liegt $B \in L_b(H)$, so gilt*

$$BU = UB \quad \Leftrightarrow \quad BE(\Delta) = E(\Delta)B,\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{T})\,.$$

Beweis. Unitäre Operatoren sind insbesondere normal. Es gilt $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$ und außerdem folgt aus $BU = UB$, dass

$$U^*B = U^{-1}B = U^{-1}BUU^{-1} = U^{-1}UBU^{-1} = BU^{-1} = BU^*\,.$$

Der Rest folgt wie in Korollar 2.2.3 aus Satz 2.2.1. ■

Aus Satz 2.2.1 zusammen mit Korollar 2.1.10 folgt

Korollar 2.2.5. *Sei $T \in L_b(H)$ normal, $\mathfrak{C}(T)$ die von T in $L_b(H)$ erzeugte C^*-Algebra (siehe Definition 1.5.9), $\Phi_T : C(\sigma(T)) \to \mathfrak{C}(T)$ der C^*-Algebrenisomorphismus aus Definition 1.5.13, $\Phi_T : \phi \mapsto \phi(T)$.*
Ist E das Spektralmaß zu T aus Satz 2.2.1, so ist $\Phi_E : B(\sigma(T), \mathfrak{B}(\sigma(T))) \to L_b(H)$ definiert durch

$$\Phi_E(\phi) = \int_{\sigma(T)} \phi\, dE\,,$$

wobei $\phi : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ Borel-messbar und beschränkt ist, dh. $\phi \in B(\sigma(T), \mathfrak{B}(\sigma(T)))$, ein C^*-Algebrenhomomorphismus und eine Fortsetzung von Φ_T. Für $\Phi_E(\phi)$ schreiben wir auch $\phi(T)$.

Als Anwendung des Spektralsatzes kann man den Satz von Bochner beweisen, welcher das Bild der Fourier-Stieltjes-Transformation von positiven Maßen im Raum der komplexen Folgen charakterisiert.

Definition 2.2.6. Für ein positives endliches Maß $\mu \in M(\mathbb{T})$ heißen

$$\hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta^n}\, d\mu(\zeta) \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

die *Fourier-Stieltjes Koeffizienten* bzw. die *Momente* von μ.

Satz 2.2.7. *Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ist genau dann die Koeffizientenfolge der Fourier-Stieltjes Transformierten eines positiven endlichen Maßes auf $\mathbb{T}$, wenn für jede endliche Folge $(a_n)_{|n|\le N}$ gilt:*

$$0 \le \sum_{|n|,|m|\le N} a_n \overline{a_m} c_{n-m}\,.$$

Beweis. ($\Rightarrow$): Für ein positives Maß μ und ein trigonometrisches Polynom $p(\zeta) = \sum_{|n|\le N} a_n \zeta^{-n}$ gilt:

$$0 \le \int_{\mathbb{T}} |p|^2\, d\mu = \sum_{|n|,|m|\le N} a_n \overline{a_m} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-(n-m)}\, d\mu(\zeta) = \sum_{|n|,|m|\le N} a_n \overline{a_m}\, \hat{\mu}(n-m),$$

also erfüllen die Fourier-Stieltjes Koeffizienten eines positiven Maßes die gewünschte Bedingung.

($\Leftarrow$): Wir betrachten den Raum $\mathcal{P}$ aller trigonometrischen Polynome. Für $p(\zeta) = \sum a_n \zeta^n$, $q(\zeta) = \sum b_m \zeta^m$ wird durch

$$\langle p, q\rangle := \sum_{n,m} a_n \overline{b_m} c_{n-m}$$

eine Sesquilinearform definiert, für die nach Voraussetzung $\langle p, p\rangle$ insbesondere reell ist. Wendet man diese Tatsache auf $\langle p+q, p+q\rangle$ und $\langle p+iq, p+iq\rangle$ an, so schließt man auf $\langle q, p\rangle = \overline{\langle p, q\rangle}$. Also ist $\langle .,. \rangle$ hermitesch und nach Voraussetzung sogar positiv semidefinit. Aus der der Cauchy-Schwarzen Ungleichung folgt, dass die Menge

$$\mathcal{N} := \{p \in \mathcal{P} : \langle p, p\rangle = 0\}$$

mit $\mathcal{P}^\perp = \{p \in \mathcal{P} : \langle p, q\rangle = 0 \text{ für alle } q \in \mathcal{P}\}$ übereinstimmt und daher ein linearer Unterraum ist. Weiters ist durch

$$\langle p + \mathcal{N}, q + \mathcal{N}\rangle := \langle p, q\rangle$$

eine hermitesche Sesquilinearform auf dem Faktorraum $Q := \mathcal{P}/\mathcal{N}$ wohldefiniert und offensichtlich positiv definit.
Sei der Hilbertraum H die Vervollständigung von Q bezüglich dieses Skalarproduktes. Für $n \in \mathbb{Z}$ bezeichne e_n das trigonometrische Polynom ζ^n und $[e_n]$ die Restklasse $e_n + \mathcal{N} \in Q$. Die Abbildung $p \mapsto e_1 \cdot p$ bildet $\mathcal{P}$ linear und bijektiv auf sich ab. Ihre Inverse ist klarerweise $p \mapsto e_{-1} \cdot p$. Wegen

$$\langle p, q\rangle = \langle e_1 p, e_1 q\rangle = \langle e_{-1} p, e_{-1} q\rangle \tag{2.19}$$

lassen beide Abbildungen den Unterraum $\mathcal{N}$ invariant. Somit sind durch $U(p + \mathcal{N}) := e_1 p + \mathcal{N}$ und $U_-(p + \mathcal{N}) := e_{-1} p + \mathcal{N}$ zwei lineare Abbildungen auf Q wohldefiniert. Dabei ist U_- die Inverse von U auf Q. Wegen (2.19) sind U und U_- isometrisch. Also können beide eindeutig zu linearen Isometrien auf H fortgesetzt werden. Wir bezeichnen diese Fortsetzungen ebenfalls mit U und U_-.
Aus $UU_-|_Q = I|_Q = U_-U|_Q$, der Stetigkeit aller hier beteiligten Abbildungen und der Dichtheit von Q in H folgt $UU_- = I = U_-U$ auf H. Insbesondere ist U isometrisch und bijektiv, also unitär, wobei $U^* = U^{-1} = U_-$.
Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle [e_0], U^{-n}[e_0]\rangle = \langle U^n[e_0], [e_0]\rangle = \langle [e_n], [e_0]\rangle = \langle e_n, e_0\rangle = c_n.$$

Andererseits gilt nach dem Spektralsatz für unitäre Operatoren angewandt auf U^{-1}, d.h. $U^* = U^{-1} = U_- = \int \zeta \, dE$,

$$\bar{c}_n = \langle U^{-n}[e_0], [e_0]\rangle = \langle \Big[\int \zeta^n \, dE \Big][e_0], [e_0]\rangle = \int_{\mathbb{T}} \zeta^n \, dE_{[e_0],[e_0]}.$$

Durch konjugieren sieht man, dass die c_n die Fourier-Stieltjes Koeffizienten des endlichen positiven Maßes $E_{[e_0],[e_0]}$ sind. ■

2.3 Multiplikationsoperatoren

Im Folgenden wird die schwache Topologie (w-Topologie) und die schwach-* Topologie (w^*-Topologie) verwendet. Wir möchten hier einen kurzen Überblick über diese Topologien geben. Sei X dazu ein Banachraum und $L(X)$ der Raum der linearen Abbildungen auf X.

- Die schwache Topologie auf X ist die gröbste Topologie, für die alle normstetigen linearen Funktionale, dh. alle $f \in X'$, stetig sind. Sie ist daher gröber als die von der Norm induzierte Topologie. Da die schwache Topologie eine initiale Topologie bzgl. der Abbildungen f ist, gilt

$$x_i \xrightarrow{w} x \;\Leftrightarrow\; f(x_i) \to f(x), \;\; f \in X'.$$

- Die punktetrennende Familie von Funktionalen

$$L_{x,l} : \begin{cases} L(X) & \to & \mathbb{C} \\ A & \mapsto & l(Ax) \end{cases}, \qquad l \in X', x \in X$$

induziert eine lokalkonvexe Topologie auf $L(X)$. Ihre Spurtopologie auf $L_b(X)$ wird als schwache Operatortopologie bezeichnet. *Für Operatoren soll '$\xrightarrow{w}$' im Folgenden die Konvergenz bezüglich dieser Topologie kennzeichnen.* Da die schwache Topologie eine initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $L_{x,l}$ ist, gilt

$$A_i \xrightarrow{w} A \;\Leftrightarrow\; (A_i x, y) \to (Ax, y), \;\; x, y \in X.$$

- Die schwach-* Topologie auf X' ist die gröbste Topologie, für welche die Abbildungen $\iota_x : \begin{cases} X' & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{cases}$, $x \in X$ stetig sind. Hier gilt

$$f_i \xrightarrow{w^*} f \;\Leftrightarrow\; f_i(x) \to f(x), \;\; x \in X.$$

Satz 2.3.1. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu \geq 0$ ein endliches Maß und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Betrachte den* Multiplikationsoperator

$$M_h : \begin{cases} \operatorname{dom}(M_h) & \to & L^2(\mu) \\ g & \mapsto & g \cdot h \end{cases},$$

wobei $\operatorname{dom}(M_h)$ *der lineare Teilraum*

$$\operatorname{dom}(M_h) = \left\{ g \in L^2(\mu) : gh \in L^2(\mu) \right\}$$

von $L^2(\mu)$ ist. Dann gilt:

⇝ $\operatorname{dom}(M_h)$ *ist dicht in $L^2(\mu)$ und M_h ist ein abgeschlossener Operator (der Graph von M_h ist abgeschlossen im Raum $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$ mit der Produkttopologie)*

⇝ *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*a*) *$h \in L^\infty(\mu)$, dh. h ist beschränkt auf dem Komplement einer Nullmenge.*

(*b*) $\operatorname{dom} M_h = L^2(\mu)$ *und M_h ist beschränkt*

(*c*) *M_h ist beschränkt auf zumindest einem $L^2(\mu)$-dichten Teilraum $\mathcal{M}$* ($\subseteq \operatorname{dom}(M_h)$).

(*d*) $\operatorname{dom}(M_h) = L^2(\mu)$

In diesem Fall ist $M_h : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ beschränkt und

$$\|M_h\| = \|h\|_\infty \; (= \inf\{\eta \in (0, +\infty) : \mu\{x \in \Omega : |h(x)| > \eta\} = 0\}) .$$

Beweis.

⇝ Sei $f \in L^2(\mu)$, $\Delta_n := \{t \in \Omega : |h(t)| \leq n\}$ und $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}$. Die Funktionen f_n liegen in $\operatorname{dom}(M_h)$, denn

$$\int |f_n \cdot h|^2 \, d\mu = \int_{\Delta_n} |f|^2 |h|^2 d\mu \leq n^2 \int |f|^2 d\mu \overset{f \in L^2}{<} +\infty .$$

Nach dem Satz über die beschränkte Konvergenz mit Majorante $|f|^2 \in L^1(\mu)$ gilt

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int |f - f \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}|^2 d\mu = \int \mathbb{1}_{\Delta_n^c} |f|^2 d\mu \to 0 ,$$

oder äquivalent, dass $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$. $\operatorname{dom}(M_h)$ ist daher dicht in $L^2(\mu)$.

⇝ Wir möchten nun zeigen, dass M_h abgeschlossen ist. Sei also $(f_n; h \cdot f_n) \in M_h$ - wir identifizieren hier die Abbildung mit ihrem Graphen - und $(f_n; h \cdot f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} (f; g)$. Zu beweisen ist, dass $g = f \cdot h$. Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass es eine Teilfolge f_{n_k} der f_n gibt, die $[\mu]$ gegen f konvergiert. Das selbe Argument liefert eine Teilfolge $f_{n_{k_j}}$, sodass $f_{n_{k_j}} \cdot h$ gegen g $[\mu]$-konvergiert. Zusammengefasst:

$$f_{n_k} \to f \; [\mu] \Rightarrow \; h \cdot f_{n_{k_j}} \xrightarrow{[\mu]} h \cdot f, \; h \cdot f_{n_{k_j}} \xrightarrow{[\mu]} g$$

Hieraus folgt $hf = g \; [\mu]$ und damit die Abgeschlossenheit von M_h.

$\rightsquigarrow$ Wir zeigen nun die Äquivalenz der vier angführten Aussagen:

(a) $\Rightarrow$ (b): Aus (a) folgt für $f \in L^2(\mu)$

$$\int |h|^2 |f|^2 d\mu \leq \|h\|_\infty^2 \cdot \|f\|_2^2 \,,$$

und damit $hf \in L^2(\mu)$ bzw. $f \in \operatorname{dom} M_h$, wobei $\|M_h f\|_2 \leq \|h\|_\infty \cdot \|f\|_2$. Somit gilt (b), wobei zusätzlich $\|M_h\| \leq \|h\|_\infty$.

(b) $\Leftrightarrow$ (d) folgt sofort aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, und (b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$ (d): Aus der noch zu beweisenden Proposition 4.1.6, (ii), folgt dass der Abschluss $\overline{M_h|_\mathcal{M}}$ von $M_h|_\mathcal{M}$ mit der stetigen Fortsetzung C von $M_h|_\mathcal{M}$ auf $\overline{\mathcal{M}} = L^2(\mu)$ übereinstimmt. Aus der Abgeschlossenheit von M_h folgt $M_h \supseteq \overline{M_h|_\mathcal{M}} = C$; insbesondere gilt $\operatorname{dom} M_h = L^2(\mu)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Man setze $g_n := \mathbb{1}_{\{t \in \Omega : |h(t)| \geq n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen liegen wegen der Endlichkeit des Maßes μ in $L^2(\mu) = \operatorname{dom} M_h$, wobei

$$\|g_n\|_2^2 = \mu\big(\{t \in \Omega : |h| \geq n\}\big) \leq \|\mu\| \,.$$

Somit gilt

$$\|M_h\|^2 \, \|g_n\|_2^2 \geq \|M_h g_n\|_2^2 = \int_{\{t \in \Omega : |h| \geq n\}} |h|^2 d\mu \geq n^2 \mu\big(\{t \in \Omega : |h| \geq n\}\big) = n^2 \|g_n\|_2^2 .$$

Für hinreichend großes n ist somit $\mu(\{t \in \Omega : |h(t)| \geq n\}) = \|g_n\|_2^2 = 0$, dh. $h \in L^\infty(\mu)$.

Für die Zusatzaussage haben wir schon $\|M_h\| \leq \|h\|_\infty$ gezeigt. Nun sei $\varepsilon > 0$ und $U := \{t \in \Omega : |h(t)| > \|h\|_\infty - \varepsilon\}$. Nach Definition der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist $\mu(U) > 0$. Mit $g := \mathbb{1}_U$ folgt

$$\|M_h g\|_2^2 = \int_U |h|^2 d\mu \geq \mu(U) \cdot (\|h\|_\infty - \varepsilon)^2 = (\|h\|_\infty - \varepsilon)^2 \|g\|_2^2 \,.$$

Daher ist $\|M_h\| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist insgesamt $\|M_h\| = \|h\|_\infty$.

■

Bemerkung 2.3.2. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem σ-endlichen μ lässt sich auf elementare Weise eine messbare Funktion $\omega : \Omega \to (0, 1]$ mit $\int \omega^2 \, d\mu < +\infty$ konstruieren. Dann ist $f \mapsto f \cdot \omega$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\tilde{\mu})$ auf $L^2(\mu)$, wobei $d\tilde{\mu} = \omega^2 \cdot d\mu$.
Andererseits ist $L^\infty(\mu) = L^\infty(\tilde{\mu})$, wobei auch das wesentliche Supremum dasselbe ist. Daraus leitet man nun leicht ab, dass Satz 2.3.1 auch für σ-endliche μ gilt.

Es sei bemerkt, dass $L^\infty(\mu)$ versehen mit dem wesentlichen Supremum und der punktweisen Multiplikation eine C^*-Algebra mit Eins ist.

Da für $\phi, \psi \in L^\infty(\mu)$ offensichtlich $M_{\phi+\psi} = M_\phi + M_\psi, M_{\phi\cdot\psi} = M_\phi\, M_\psi,\ M_{\lambda\phi} = \lambda M_\phi$ und wegen $(f, g \in L^2(\mu))$

$$(M_\phi f, g) = \int (\phi f)\bar{g}\, d\mu = \int f \cdot \overline{(\bar{\phi} g\,)}\, d\mu = (f, M_{\bar{\phi}} g)$$

auch $M_\phi^* = M_{\bar{\phi}}$ erhalten wir

Korollar 2.3.3. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu \geq 0$ ein endliches Maß. Die Abbildung $h \mapsto M_h$ von $L^\infty(\mu)$ nach $L_b(L^2(\mu))$ ist ein isometrischer C^*-Algebrenhomomorphismus, der das Einselement $\mathbb{1} \in L^\infty(\mu)$ auf das Einselement $I \in L_b(L^2(\mu))$ abbildet.*
Insbesondere sind alle M_h normal und $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$ ist eine kommutative C^*-Unteralgebra mit Einselement I von $L_b(L^2(\mu))$.

Um $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$ genauer bestimmen zu können bringen wir folgendes Resultat. Es sei dabei in Erinnerung gerufen, dass wegen der Endlichkeit von μ sicherlich $L^\infty(\mu) \subseteq L^2(\mu)$.

Satz 2.3.4. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu \geq 0$ ein endliches Maß. Sei $\mathcal{M} \subseteq L^\infty(\mu)$ so, dass $\mathcal{M}$ dicht in $L^2(\mu)$ ist.*
Gilt für $S \in L_b(L^2(\mu))$, dass $S M_\phi = M_\phi S$ für alle $\phi \in \mathcal{M}$, dann existiert ein $h \in L^\infty(\mu)$, sodass $S = M_h$.

Beweis. Wir definieren $h := S(\mathbb{1}_\Omega) \in L^2(\mu)$. Für $\phi \in \mathcal{M}$ gilt

$$\phi \cdot h = M_\phi \circ S(\mathbb{1}_\Omega) = S \circ M_\phi(\mathbb{1}_\Omega) = S(\phi) \in L^2(\mu). \tag{2.20}$$

Daher ist $\phi \in \mathrm{dom}(M_h)$. Insbesondere können wir M_h auf $\mathcal{M}$ einschränken und erhalten einen beschränkten Operator:

$$\|M_h|_{\mathcal{M}}\, \phi\|_2 \overset{(2.20)}{\leq} \|S\| \cdot \|\phi\|_2\,.$$

Mit Satz 2.3.1 ist daher M_h ein beschränkter Operator auf ganz $L^2(\mu)$ mit $\|h\|_\infty = \|M_h\| < \infty$. Die Operatoren S und M_h sind also beide beschränkt und stimmen auf dem dichten Teilraum $\mathcal{M}$ überein. Daraus folgt $M_h = S$. ∎

Korollar 2.3.5. *Mit den Voraussetzungen von Korollar 2.3.3 ist die C^*-Unteralgebra $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$ von $L_b(L^2(\mu))$ abgeschlossen bezüglich der schwachen Operatortopologie.*

Beweis. Man überprüft leicht, dass wenn ein $T \in L_b(L^2(\mu))$ mit allen Operatoren aus $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$ kommutiert, dann auch T mit allen aus $\overline{\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}}^w$ kommutiert.
Insbesondere gilt das für jedes $T = M_g$, wenn $g \in L^\infty(\mu)$. Also kommutiert jeder Operator S aus $\overline{\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}}^w$ mit jedem $M_g,\ g \in L^\infty(\mu)$. Da $L^\infty(\mu)$ dicht in $L^2(\mu)$ ist, folgt aus Satz 2.3.4, dass $S \in \{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$. ∎

Proposition 2.3.6. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu \geq 0$ ein endliches Maß.*
Sei $E : \begin{cases} \mathcal{A} & \to & L_b(L^2(\mu)) \\ \Delta & \mapsto & M_{\mathbb{1}_\Delta} \end{cases}$. Dann ist E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, L^2(\mu) \rangle$, sodass

$$\left[\int h\, dE\right] = M_h,\ \ h \in B(\Omega, \mathcal{A})^3.$$

[3]Die Abbildung $h \mapsto h$ von $B(\Omega, \mathcal{A})$ nach $L^\infty(\mu)$ ist surjektiv aber i.A. nicht normtreu.

Beweis. Zunächst ist $E(\Delta)$ wegen

$$\begin{aligned}(M_{\mathbb{1}_\Delta})(M_{\mathbb{1}_\Delta}) &= M_{\mathbb{1}_\Delta}\\ (M_{\mathbb{1}_\Delta})^* &= M_{\mathbb{1}_\Delta}\end{aligned}$$

eine orthogonale Projektion. Zudem folgen weitere definierende Eigenschaften eines Spektralmaßes trivial:

$$M_{\mathbb{1}_\emptyset} = 0,\ M_{\mathbb{1}_\Omega} = I,\ M_{\mathbb{1}_{\Delta_1\cap\Delta_2}} = M_{\mathbb{1}_{\Delta_1}} M_{\mathbb{1}_{\Delta_2}}$$

Um die Additivität zu zeigen, seien Δ_n, $n \in \mathbb{N}$ disjunkt angenommen. Weiters sei $f \in L^2(\mu)$ frei gewählt und $\Delta := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. Nach dem Satz über die Beschränkte Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\|\Big[E(\Delta) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)}_{=\sum_{n=1}^N M_{\mathbb{1}_{\Delta_n}} = M_{\bigcup_{n=1}^N \mathbb{1}_{\Delta_n}}}\Big] f\|_2^2 &= \|\Big[M_{\mathbb{1}_\Delta} - M_{\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N \Delta_n}}\Big] f\|_2^2 =\\ &= \|\Big[\mathbb{1}_\Delta - \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N \Delta_n}\Big] f\|_2^2 =\\ &= \|\Big[\mathbb{1}_{\bigcup_{n=N+1}^\infty \Delta_n}\Big] f\|_2^2 =\\ &= \int \underbrace{|f|^2 \mathbb{1}_{\bigcup_{n=N+1}^\infty \Delta_n}}_{\le |f|^2} d\mu \xrightarrow{N\to\infty} 0.\end{aligned}$$

E ist also ein Spektralmaß. Wir möchten nun genauer betrachten, was integrieren nach $E_{f,g}$ bedeutet:

$$\begin{aligned}\forall f, g \in L^2(\mu) : \int \mathbb{1}_\Delta\, dE_{f,g} &= E_{f,g}(\Delta) = \left(M_{\mathbb{1}_\Delta} f, g\right)_{L^2} =\\ &= \int_\Delta f\overline{g}\, d\mu \ \Rightarrow\ dE_{f,g} = f \cdot \overline{g}\, d\mu\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen, denn

$$\begin{aligned}\left(\left[\int h\, dE\right] f, g\right) &= \int h\, dE_{f,g} = \int h f\overline{g}\, d\mu = (M_h f, g)_{L^2}\\ &\Rightarrow \int h\, dE = M_h.\end{aligned}$$

∎

Definition 2.3.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ ein Maß auf der von $\mathcal{T}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{B}(X)$ (Borelmengen). Bezeichnet $\mathfrak{U}(z)$ den Umgebungsfilter von $z \in X$, so nennen wir

$$\operatorname{supp}\mu := \{z \in X : \forall V \in \mathfrak{U}(z) \Rightarrow \mu(V) > 0\}.$$

den *Träger* von μ.

Fakta 2.3.8.

1. Ist $z \in \overline{\operatorname{supp}\mu}$ und $V \in \mathfrak{U}(z)$, so gilt $z \in U \subseteq V$ für ein offenes U, und daher $U \cap \operatorname{supp}\mu \neq \emptyset$. Für $x \in U \cap \operatorname{supp}\mu$ gilt $U \in \mathfrak{U}(x)$ und damit $\mu(V) \geq \mu(U) > 0$. Somit ist $\operatorname{supp}\mu$ immer abgeschlossen.

2. Ist μ ein Borelmaß, dh. $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$, und auf allen offenen Mengen von innen regulär, dh. für $O \in \mathcal{T}$ gilt
$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq O, K \text{ ist kompakt}\},$$
so gilt $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$. In der Tat gilt für ein kompaktes K, welches in der offenen Menge $X \setminus \operatorname{supp}\mu$ enthalten ist, dass es zu $x \in K$ ein oBdA. offenes $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ gibt, sodass $\mu(U_x) = 0$. Da $U_x,\ x \in K$, eine offene Überdeckung von K ist, gibt es endlich viele solche U_x, die K überdecken. Insbesondere folgt $\mu(K) = 0$, und wegen der Regularitätsforderung gilt dann $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$.

3. Ist $X = \mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Topologie, dann ist jedes Borelmaß bekannterweise regulär, dh. für alle $E \in \mathfrak{B}(X)$ gilt
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ ist kompakt}\}$$
und
$$\mu(E) = \inf\{\mu(P) : E \subseteq P, P \text{ ist offen}\}$$
Das liegt an der Tatsache, dass $\mathbb{C}$ lokal kompakt ist und seine Topologie eine abzählbare Basis hat, siehe Analysis 3.

4. Falls $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ wie etwa für Borelmaße auf $\mathbb{C}$, so gilt $f = f \cdot \mathbb{1}_{\operatorname{supp}\mu}$ als Elemente von $L^p(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ für jedes $f \in L^p(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ und jedes $p \in [1, +\infty]$. Insbesondere hat man $L^p(X, \mathfrak{B}(X), \mu) \cong L^p(\operatorname{supp}\mu, \mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mu), \mu|_{\mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mu)})$, indem man ein $f \in L^p(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ mit seiner Einschränkung auf $\operatorname{supp}\mu$ identifiziert.

Bemerkung 2.3.9. Eine Tatsache, die wir im Beweis von Satz 2.3.11 benötigen ist die, dass für einen kompakten topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und ein reguläres Borelmaß $\mu \geq 0$ der Raum $C(X)$ schwach-$*$-dicht in $L^\infty(\mu)$ ist, wenn man $L^\infty(\mu)$ als Dualraum von $L^1(\mu)$ betrachtet.
In der Tat würde aus dem Gegenteil mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach die Existenz eines $f \in L^1(\mu)$ folgen, sodass $f \neq 0$ (als Element von $L^1(\mu)$) aber
$$\int \phi \cdot f \, d\mu = 0, \quad \text{für alle } \phi \in C(X). \tag{2.21}$$
Nun zeigen wir, dass auch $\Delta \mapsto \int_\Delta f \, d\mu$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, was bedeutet, dass die Variation $\Delta \mapsto \int_\Delta |f| \, d\mu$ ein reguläres Borelmaß ist.
Zu $E \in \mathfrak{B}(X)$ gibt es wegen der Regularität von μ eine monoton wachsende Mengenfolge $K_n \subseteq E$ bestehend aus kompakten Mengen, sodass $\mu(K_n) \nearrow \mu(E)$. Insbesondere ist $\mu(E \setminus \bigcup_j K_j) = 0$ und damit
$$\int_{K_n} |f| \, d\mu \nearrow \int_{\bigcup_j K_j} |f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$
Also ist $\Delta \mapsto \int_\Delta |f| \, d\mu$ von innen regulär. Ähnlich zeigt man, dass dieses Maß auch von außen regulär ist.
Wegen (2.21) und der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz muss $\Delta \mapsto \int_\Delta f \, d\mu$ das Nullmaß sein und damit erhalten wir den Widerspruch $f = 0$.

Definition 2.3.10. Sei H ein Hilbertraum, $T \in L_b(H)$ normal, $u \in H$. u heißt *zyklisch* in H (bezüglich T), falls

$$H = \operatorname{cls}\left\{T^m(T^n)^* u : n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Im folgenden Satz 2.3.11 ist $\mu \geq 0$ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger $K = \operatorname{supp} \mu$. Wenn dann die Rede von $C(K)$ ist, so wollen wir darunter die Menge aller komplexwertigen und stetigen Funktionen auf K verstehen, die auf ganz $\mathbb{C}$ durch $\phi(z) = 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus K$ fortgesetzt werden. Insbesondere gilt $C(K) \subseteq L^\infty(\mu)$. Wegen Bemerkung 2.3.9 zusammen mit Fakta 2.3.8,4, ist dabei $C(K)$ schwach-$*$-dicht in $L^\infty(\mu)$.

Satz 2.3.11. *Sei $\mu \geq 0$ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger $K =$ $\operatorname{supp} \mu$. Dann liegt die Funktion $z \mapsto z$ als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ in $L^\infty(\mu)$ und der dazugehörige Multiplikationsoperator $M_z := M_{(z \mapsto z)}$ ist beschränkt und normal. Dabei gilt*

(*i*) $\sigma(M_z) = K$.

(*ii*) $\|M_z\| = \|(z \mapsto z)\|_\infty = \max_{\lambda \in K} |\lambda|$.

(*iii*) *Für das Spektralmaß von M_z gilt $E(\Delta) = M_{\mathbb{1}_\Delta}$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.*

(*iv*) *Die konstante Einsfunktion $\mathbb{1}$ ist zyklisch in $L^2(\mu)$ bzgl. M_z.*

(*v*) $\mathfrak{C}(M_z) = \{M_\phi : \phi \in C(K)\}$.

(*vi*) $\overline{\mathfrak{C}(M_z)}^w = \{M_h : h \in L^\infty(\mu)\} = \{S \in L_b(L^2(\mu)) : S M_z = M_z S, S M_z^* = M_z^* S\}$.

Beweis. Wegen der Beschränktheit von $(z \mapsto z)$ als Funktion von K nach $\mathbb{C}$ liegt diese in $L^\infty(\mu)$, vgl. Fakta 2.3.8, 4. Somit folgt $M_z \in L_b(L^2(\mu))$ mit $\|M_z\| = \|z \mapsto z\|_\infty$, vgl. Satz 2.3.1. Aus Korollar 2.3.3 wissen wir, dass M_z normal ist.

(*i*) Sei $\lambda \notin K = \operatorname{supp} \mu$. Die Funktion $g(z) := \frac{1}{z-\lambda},\ z \in K$, und $g(z) = 0,\ z \notin K$, liegt in $L^\infty(\mu)$, da $|g(z)| \leq \frac{1}{d(\lambda,K)} < +\infty$. Nun gilt

$$M_g \cdot \left(M_z - \lambda I\right) = \left(M_z - \lambda I\right) \cdot M_g = M_{(z-\lambda)g} = M_{\mathbb{1}_K} = M_{\mathbb{1}} = I,$$

da $\mathbb{1}_K = \mathbb{1}$ als Elemente von $L^\infty(\mu)$. Also gilt $\lambda \notin \sigma(M_z)$.

Für $\lambda \in K = \operatorname{supp} \mu$ gilt immer $\mu(U_{\frac{1}{n}}(\lambda)) > 0$ und somit $g_n := \mathbb{1}_{U_{\frac{1}{n}}(\lambda)} \neq 0$ im Raum $L^\infty(\mu)$, wobei $\|g_n\|_2^2 = \mu(U_{\frac{1}{n}}(\lambda))$. Wegen

$$\|(M_z - \lambda I) g_n\|_2^2 = \int_{U_{\frac{1}{n}}(\lambda)} |z - \lambda|^2 \, d\mu(z) \leq \frac{1}{n^2} \mu(U_{\frac{1}{n}}(\lambda)) = \frac{1}{n^2} \|g_n\|_2^2,\ n \in \mathbb{N},$$

kann $M_z - \lambda I$ nicht beschränkt invertierbar sein, da es dann ein $C > 0$ gäbe, sodass $\|(M_z - \lambda I) g\| \geq C \|g\|$ für alle $g \in L^2(\mu)$.

(*ii*) Da M_z normal ist, gilt $\|M_z\| = r(M_z) = \max_{\lambda \in \sigma(M_z)} |\lambda|$.

(*iii*) Sei $E(\Delta) = M_{\mathbb{1}_\Delta}$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Wegen $(z \mapsto z) = (z \mapsto z) \cdot \mathbb{1}_K$ als Elemente von $L^\infty(\mu)$ folgt aus Proposition 2.3.6

$$M_z = \int_K z \, dE(z).$$

Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 2.2.1 zeigt, dass E das eindeutige Spektralmaß zu M_z für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), L^2(\mu) \rangle$ ist.

(*iv*) Offensichtlich gilt

$$\left\{M_z^m (M_z^n)^* \mathbb{1} : n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\} = \left\{(\zeta \mapsto \zeta^m\, \bar{\zeta}^n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}.$$

Die lineare Hülle dieser Menge ist daher $\mathbb{C}[\,z, \bar{z}\,]$. Da dieser Raum nach Stone-Weierstrass bzgl. $\|.\|_\infty$ und wegen $\|.\|_2 \leq \mu(K)^{\frac{1}{2}} \cdot \|.\|_\infty$ somit auch bzgl. $\|.\|_2$ dicht in $C(K)$ ist und da $C(K)$ dicht in $L^2(K, \mathfrak{B}(K), \mu|_{\mathfrak{B}(K)}) \cong L^2(\mu)$ ist, muss $\mathbb{1}$ zyklisch sein.

(*v*) Gemäß Satz 2.2.1 gilt

$$\mathfrak{C}(M_z) = \{\int_K \phi\, dE : \phi \in C(K)\},$$

wobei $E(\Delta) = M_{\mathbb{1}_\Delta}$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, vgl. (iii). Da wir uns $\phi \in C(K)$ als Element von $L^\infty(\mu)$ außerhalb von K durch Null fortgesetzt denken, folgt aus Proposition 2.3.6

$$\int_K \phi\, dE = \int \phi\, dE = M_\phi,$$

und daher $\mathfrak{C}(M_z) = \{M_\phi : \phi \in C(K)\}$.

(*vi*) $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\} \subseteq \{S \in L_b(L^2(\mu)) : SM_z = M_zS, SM_z^* = M_z^*S\}$ ist trivial. Umgekehrt folgt aus $SM_z = M_zS, SM_z^* = M_z^*S$, der Tatsache, dass $M_z^* = M_{\bar{z}}$, und der Multiplikativität sowie Linearität von $h \mapsto M_h$ auch $SM_p = M_pS$ für alle $p \in \mathbb{C}[\,z, \bar{z}\,]$. Wie in diesem Beweis schon bemerkt, ist $\mathbb{C}[\,z, \bar{z}\,]$ dicht in $L^2(\mu)$. Also folgt aus Satz 2.3.4, dass $S = M_h$ für ein $h \in L^\infty(\mu)$.

Da $\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu)\}$ wegen Korollar 2.3.5 schwach abgeschlossen ist, gilt $\overline{\mathfrak{C}(M_z)}^w \subseteq \{M_h : h \in L^\infty(\mu)\}$.

Da $C(K)$ schwach-$*$-dicht in $L^\infty(\mu)$ ist, gibt es zu $h \in L^\infty(\mu)$ ein Netz $(h_i)_{i\in I}$, $h_i \in C(K)$ mit $h_i \xrightarrow{w^*} h,\ i \in I$. Für alle f, g in $L^2(\mu)$ gilt wegen der w^*-Konvergenz

$$\left(M_{h_i} f, g\right) = \int h_i \underbrace{f\,\bar{g}}_{\in L^1}\, d\mu \to \int hf\,\bar{g}\, d\mu = \left(M_h f, g\right)$$

Somit konvergiert M_{h_i} in der schwachen Operatortopologie gegen M_h. Also gilt $\{M_h : h \in L^\infty(\mu)\} \subseteq \overline{\{M_\phi : \phi \in C(K)\}}^w = \overline{\mathfrak{C}(M_z)}^w$.

■

Mit dem Spektralsatz Satz 2.2.1 gilt auch eine Art Umkehrung von Satz 2.3.11.

Satz 2.3.12. *Sei $T \in L_b(H)$ normal, $u \in H$ zyklisch. Dann existiert ein endliches, nichtnegatives Borelmaß μ auf $\mathbb{C}$ und eine unitäre Abbildung $U : L^2(\mu) \to H$, sodass gilt:*

(*i*) $\operatorname{supp}\mu = \sigma(T)$.

(*ii*) $T \circ U = U \circ M_z$ *mit* $M_z : \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(\mu) & \to & L^2(\mu) \\ f(z) & \mapsto & z \cdot f(z) \end{array} \right.$

(*iii*) $U(\mathbb{1}) = u$.

Damit ist $(L^2(\mu), M_z, \mathbb{1})$ ein Modell für (H, T, u).

Beweis. Sei E das Spektralmaß zu T aus Satz 2.2.1. Wir definieren durch

$$\mu(\Delta) := (E(\Delta)u, u) = E_{u,u}(\Delta) = \int \mathbb{1}_\Delta \, dE_{u,u}$$

ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{C}$, wobei wegen $\mu(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$ sicherlich $\operatorname{supp}\mu \subseteq \sigma(T)$. Wie man sich mit Hilfe des Lemmas von Urysohn überzeugt, gilt

$$E(\Delta) \neq 0. \tag{2.22}$$

für jede in der Spurtopologie offene Teilmenge $\Delta \neq \emptyset$ von $\sigma(T)$. Ist nun $\mu(\Delta) = 0$ für eine solche nichtleere offene Teilmenge $\Delta \subseteq \sigma(T)$, so folgt für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
\Big(T^m (T^n)^* E(\Delta)u, u\Big) &= \Big(\Big[\int_{\sigma(T)} z^m \overline{z}^n \, dE\Big] E(\Delta)u, u\Big) = \\
&= \Big(\Big[\int_{\sigma(T)} z^m \overline{z}^n \mathbb{1}_\Delta \, dE\Big] u, u\Big) = \\
&= \int_{\sigma(T)} z^m \overline{z}^n \mathbb{1}_\Delta \, dE_{u,u} \overset{\mu|_\Delta = 0}{=} 0.
\end{aligned}$$

Da T normal ist, ergibt sich daraus

$$\Big(T^m (T^n)^* E(\Delta)u, T^k (T^l)^* u\Big) = 0, \ \forall k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

und weiter ($E(\Delta)$ vertauscht mit T und T^*)

$$\Big(E(\Delta) f, g\Big) = 0, \ \forall f, g \in \operatorname{span}\Big\{T^k (T^l)^* u : k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\Big\}. \tag{2.23}$$

Da u ein zyklischer Vektor ist, und die linke Seite in (2.23) stetig von f, g abhängt, gilt $\Big(E(\Delta) f, g\Big) = 0$ sogar für alle $f, g \in H$. Hieraus würde $E(\Delta) = 0$ folgen; ein Widerspruch zu (2.22). Damit ist (i) gezeigt.

Wir wollen nun U konstruieren. Dazu sei $\Phi_T : C(\sigma(T)) \to \mathfrak{C}(T)$ $(L_b(H))$ der C^*-Algebrenisomorphismus aus Definition 1.5.13, $\Phi_T : \phi \mapsto \phi(T)$. Nun sei

$$\Psi : \begin{cases} C(\sigma(T)) & \to \quad H \\ \quad f & \mapsto \quad \Phi_T(f)\, u \end{cases} .$$

Offensichtlich ist

$$\Psi(\mathbb{1}) = \Phi_T(\mathbb{1})\, u = I\, u = u.$$

Nach Satz 2.2.1 gilt $\Psi(f) = \big[\int_{\sigma(T)} f \, dE\big] u$. Aus der Linearität von Φ_T folgt die von Ψ. Weiters gilt wegen Satz 2.1.6

$$\|\Psi(f)\|^2 = \|\Big[\int_{\sigma(T)} f \, dE\Big] u\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f|^2 \, dE_{u,u} = \|f\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Damit ist Ψ isometrisch, wenn man sich die Elemente von $C(\sigma(T))$ auf $\mathbb{C}$ durch Null fortgesetzt denkt und mit $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ versieht. Der Raum $C(\sigma(T))$ liegt nun aber dicht in $L^2(\sigma(T), \mathfrak{B}(\sigma(T)), \mu|_{\mathfrak{B}(\sigma(T))}) \cong L^2(\mu)$. Daher hat Ψ eine eindeutige, stetige und isometrische Fortsetzung $U : L^2(\mu) \to H$. Wegen (siehe (1.11))

$$\Psi(\,(z \mapsto z^n \overline{z}^m)\,) = \Phi_T((z \mapsto z^n \overline{z}^m))\, u = T^n (T^m)^* u$$

für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\Psi(\mathbb{C}[\, z, \bar{z}\,]) = \operatorname{span}\left\{T^n (T^m)^* u : n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

Nach Voraussetzung ist diese Menge dicht in H. Da U isometrisch ist, ist das Bild abgeschlossen und damit der ganze Raum H. Nach Proposition 6.5.11 in [4] muss U unitär sein.
Für $f \in C(\sigma(T))$ folgt aus (1.11)

$$U \circ M_z(f) = U(z \mapsto z \cdot f(z)) = \Phi_T(z \mapsto z \cdot f(z))\, u = \Phi_T(z \mapsto z)\Phi_T(f)\, u = T \circ U(f).$$

Durch Verwendung der Stetigkeit in f lässt sich diese Beziehung von der dichten Menge $C(\sigma(T))$ auf alle $f \in L^2(\mu)$ erweitern. Damit ist auch (ii) gezeigt. ■

Bemerkung 2.3.13. Ist $T \in L_b(H)$ normal, so muss es nicht unbedingt ein zyklisches Element geben. In der Tat folgt aus Definition 2.3.10 unmittelbar, dass H separabel sein muss.
Ist H umgekehrt separabel, so reicht das i.A. auch nicht für die Existenz eines zyklischen Elementes. Jedoch kann man eine Orthogonalbasis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wählen und zunächst den Unterraum

$$H_1 = \operatorname{cls}\left\{T^m (T^n)^* u_1 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

von H betrachten, und zeigen, dass $T(H_1) \subseteq H_1$ sowie $T(H \ominus H_1) \subseteq H \ominus H_1$. Ist nun $n(2)$ die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, sodass $u_{n(2)} \notin H_1$, so betrachte

$$H_2 = \operatorname{cls}\left\{T^m (T^n)^* (I - P_1) u_{n(2)} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

wobei P_1 die orthogonal Projektion auf H_1 ist. Sei wieder $n(3)$ die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, sodass $u_{n(3)} \notin H_1 \oplus H_2$, usw. .
Auf diese Weise erhält man eine Zerlegung $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$, wobei $T|_{H_n} : H_n \to H_n$ ein zyklisches Element in H_n besitzt. Wendet man für alle $n \in \mathbb{N}$ Satz 2.3.12 an, so erhält man als Modell für (H, T) einen Hilbertraum der Form

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mu_n), \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_z\right),$$

wobei μ_n ein Borelmaß auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger ist.
Ist $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_n$ die Vereinigung abzählbar vieler disjunkter Kopien von $\mathbb{C}$ versehen mit der Finalen Topologie bzgl. der Abbildungen

$$\iota_n : \mathbb{C} \to X, \ \ z \mapsto z \, (\in \mathbb{C}_n),$$

und ist $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ definiert durch $\mu|_{\mathfrak{B}(\mathbb{C}_n)} = \mu_n$, so ist μ sicherlich σ-endlich und

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mu_n) \cong L^2(\mu).$$

Ist noch $h : X \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(\iota_n(z)) = z$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist dabei $\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_z \cong M_h$, wobei $h \in L^\infty(\mu)$. Also ist $(L^2(\mu), M_h)$ ein Modell für (H, T).
Für nicht separable H's lässt sich ein ähnliches Modell bauen, wobei das Maß aber nicht mehr σ-endlich sein muss. Die entsprechende Funktion h muss dann aber nicht mehr $\mathfrak{B}(X)$-messbar sein. Dieses Problem lässt sich durch eine veränderte Definition des $L^\infty(\mu)$-Raumes wieder 'zurecht biegen'.

Kapitel 3

Reproducing Kernel Hilbert Spaces

3.1 Stetige Punktauswertung

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum, der linearer Teilraum des Vektorraums $\mathbb{C}^\Omega$ ist. Damit sind die Elemente von H Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{C}$, und Addition und skalare Multiplikation sind punktweise erklärt.

Definition 3.1.1. Ein Hilbertraum $H \leq \mathbb{C}^\Omega$ für $\Omega \neq \emptyset$ heißt *kernreproduzierender Hilbertraum* oder englisch *Reproducing Kernel Hilbert Space*, kurz *RKHS* auf Ω, falls die Abbildung

$$\iota_x : \begin{cases} H & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

für alle $x \in \Omega$ auf H stetig ist.

Bemerkung 3.1.2. Wegen der punktweisen Definition der Operationen auf H sind die Abbildungen ι_x linear. Also ist H genau dann ein RKHS, wenn gilt $\iota_x \in H'$ für alle $x \in \Omega$.
Nach dem Satz von Riesz-Fischer, Proposition 3.2.5 in [4], folgt daher für jedes $x \in \Omega$ die Existenz eines eindeutigen $k_x \in H$, sodass $f(x) = (f, k_x)$ für alle $f \in H$.

Lemma 3.1.3. *Die lineare Hülle der Funktionen k_x liegen dicht in H; also* $\operatorname{cls}\{k_x : x \in \Omega\} = H$.

Beweis. Für $f \in \operatorname{cls}\{k_x : x \in \Omega\}^\perp = \operatorname{span}\{k_x : x \in \Omega\}^\perp$ gilt $f(x) = (f, k_x) = 0$ für alle $x \in \Omega$; also $f \equiv 0$. ∎

Definition 3.1.4. Mit der Notation von oben heißt die Abbildung

$$K : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & K(x, y) := (k_y, k_x) = k_y(x) \end{cases}$$

die *Kernfunktion*.

Man möchte nun möglichst viele Eigenschaften von H bereits an der Kernfunktion ablesen. Zunächst erfüllt diese wegen $(k_y, k_x) = \overline{(k_x, k_y)}$

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}. \tag{3.1}$$

Weil für $N \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_N \in \Omega,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{\lambda_i} \lambda_j \underbrace{K(x_i, x_j)}_{=(k_{x_j}, k_{x_i})} = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j k_{x_j}, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i k_{x_i} \right) \geq 0\ ,$$

gilt auch

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{\lambda_i} \lambda_j K(x_i, x_j) \geq 0 \ \text{ für alle } \ N \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_N \in \Omega,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}\,. \tag{3.2}$$

Diese zwei Eigenschaften bedeuten anders formuliert, dass für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ die Matrix $\left(K(x_i, x_j)\right)_{i,j=1}^{N}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit ist. Dies ist wiederum dazu äquivalent, dass diese Matrix selbstadjungiert ist und die Eigenwerte der Matrix alle nichtnegativ sind.

Beispiel 3.1.5. Der Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ der quadratisch summierbaren Folgen ist ein RKHS, denn für $\Omega = \mathbb{N}$ sind die Elemente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ nichts anderes als Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$. Punktauswerten entspricht hier dem Auslesen des n-ten Eintrags und ist stetig, da stets $|x_n| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ betrachte $k_m := e_m$, wobei e_m die Folge mit einer Eins an der m-ten Stelle und Null sonst ist. Dann gilt $((x_n), k_m) = x_m$ und $k_m(n) = K(n,m) = \delta_{n,m}$[1].

Beispiel 3.1.6. Der Sobolev Raum $W^{1,2}([0,1]) = \{f : f : [0,1] \to \mathbb{C}, f \in AC[0,1], f' \in L^2[0,1]\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f_1, f_2)_{W^{1,2}} = \int_0^1 (f_1 \cdot \bar{f_2} + f_1' \cdot \bar{f_2}')\, d\lambda$$

ist ein RKHS mit der Grundmenge $\Omega = [0,1]$. Betrachte dazu den Differentialoperator $D := \{(f; g) \in L^2[0,1] \times L^2[0,1] :\ f \in AC, f' = g\}$. Wir werden noch sehen, dass D ein abgeschlossener Teilraum von $L^2[0,1] \times L^2[0,1]$ ist. Schränkt man das Summenskalarprodukt von $L^2[0,1] \times L^2[0,1]$ auf D ein, so gilt dort $((f_1; g_1), (f_2; g_2)) = (f_1, f_2)_{W^{1,2}}$. Also ist $W^{1,2}$ als abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes selbst ein Hilbertraum. Für $f \in W^{1,2}$ gilt nun einerseits

$$f(1) - f(x) = \int_0^1 f'(t)\, \chi_{[x,1]}(t)\, d\lambda(t), \tag{3.3}$$

und andererseits gilt für absolut stetige Funktionen

$$\int_0^1 t \cdot f'(t) d\lambda(t) = t \cdot f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) d\lambda(t) = f(1) - \int_0^1 f(t) d\lambda(t). \tag{3.4}$$

[1] Kronecker-Delta

Setzt man nun (3.4) anstelle von $f(1)$ in (3.3) ein, so erhält man

$$f(x) = \int_0^1 t \cdot f'(t)\, d\lambda(t) + \int_0^1 f(t)\, d\lambda(t) - \int_0^1 f'(t)\, \chi_{[x,1]}(t)\, d\lambda(t).$$

Damit ist die Punktauswertung von f an einem $x \in [0,1]$ als Summe dieser drei Integrale darstellbar. Diese Integrale sind allesamt stetige lineare Funktionen in Abhängigkeit von f, denn für den ersten Summanden hat man etwa mit Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$\left| \int_0^1 t \cdot f'(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 |t|^2 dt \cdot \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq \frac{1}{3} \cdot \|f\|^2_{W^{1,2}}$$

zur Verfügung. Insgesamt ist Punktauswerten also ein stetiger Vorgang.

Bemerkung 3.1.7. Ist $H \leq \mathbb{C}^\Omega$ ein Hilbertraum endlicher Dimension, so ist jedes lineare Funktional automatisch stetig. Insbesondere sind die Punktauswertungen $\iota_x : H \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(x)$ für alle $x \in \Omega$ stetig. Also ist H ein kernreproduzierender Hilbertraum.

Beispiel 3.1.8. Der Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome in der Variablen z vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten versehen mit irgendeinem Skalarprodukt $(.,.)$ ist ein kernreproduzierender Hilbertraum.

Beispiel 3.1.9. Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, und bezeichne $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ den Grad von α. Wählt man für jeden Multiindex α vom Grad kleiner oder gleich m ein $c_\alpha \in \mathbb{C}$, so heißt die Funktion p von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$x \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha$$

ein Polynom in den Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad kleiner oder gleich m. Dabei ist $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}$. $\mathcal{P}_{\leq m}$ bezeichnet den Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq m$. Dieser ist offenbar ein endlichdimensionalen Vektorraum.

Schränkt man die Polynome aus $\mathcal{P}_{\leq m}$ auf die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre ein, so folgt aus dem Verschwinden von $p|_{S^{n-1}}$ noch nicht, dass das Nullpolynom vorliegt Man betrachte etwa das zweidimensionale Beispiel $p(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$.

Darum sondert man von $\mathcal{P}_{\leq m}$ die Menge der harmonischen Polynome

$$H_{\leq m} := \{p \in \mathcal{P}_{\leq m} : \Delta p \equiv 0\}$$

aus, wobei $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ den Laplace-Operator bezeichnet. Wegen dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen ist die Einschränkungsabbildung $p \mapsto p|_{S^{n-1}}$ injektiv auf $H_{\leq m}$. Nach der Poisson'schen Integralformel gilt sogar

$$p(x) = \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x-y\|^n}\, p|_{S^{n-1}}(y)\, d\sigma(y)$$

für alle $\|x\| < 1$ gilt und σ das normierte Oberflächenmaß auf S^{n-1} bezeichnet.

Da es sich bei $H_{\leq m}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(p,q) = \int_{S^{n-1}} p|_{S^{n-1}}(y)\, \overline{q|_{S^{n-1}}(y)} d\sigma(y),$$

um einen endlichdimensionalen Hilbertraum handelt, ist

$$\iota_x : \begin{cases} H_{\leq m} & \to & \mathbb{C} \\ p & \mapsto & p(x) \end{cases}$$

stetig und $H_{\leq m}$ damit ein RKHS.

Beispiel 3.1.10. Wir wollen zeigen, dass der Hardy Raum

$$H_2 := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

ein RKHS auf $\Omega = \mathbb{D}$ ist. Zunächst folgt aus $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ sicherlich $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, womit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Konvergenzradius größer oder gleich 1 hat. Also sind die $f \in H_2$ tatsächlich analytische Funktionen auf $\mathbb{D}$. Man überprüft nun leicht, dass

$$\phi : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}_0) & \to & H_2 \\ (a_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{cases}$$

eine lineare Bijektion ist, wobei wir H_2 als linearen Teilraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ betrachten. Setzen wir $(f,g) := (\phi^{-1} f, \phi^{-1} g)_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ für $f(z) = \sum a_n z^n, g(z) = \sum b_n z^n$, so wird H_2 zu einem Hilbertraum. Für $w \in \mathbb{D}$ gilt nun

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \frac{1}{1-\overline{w}z} \right),$$

wobei wegen $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^{2n} = \frac{1}{1-|w|^2} < \infty$ die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1-\overline{w}z}$ in H_2 liegt. Insbesondere ist $f \mapsto f(w)$ stetig auf H_2, wodurch sich H_2 als RKHS herausstellt. Dabei gilt offensichtlich $k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}$, und die Kernfunktion ist $K(z,w) = (k_w, k_z) = k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}$.

3.2 Erzeugung von kernreproduzierenden Hilberträumen

Satz 3.2.1. *Für $\Omega \neq \emptyset$ sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die* (3.1) *und* (3.2) *erfüllt. Dann existiert genau ein kernreproduzierender Hilbertraum H mit zugehöriger Kernfunktion K.*

Beweis. Die Menge

$$Y := \{\phi : \Omega \to \mathbb{C} \ : \ \phi(t) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } t \in \Omega\}$$

bildet einen linearen Teilraum von $\mathbb{C}^{\Omega}$. Zu $t \in \Omega$ definiere $\delta_t(x) = \delta_{t,x}$; also

$$\delta_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls} & x \neq t \\ 1 & \text{, falls} & x = t \end{cases} .$$

Wegen $\phi(x) = \sum_{t\in\Omega,\phi(t)\neq 0} \phi(t)\delta_t(x)$ für $\phi \in Y$ stimmt die lineare Hülle der δ_t mit Y überein. Für $\phi, \psi \in Y$ setzen wir

$$(\phi, \psi) := \sum_{t,s\in\Omega} \phi(t)\, \overline{\psi(s)}\, K(s,t)\,.$$

Da die Funktionen aus Y nur an endlich vielen Punkten aus Ω nicht verschwinden, ist diese Summe wohldefiniert. Außerdem überprüfen wir leicht mit Hilfe von (3.1), dass $(.,.)$ eine hermitesche Sesquilinearform auf Y ist. Seien $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ jene Punkte, wo ein gegebenes $\phi \in Y$ nicht verschwindet. Dann gilt wegen (3.2)

$$\begin{aligned}(\phi, \phi) &= \sum_{t,s\in\Omega} \phi(t)\overline{\phi(s)}K(s,t) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \phi(x_j)\overline{\phi(x_i)}K(x_i, x_j) \geq 0\,.\end{aligned}$$

Also ist $(.,.)$ eine hermitesche, positiv semidefinite Sesquilinearform. Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, aus der folgt, dass der *isotrope* Teil $Y^\circ := \{\phi \in Y : (\phi, \phi) = 0\}$ mit $Y^\perp = \{\phi \in Y : (\phi, \psi) = 0 \text{ für alle } \psi \in Y\}$ übereinstimmt, und daher ein linearer Unterraum von Y ist. Auf dem Faktorraum Y/Y° ist durch

$$(\phi + Y^\circ, \psi + Y^\circ) := (\phi, \psi)$$

ein Skalarprodukt – also eine hermitesche, positiv definite Sesquilinearform – wohldefiniert. Somit kann $(Y/Y^\circ, (.,.))$ zu einem Hilbertraum $(\widehat{Y}, (.,.))$ vervollständigt werden. Die lineare Hülle der $[\delta_t] = \delta_t + Y^\circ,\ t \in \Omega$, stimmt mit Y/Y° überein und liegt daher dicht in $\widehat{Y}$.
Für $\tilde{f} \in \widehat{Y}$ setzen wir $f(t) := (\tilde{f}, [\delta_t]),\ t \in \Omega$. Die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \widehat{Y} & \to & \mathbb{C}^\Omega \\ \tilde{f} & \mapsto & (t \mapsto f(t)) \end{cases}$$

ist wegen der Linearität von $(.,.)$ im ersten Argument linear. Φ ist auch injektiv. Aus $\Phi(\tilde{f}) = 0$ folgt nämlich $f(t) = (\tilde{f}, [\delta_t]) = 0$ für alle $t \in \Omega$, woraus sich $\tilde{f} \perp Y/Y^\circ$ und damit $\tilde{f} = 0$ ergibt.
Wir setzen $H := \Phi(\widehat{Y})$ und versehen H mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_H := (\Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g))\,.$$

Offenbar erhalten wir damit einen Hilbertraum. Dieser ist sogar kernreproduzierend, denn die Punktauswertung erfüllt für ein $f \in H$ mit $\tilde{f} = \Phi^{-1}(f)$

$$f(t) = (\tilde{f}, [\delta_t]) = \big(f, \Phi([\delta_t])\big)_H,\ t \in \Omega,$$

und ist somit stetig bzgl. $(.,.)_H$. Bezüglich der zu H gehörigen Kernfunktion K_H und dem ursprünglichen K gilt

$$K_H(x,y) := \big(\Phi([\delta_y]), \Phi([\delta_x])\big)_H = (\delta_y, \delta_x) = \sum_{s,t\in\Omega} \delta_y(t)\overline{\delta_x(s)}K(s,t) = K(x,y).$$

Damit ist die Existenz eines RKHS H mit Kern K gezeigt.

Für die Eindeutigkeit seien $H \leq \mathbb{C}^\Omega$ und $\widetilde{H} \leq \mathbb{C}^\Omega$ beides RKHS auf Ω mit Kernfunktion K. Für $t \in \Omega$ seien k_t und $\widetilde{k_t}$ jene Elemente aus H bzw. $\widetilde{H}$, die $f(t) = (f, k_t)$ bzw. $\tilde{f}(t) = (\tilde{f}, \widetilde{k_t})$ für alle $f \in H$ und $\tilde{f} \in \widetilde{H}$ erfüllen. Nach Voraussetzung gilt

$$(\widetilde{k_y}, \widetilde{k_x}) = K(x, y) = (k_y, k_x) ,$$

woraus leicht

$$(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \widetilde{k_{x_n}}, \sum_{n=1}^{M} \mu_n \widetilde{k_{y_n}}) = (\sum_{n=1}^{N} \lambda_n k_{x_n}, \sum_{n=1}^{M} \mu_n k_{y_n}) \tag{3.5}$$

für alle $N, M \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N$, $y_1, \ldots, y_M \in \Omega$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\mu_1, \ldots, \mu_M \in \mathbb{C}$ folgt. Gilt $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n k_{x_n} = \sum_{n=1}^{M} \mu_n k_{y_n}$ als Elemente von H und wenden wir (3.5) auf die Differenz dieser Ausdrücke an, so folgt $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \widetilde{k_{x_n}} = \sum_{n=1}^{M} \mu_n \widetilde{k_{y_n}}$.
Insbesondere ist die Abbildung

$$V : \begin{cases} \operatorname{span}\{k_t : t \in \Omega\} & \to & \operatorname{span}\{\widetilde{k_t} : t \in \Omega\} \\ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n k_{t_n} & \mapsto & \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \widetilde{k_{t_n}} \end{cases}$$

wohldefiniert und offenbar linear. Wegen (3.5) ist V isometrisch. Außerdem sind gemäß Lemma 3.1.3 sowohl Definitionsbereich als auch Bild dicht in H bzw. $\widetilde{H}$. Die eindeutige beschränkte, lineare Fortsetzung $U : H \to \widetilde{H}$ ist daher unitär; siehe Satz 2.5.2 in [4]. Für jedes $f \in H$ und alle $t \in \Omega$ ergibt sich dann

$$f(t) = (f, k_t)_H = (U(f), U(k_t))_{\widetilde{H}} = (U(f), \widetilde{k_t})_{\widetilde{H}} = (U(f))(t) .$$

Also gilt $U(f) = f$ und damit $H = \widetilde{H}$. ■

Lemma 3.2.2. *Sei Ω eine nichtleere Menge und H ein RKHS auf Ω. Sei K die Kernfunktion von H und $A \subseteq \Omega$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) Für alle $f \in H$ gilt f ist auf A beschränkt, d.h. $|f(t)| \leq C_f \ \forall t \in A$.

(ii) Die Abbildung $t \mapsto K(t, t)$ ist beschränkt auf A.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Für $f \in H$, $t \in A$, gilt

$$|f(t)| = |(f, k_t)| \leq \|f\| \cdot \|k_t\| = \|f\| \cdot \sqrt{(k_t, k_t)} = \|f\| \cdot \sqrt{K(t, t)} .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Alle $f \in H$ seien beschränkt auf A. Betrachte $\{k_t : t \in A\} \subseteq H$ vermöge der Riesz-Fischer Identifikation von H und H' als Menge von stetigen, linearen Funktionalen $(f \mapsto (f, k_t))$ auf H; vgl. Proposition 3.2.5 in [4]. Für beliebiges $f \in H$ gilt $|(f, k_t)| = |f(t)| \leq C_f$. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, Korollar 4.2.2 in [4], existiert daher eine gemeinsame Konstante $C > 0$, sodass $\|f \mapsto (f, k_t)\| \leq C$ für alle $t \in A$ gilt. Nach der Isometrie laut Riesz-Fischer und über den Zusammenhang von Norm und Skalarprodukt folgt aber $\|f \mapsto (f, k_t)\| = \|k_t\| = \sqrt{K(t, t)}$. Also ist die Kernfunktion auf A beschränkt. ■

Lemma 3.2.3. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem RKHS H auf Ω und sei $f \in H$.*

- *Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $f \in H$ konvergiert, dh. $(f_n, g) \to (f, g)$ für alle $g \in H$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f auf Ω, dh. $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

- *Falls* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in der Hilbertraumnorm gegen* $f \in H$ *konvergiert, so konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *als Funktionenfolge gleichmäßig auf jeder Teilmenge* $A \subseteq \Omega$ *mit* $\sup_{t\in A} K(t,t) < +\infty$ *gegen* f.

Entsprechendes gilt für Netze auf H.

Beweis.

- Wähle für g in der Voraussetzung das zu $x \in \Omega$ zugehörige k_x. Dann folgt $f_n(x) = (f_n, k_x) \to (f, k_x) = f(x)$.
- Mit Cauchy-Schwarz und wegen $K(t,t) \leq C_A < +\infty,\ t \in A$, folgt

  $$\sup_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in A} |(f_n - f, k_t)| \leq \sup_{t\in A} \|f_n - f\| \cdot \sqrt{K(t,t)} \leq \sqrt{C_A} \cdot \|f_n - f\|\ ,$$

  und damit die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gegen f.

$\blacksquare$

Kapitel 4

Lineare Relationen

In vielen Problemen der Analysis treten lineare Abbildungen T auf einem Raum X in einen Raum Y – meist Banachräume – auf, die nicht auf ganz X, aber auf einem meist dichten linearen Teilraum $\operatorname{dom} T$ von X definiert sind. Von besonderem Interesse sind dabei solche T, die abgeschlossen sind, dh. Abbildungen T, für die der Graph als Teilraum von $X \times Y$ abgeschlossen ist.
Es liegt also nahe, lineare Teilräume von $X \times Y$ – sogenannte lineare Relationen – zu studieren. Dieser auf den ersten Blick kompliziertere Zugang ergibt schlussendlich ein runderes Bild, als wenn man nur partiell definierte lineare Funktionen studiert.

4.1 Grundlagen

Sind X, Y Vektorräume, dann benutzen wir für Elemente aus dem kartesischen Produkt $X \times Y$ die Schreibweise $(f; g) \in X \times Y$, wobei $f \in X, g \in Y$. Manchmal verwenden wir der Übersichtlichkeit halber auch die Schreibweise $\binom{f}{g}$ für solche Paare.

Definition 4.1.1. T heißt *lineare Relation* zwischen X und Y, falls T ein linearer Unterraum von $X \times Y$ ist, dh. $T \leq X \times Y$.
Sind X und Y topologische Vektorräume[1] so sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Ist $T \leq X \times Y$ dann abgeschlossen, so spricht man von einer abgeschlossenen linearen Relation. Weiters bezeichne $\overline{T}$ den Abschluss von $T \leq X \times Y$.

Definition 4.1.2. Analog zu linearen Abbildungen bzw. Operatoren definiert man für Vektorräume X, Y und eine lineare Relation T zwischen X und Y

(i) den *Domain* oder *Definitionsbereich*
$\operatorname{dom} T := \{x \in X : \exists\, y \in Y : (x; y) \in T\}$,

(ii) den *Range* oder *Bildbereich* $\operatorname{ran}(T) := \{y \in Y : \exists\, x \in X : (x; y) \in T\}$,

(iii) den *Kern* $\ker T := \{x \in X : (x; 0) \in T\}$,

(iv) den *Multi-Valued-Part* oder *Unendlichteil* $\operatorname{mul}(T) := \{y \in Y : (0; y) \in T\}$.

[1] Meistens sind es normierte Räume oder sogar Banachräume.

Bemerkung 4.1.3. Sind X und Y topologische Vektorräume und ist $T \leq X \times Y$ abgeschlossen, so sind $\ker T, \mathrm{mul}(T)$ abgeschlossene Teilräume von X bzw. Y. In der Tat gilt etwa

$$\ker T = \pi_X(T \cap (X \times \{0\}))\,.$$

Dabei ist $T \cap (X \times \{0\})$ ein abgeschlossener Teilraum von $X \times \{0\}$. Die Projektion auf die erste Komponente eingeschränkt auf $X \times \{0\}$ ist aber ein Homöomorphismus von $X \times \{0\}$ auf X. Also ist $\ker T$ abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit von $\mathrm{mul}\, T$ sieht man genauso.

Folgendes Lemma legt nahe, lineare Relationen als mehrwertige Funktionen zu sehen.

Lemma 4.1.4. *Ist $(f; g) \in T$, so gilt $\{h \in Y : (f; h) \in T\} = g + \mathrm{mul}(T)$.*

Beweis. Sind $(f; g)$ und $(f; h) \in T$, so ist $(f - f; h - g) = (0; h - g) \in T$ und daher $h - g \in \mathrm{mul}(T)$. Ist umgekehrt $z \in \mathrm{mul}\, T$, dann ist nach Definition $(0; z) \in T$, und weiter $(f; g + z) = (f; g) + (0; z) \in T$. ■

Bemerkung 4.1.5. Indem man einen linearen Operator T von $M \leq X$ nach Y mit seinem Graph identifiziert, kann man T als lineare Relation betrachten. Umgekehrt ist eine lineare Relation T mit $\mathrm{mul}(T) = \{0\}$ offensichtlich der Graph eines Operators.

Proposition 4.1.6. *Seien X, Y topologische Vektorräume, $M \subseteq X$ ein Teilraum und $B : M \to Y$ linear.*

(*i*) *Sei B stetig. Ist M abgeschlossen, so auch (der Graph von) B.*

(*ii*) *Sei B stetig. Ist X ein normierter Raum und Y sogar ein Banachraum, so ist der Abschluss $\overline{B}$ von B in $X \times Y$ gerade die eindeutige lineare und stetige Fortsetzung von B auf $\overline{M}$, siehe Satz 2.5.2 in [4]. Insbesondere folgt aus der Abgeschlossenheit von B auch die von M.*

(*iii*) *Sind X und Y Banachräume, und sind M und B abgeschlossen, so ist B stetig.*

Beweis.

(*i*) Konvergiert das Netz $((x_i; Bx_i))_{i \in I}$ in $B \subseteq X \times Y$ gegen $(x; y)$, so heißt das $x_i \to x$ und $Bx_i \to y$. Ist M abgeschlossen, so folgt $x \in M = \mathrm{dom}(B)$, und wegen der Stetigkeit von B weiter, dass $Bx_i \to Bx$. Die Eindeutigkeit des Grenzwertes zeigt $y = Bx$. Also ist $(x; y)$ im Graph von B und dieser somit abgeschlossen.

(*ii*) Sei $C : \overline{M} \to Y$ die eindeutige lineare und stetige Fortsetzung von B auf den abgeschlossenen Unterraum $\overline{M} \subseteq X$. Wegen dem ersten Teil folgt $\overline{B} \subseteq C$.

Ist $x \in \overline{M}$ und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in M mit $x_i \to x$, so folgt $Bx_i = Cx_i \to Cx$ und weiter $(x_i; Bx_i) \to (x; Cx)$, also $(x; Cx) \in \overline{B}$. Es gilt somit $\overline{B} = C$.

(*iii*) Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 4.4.2 in [4].

■

Definition 4.1.7. Sind X, Y, Z Vektorräume, $S, T \leq X \times Y, R \leq Y \times Z$, und $\alpha \in \mathbb{C}$, so definiert man

(i) $S + T := \{(f; g) \in X \times Y : \exists\, h, k \in Y : g = h + k,\ (f; h) \in S,\ (f; k) \in T\}$

(ii) $\alpha T := \{(f; \alpha g) \in X \times Y : (f; g) \in T\}$

(iii) $T^{-1} := \{(g; f) \in Y \times X : (f; g) \in T\}$ und

(iv) $RS := \{(f; k) \in X \times Z : \exists\, g \in Y : (f; g) \in S \wedge (g; k) \in R\}$

Man überprüft unmittelbar, dass mit R, S, T auch $S + T, \alpha T, T^{-1}, RS$ lineare Relationen sind. Es gilt dabei

$$S + (T + Q) = (S + T) + Q = S + T + Q :=$$
$$\{(f; g) \in X \times Y : \exists\, h, k, j \in Y : g = h + k + j,\ (f; h) \in S,\ (f; k) \in T,\ (f; j) \in Q\},$$

wobei $Q, S, T \leq X \times Y$. Außerdem überzeugt man sich leicht, dass

$$P(RS) = (PR)S \quad \text{und} \quad (RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1},$$

wenn noch $P \leq Z \times V$ für einen Vektorraum V. Diese Sachverhalte gelten übrigens allgemein für Relationen zwischen Mengen.

Bemerkung 4.1.8. Man sieht unmittelbar, dass $\operatorname{dom} T^{-1} = \operatorname{ran} T, \operatorname{ran}(T^{-1}) = \operatorname{dom} T$ und $\operatorname{mul} T^{-1} = \ker T$, $\ker T^{-1} = \operatorname{mul} T$. Insbesondere ist T^{-1} genau dann ein Operator, wenn $\ker T = \{0\}$.
Sind R, S, T Operatoren,

- $\rightsquigarrow$ so ist αT die übliche Multiplikation einer linearen Abbildung mit einem Skalar.
- $\rightsquigarrow$ $S + T$ ist eine lineare Abbildung von $\operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ nach Y und stimmt dort mit der punktweisen Addition von S und T überein.
- $\rightsquigarrow$ RS ist eine lineare Abbildung von $\{f \in \operatorname{dom} S : Sf \in \operatorname{dom} R\}$ nach Z und stimmt dort mit der üblichen Hintereinanderausführung zweier Funktionen überein.

Ist S ein Operator und T eine lineare Relation, so gilt

$$T + S := \{(f; g + Sf) \in X \times Y : \exists\, g \in Y : (f; g) \in T,\ f \in \operatorname{dom} S\}\ .$$

Ist $X = Y$ und I der Identitätsoperator auf X, so gilt ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$T + \alpha I := \{(f; g + \alpha f) \in X \times X : \exists\, g \in X : (f; g) \in T\}\ .$$

Wir schreiben auch $T + \alpha$ kurz für $T + \alpha I$.

Bemerkung 4.1.9. Seien X, Y, V, W Vektorräume. Lineare Abbildungen

$$\tau : X \times Y \to V \times W$$

lassen sich übersichtlich in Blockoperatorform darstellen. Dazu setzen wir

$$\tau_{11} := \pi_V \circ \tau \circ \iota_X : X \to V\,,\ \tau_{21} := \pi_W \circ \tau \circ \iota_X : X \to W\,,$$

$$\tau_{12} := \pi_V \circ \tau \circ \iota_Y : Y \to V\,,\ \tau_{22} := \pi_W \circ \tau \circ \iota_Y : Y \to W\,,$$

wobei $\iota_X : X \to X \times Y$ die Einbettung $x \mapsto (x; 0)$ und $\iota_Y : Y \to X \times Y$ die Einbettung $y \mapsto (0; y)$ ist.
Schreiben wir die Elemente von $X \times Y$ bzw. $V \times W$ als 2-Vektoren, dh. $(f; g) = \binom{f}{g}$, so wirkt τ auf $\binom{f}{g}$ wie eine Matrix-Vektor Multiplikation:

$$\tau((f; g)) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}(f) + \tau_{12}(g) \\ \tau_{21}(f) + \tau_{22}(g) \end{pmatrix}.$$

Seien X und Y topologische Vektorräume und $X \times Y$ sowie $V \times W$ mit der Produkttopologie, dh. initialen Topologie bzgl. π_X, π_Y bzw. π_V, π_W, versehen. Dann ist $\tau : X \times Y \to V \times W$ genau dann stetig, wenn $\pi_V \circ \tau : X \times Y \to V$ und $\pi_W \circ \tau : X \times Y \to W$ stetig sind. Wegen $\pi_V \circ \tau = \tau_{11} \circ \pi_X + \tau_{12} \circ \pi_Y$ und $\pi_W \circ \tau = \tau_{21} \circ \pi_X + \tau_{22} \circ \pi_Y$ ist das wiederum äquivalent dazu, dass alle τ_{ij} stetig sind.
Ist τ stetig und sogar invertierbar mit einer stetigen Inversen $\tau^{-1} : V \times W \to X \times Y$, so ist τ ein Homöomorphismus. Also gilt $\tau(\overline{T}) = \overline{\tau(T)}$ für $T \subseteq X \times Y$ und dass $\tau(T)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn T es ist.

Bemerkung 4.1.10. Seien nun X, Y Vektorräume, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $B : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Definieren wir die linearen Abbildungen (vgl. Bemerkung 4.1.9)

$$\tau_\alpha : \begin{cases} X \times Y \to X \times Y \\ (f; g) \mapsto (f; \alpha g) \end{cases} \quad \text{und} \quad \tau_B : \begin{cases} X \times Y \to X \times Y \\ (f; g) \mapsto (f; g + Bf) \end{cases}$$

$$\tau_{X \leftrightarrows Y} : \begin{cases} X \times Y \to Y \times X \\ (f; g) \mapsto (g; f) \end{cases},$$

so prüft man leicht nach, dass diese bijektiv sind, wobei ihre Inversen nichts anderes als die Abbildungen $\tau_{\frac{1}{\alpha}}, \tau_{-B}, \tau_{Y \leftrightarrows X}$ sind.
Sind X, Y topologische Vektorräume und B stetig, dann sind alle erwähnten Abbildungen und daher auch ihre jeweiligen Inversen stetig wie man aus Bemerkung 4.1.9 sofort erkennt. Also sind $\tau_\alpha, \tau_B, \tau_{X \leftrightarrows Y}$ sogar Homöomorphismen.
Was diese Abbildungen so interessant macht, ist die Tatsache, dass für eine lineare Relation $T \leq X \times Y$ gilt, dass

$$\tau_\alpha(T) = \alpha T, \tau_B(T) = T + B, \tau_{X \leftrightarrows Y}(T) = T^{-1}\,.$$

Korollar 4.1.11. *Seien nun X, Y Vektorräume. Ist $T \leq X \times Y$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und B eine lineare (überall definierte) Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

$$(T + B) + (-B) = T, \ \ \frac{1}{\alpha}(\alpha T) = T, \ \ (T^{-1})^{-1} = T\,.$$

Sind X, Y topologische Vektorräume und B stetig, dann gilt $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$, $\overline{\alpha T} = \alpha \overline{T}$ sowie $\overline{T + B} = \overline{T} + B$. Insbesondere sind mit T auch $T^{-1}, \alpha T, T + B$ abgeschlossen.

Beweis. Mit der Notation aus Bemerkung 4.1.10 gilt

$$(T + B) + (-B) = \tau_{-B}(T + B) = \tau_{-B}(\tau_B(T)) = T\,,$$

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha T) = \tau_{\frac{1}{\alpha}}(\tau_\alpha(T)) = T, \quad (T^{-1})^{-1} = \tau_{Y \leftrightarrows X}(\tau_{X \leftrightarrows Y}(T)) = T\,.$$

Sind X, Y topologische Vektorräume und B stetig, so sind $\tau_\alpha, \tau_B, \tau_{X \leftrightarrows Y}$ Homöomorphismen, woraus wegen $\tau_\alpha(T) = \alpha T, \tau_B(T) = T + B, \tau_{X \leftrightarrows Y}(T) = T^{-1}$ die letzten Behauptungen des Lemmas folgen. ■

4.2 Der Relationenkalkül und die Resolvente

Um wie für lineare Operatoren Resolvente und Spektrum zu studieren, führen wir folgenden Kalkül ein.

Definition 4.2.1. Sei X ein Vektorraum. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sei $\tau_M : X^2 \to X^2$ definiert als

$$\tau_M(f; g) = (\delta f + \gamma g; \beta f + \alpha g)\,.$$

Fakta 4.2.2.

1. Offensichtlich ist τ_M ein linearer Operator von X^2 nach X^2. Schreibt man die Elemente von X^2 als 2-Vektoren, dh. $(f; g) = \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)$, so wirkt τ_M wie folgt (siehe Bemerkung 4.1.9)

$$\tau_M \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta I & \gamma I \\ \beta I & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta f + \gamma g \\ \beta f + \alpha g \end{pmatrix}.$$

Für zwei Matrizen $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right), N = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ folgt sofort

$$\tau_N \circ \tau_M \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \tau_N \begin{pmatrix} \delta f + \gamma g \\ \beta f + \alpha g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\delta f + \gamma g) + c(\beta f + \alpha g) \\ b(\delta f + \gamma g) + a(\beta f + \alpha g \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (d\delta + c\beta) f + (d\gamma + c\alpha) g \\ (b\delta + a\beta) f + (b\gamma + a\alpha) g \end{pmatrix} = \tau_{NM} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

dh. $\tau_N \circ \tau_M = \tau_{NM}$. Ist insbesondere $\det M \neq 0$, so gilt

$$\tau_{M^{-1}} = (\tau_M)^{-1}\,. \tag{4.2}$$

Ist X ein topologischer Vektorraum, so ist τ_M offensichtlich stetig und im Fall $\det M \neq 0$ sogar ein Homöomorphismus, siehe Bemerkung 4.1.9.

2. Wir betrachten nun für lineare Relationen T auf einem Vektorraum X, dh. $T \leq X^2 = X \times X$, und für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ das Bild $\tau_M(T)$ von T unter der Abbildung τ_M. Offensichtlich ist $\tau_M(T)$ ebenfalls eine lineare Relation auf einem Vektorraum X mit

$$\mathrm{dom}(\tau_M(T)) = \{\delta f + \gamma g : (f; g) \in T\}, \ \mathrm{ran}(\tau_M(T)) = \{\beta f + \alpha g : (f; g) \in T\}\,.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, gilt $\tau_{\lambda M} = \lambda \tau_M$, und daher ist

$$\tau_{\lambda M}(T) = (\lambda \tau_M)(T) = \tau_M(T)\,. \tag{4.3}$$

Ist X ein topologischer Vektorraum, so gilt im Fall $\det M \neq 0$, dass τ_M und seine Inverse $(\tau_M)^{-1} = \tau_{M^{-1}}$ stetig sind. Also gilt $\tau_M\left(\overline{T}\right) = \overline{\tau_M(T)}$. Insbesondere ist $\tau_M(T)$ genau dann abgeschlossen, wenn T es ist, siehe Bemerkung 4.1.9.

3. Aus Bemerkung 4.1.10 folgt für $T \leq X \times X$ sofort

$$T^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(T), \quad \lambda T = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T), \quad (\mu + T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T).$$

Wegen (4.3) gilt

$$\tau_{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)}(T) = T, \ \lambda \neq 0, \tag{4.4}$$

und wegen (4.1) folgt nacheinander

$$(s + tT) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T), \tag{4.5}$$

$$(T - \mu)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(T), \tag{4.6}$$

$$I + (\lambda - \mu)(T - \lambda)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} (\lambda-\mu) & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(T). \tag{4.7}$$

$$s + t(T - r)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -r \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} s & t-rs \\ 1 & -r \end{smallmatrix}\right)}(T). \tag{4.8}$$

4. Für $T \leq X \times X$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbb{C})$ gilt im Fall $\gamma \neq 0$ nach (4.8) mit $s = \frac{\alpha}{\gamma}, r = -\frac{\delta}{\gamma}, t - rs = \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\delta}{\gamma^2}$

$$\tau_{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & \frac{\beta}{\gamma} \\ 1 & \frac{\delta}{\gamma} \end{smallmatrix}\right)}(T) = \frac{\alpha}{\gamma} + (\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2})(T + \frac{\delta}{\gamma})^{-1} \tag{4.9}$$

und im Fall $\gamma = 0$, womit $\delta \neq 0$ und $\alpha \neq 0$, nach (4.5) mit $s = \frac{\beta}{\delta}, t = \frac{\alpha}{\delta}$

$$\tau_{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{\alpha}{\delta} & \frac{\beta}{\delta} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(T) = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}T \tag{4.10}$$

Bemerkung 4.2.3. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbb{C})$ wird durch

$$\phi_M(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

eine Möbius Transformation definiert. Die Abbildung ϕ_M ist eine Bijektion von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich. Dabei ist $\phi_M(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$ und $\phi_M(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$. Beachte, dass dabei die Fälle $\alpha = \gamma = 0$ oder $\gamma = \delta = 0$ sowie $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ wegen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ nicht auftreten können. Sei weiters $N \in GL(2, \mathbb{C})$, dann gilt

$$\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN} \quad \text{und} \quad \phi_M^{-1} = \phi_{M^{-1}}.$$

Proposition 4.2.4. *Sei T eine lineare Relation auf X, $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit* $\det M \neq 0$. *Sei $r \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\lambda = \phi_M(r) = \frac{r\alpha+\beta}{r\gamma+\delta}$. Dann gibt es Konstanten $t, s \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, sodass im Falle $r \neq -\frac{\delta}{\gamma}$, dh. $\lambda \neq \infty$,*

$$(\tau_M(T) - \lambda)^{-1} = \begin{cases} t(T - r)^{-1} + sI & r \neq \infty \\ tT + sI & r = \infty \end{cases} \tag{4.11}$$

und im Fall $r = -\frac{\delta}{\gamma}$, dh. $\lambda = \infty$,

$$\tau_M(T) = \begin{cases} t(T - r)^{-1} + sI & \gamma \neq 0 \ (\Leftrightarrow r \neq \infty) \\ tT + sI & \gamma = 0 \ (\Leftrightarrow r = \infty) \end{cases}. \tag{4.12}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $r \neq -\frac{\delta}{\gamma}$, was zu $\lambda \neq \infty$ äquivalent ist. Gemäß (4.6) und (4.1) gilt

$$(\tau_M(T) - \lambda)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) M}(T) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha-\lambda\gamma & \beta-\lambda\delta \end{smallmatrix}\right)}(T) \,. \tag{4.13}$$

Ist $r \neq \infty$, dh. $\lambda \neq \frac{\alpha}{\gamma}$, so stimmt das wegen (4.9) überein mit

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha - \lambda\gamma} + \frac{\delta(\alpha - \lambda\gamma) - \gamma(\beta - \lambda\delta)}{(\alpha - \lambda\gamma)^2}(T + \frac{\beta - \lambda\delta}{\alpha - \lambda\gamma})^{-1} &= \frac{\gamma}{\alpha - \lambda\gamma} + \frac{\det M}{(\alpha - \lambda\gamma)^2}(T - \frac{-\beta + \lambda\delta}{\alpha - \lambda\gamma})^{-1} \\ &= \frac{\gamma}{\alpha - \lambda\gamma} + \frac{\det M}{(\alpha - \lambda\gamma)^2}(T - r)^{-1} \,, \end{aligned}$$

wobei hier wegen $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\left(\begin{smallmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ die Gleichheit $\phi_{\left(\begin{smallmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{smallmatrix}\right)}(\phi_M(r)) = \phi_{(\det M)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(r) = r$ eingegangen ist.
Im Fall $\lambda \neq \infty$ und $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$ muss insbesondere $\gamma \neq 0$ sein. Aus (4.13) folgt nach (4.10)

$$(\tau_M(T) - \lambda)^{-1} = (\frac{\delta}{\beta - \lambda\delta} + \frac{\gamma}{\beta - \lambda\delta}T) = \frac{\delta}{\beta - \lambda\delta} + \frac{\gamma^2}{\beta\gamma - \alpha\delta}T \,.$$

Im Fall $r = -\frac{\delta}{\gamma}$ und $\gamma \neq 0$ gilt wegen (4.9)

$$\tau_M(T) = \frac{\alpha}{\gamma} + (\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2})(T - r)^{-1}$$

und im Fall $r = -\frac{\delta}{\gamma}$ und $\gamma = 0$, was wegen $\det M \neq 0$ auch $\delta \neq 0 \neq \alpha$ nach sich zieht, gemäß (4.10)

$$\tau_M(T) = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}T \,.$$

∎

Bemerkung 4.2.5. Schreibt man für eine beliebige lineare Relation R auch $(R - \infty)^{-1}$, so lassen sich die Gleichungen (4.11), (4.12) kompakter schreiben:

$$(\tau_M(T) - \phi_M(r))^{-1} = t(T - r)^{-1} + sI$$

für gewisse $s, t \neq 0 \in \mathbb{C}$. Betrachtet man die jeweiligen Definitionsbereiche, so folgt daraus

$$\operatorname{ran}(\tau_M(T) - \phi_M(r)) = \operatorname{ran}(T - r) \,, \tag{4.14}$$

wenn man $\operatorname{ran}(R - \infty) := \operatorname{dom}(R)$ setzt.

Wenn nichts anderes gesagt ist, dann sei X ab jetzt immer ein Banachraum.

Definition 4.2.6. Ist $T \leq X \times X$ eine lineare Relation, so ist

- $\rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : (T - \lambda)^{-1} \in L_b(X)\right\}$ die *Resolventenmenge*,
- $\sigma(T) = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \rho(T)$ das *Spektrum*,
- $r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : (T - \lambda)^{-1} \in L_b(\operatorname{ran}(T - \lambda), X)\right\}$ die Menge der *Punkte regulären Typs*,

wobei $(T-\infty)^{-1} := T$ und $\operatorname{ran}(T-\infty) = \operatorname{dom}(T)$. Im Folgenden schreiben wir für $(T-\lambda)^{-1}$ auch oft kürzer $R(\lambda)$.

Klarerweise ist immer $\rho(T) \subseteq r(T)$. Außerdem folgt mit unserer Übereinkunft bzgl. des Punktes ∞, dass $\infty \in \rho(T)$ genau dann, wenn $T \in L_b(X)$, und dass $\infty \in r(T)$ genau dann, wenn $T \in L_b(\operatorname{dom} T, X)$.

Bemerkung 4.2.7. Ist $R \subseteq X \times Y$ eine abgeschlossene lineare Relation zwischen den Banachräumen X und Y, so ist wegen Proposition 4.1.6 die Tatsache, dass R ein beschränkter linearer Operator von einem linearen Unterraum M von X nach Y ist, äquivalent dazu, dass $\operatorname{mul} R = \{0\}$ und dass $M = \operatorname{dom} R$ abgeschlossen ist.
Auf $R = (T-\lambda)^{-1}$ angewandt folgt somit für ein abgeschlossenes T

$$\lambda \in r(T) \Leftrightarrow \ker(T-\lambda) = \{0\}\,,\ \ \operatorname{ran}(T-\lambda) = \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)}\,,$$
$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \ker(T-\lambda) = \{0\}\,,\ \ \operatorname{ran}(T-\lambda) = X\,.$$

Bemerkung 4.2.8. Wegen Korollar 4.1.11 gilt immer $(\overline{T}-\lambda)^{-1} = \overline{(T-\lambda)^{-1}}$. Ist $\lambda \in r(\overline{T})$, so ist $(\overline{T}-\lambda)^{-1}$ eine beschränkte Abbildung und daher auch ihre Einschränkung $(T-\lambda)^{-1}$, also $\lambda \in r(T)$.
Ist umgekehrt $\lambda \in r(T)$, so ist nach Proposition 4.1.6 $(\overline{T}-\lambda)^{-1} = \overline{(T-\lambda)^{-1}}$ die eindeutige lineare und stetige Fortsetzung des Operators $(T-\lambda)^{-1}$ von $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ auf $\overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)}$, dh. $\lambda \in r(\overline{T})$ und

$$\overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = \operatorname{dom}(\overline{T}-\lambda)^{-1} = \operatorname{ran}(\overline{T}-\lambda)\,.$$

Wir haben also immer $r(T) = r(\overline{T})$.

Korollar 4.2.9. *Sei T eine lineare Relation auf X, $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det M \neq 0$. Dann gilt $r(\tau_M(T)) = \phi_M(r(T))$, $\rho(\tau_M(T)) = \phi_M(\rho(T))$, $\sigma(\tau_M(T)) = \phi_M(\sigma(T))$.*

Beweis. Ist $\lambda = \phi_M(r)$, $r \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ so folgt aus Proposition 4.2.4 bzw. Bemerkung 4.2.5 sofort, dass $(\tau_M(T)-\lambda)^{-1}$ genau dann ein beschränkter (beschränkter und überall definierter) Operator ist, wenn $(T-r)^{-1}$ ein beschränkter (beschränkter und überall definierter) Operator ist. Also $r(\tau_M(T)) = \phi_M(r(T))$ und $\rho(\tau_M(T)) = \phi_M(\rho(T))$. Die Aussage über das Spektrum folgt, da dieses genau das Komplement der Resolventenmenge ist, und da $\phi_M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bijektiv ist. ∎

Nimmt man zum Beispiel $M = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, so folgt $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{z} : z \in \sigma(T)\}$.

Definition 4.2.10. Das Spektrum einer abgeschlossenen Relation T spalten wir auf in

- das *Punktspektrum*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T-\lambda) \neq \{0\}\}\,,$$

- das *kontinuierliches Spektrum*

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T-\lambda) = \{0\},\ \operatorname{ran}(T-\lambda) \neq X,\ \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = X\}\,,$$

- das *Residualspektrum*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T-\lambda) = \{0\},\ \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} \neq X\}\,,$$

wobei $\ker(T-\infty) := \operatorname{mul} T$.

Bemerkung 4.2.11. Mit Bemerkung 4.2.7 erkennt man unmittelbar, dass

$$\sigma(T) = \sigma_p(T)\dot{\cup}\sigma_c(T)\dot{\cup}\sigma_r(T)\,.$$

Bezüglich des Relationenprodukts gilt:

Lemma 4.2.12. *Seien $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right), N = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und T eine lineare Relation auf X mit $(a,b) = (\gamma,\delta)$. Dann gilt für das Relationenprodukt von $\tau_M(T)$ und $\tau_N(T)$*

$$\begin{aligned}\tau_M(T)\cdot\tau_N(T) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}(T) \boxplus (\{0\}\times \operatorname{mul}\tau_M(T))\\ &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}(T) \boxplus (\ker\tau_N(T)\times\{0\})\,,\end{aligned}$$

wobei $\boxplus$ hier die Summe zweier linearer Unterräume von X^2 bezeichnet.

Beweis. Die Elemente von $\tau_N(T)$ sind von der Form

$$(df_1 + cg_1; bf_1 + ag_1),\quad (f_1; g_1) \in T\,, \tag{4.15}$$

und wegen $a = \gamma, b = \delta$ die von $\tau_M(T)$

$$(bf_2 + ag_2; \beta f_2 + \alpha g_2),\quad (f_2; g_2) \in T\,. \tag{4.16}$$

Ist $(f_1; g_1) = (f_2; g_2)$, so folgt sofort, dass alle Elemente der Form

$$(df_1 + cg_1; \beta f_1 + \alpha g_1),\quad (f_1; g_1) \in T\,,$$

in $\tau_M(T)\cdot\tau_N(T)$ liegen. Also $\tau_{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}(T) \subseteq \tau_M(T)\cdot\tau_N(T)$.
Ist $h \in \operatorname{mul}\tau_M(T)$, so muss $h = \beta f_2 + \alpha g_2$ für $(f_2; g_2) \in T$, wobei $bf_2 + ag_2 = 0$. Mit $(f_1; g_1) = (0; 0)$ folgt aus (4.15) und (4.16), dass $(0; h) = (0; \beta f_2 + \alpha g_2) \in \tau_M(T)\cdot\tau_N(T)$. Damit haben wir gezeigt, dass
$\tau_{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}(T) \boxplus (\{0\}\times\operatorname{mul}\tau_M(T))$ in $\tau_M(T)\cdot\tau_N(T)$ enthalten ist.

Ist umgekehrt $(k; m) \in \tau_M(T)\cdot\tau_N(T)$, also $(k; l) \in \tau_N(T)$ und $(l; m) \in \tau_M(T)$, so muss wegen (4.15) und (4.16)

$$(k; l) = (df_1 + cg_1; bf_1 + ag_1),\quad (l; m) = (bf_2 + ag_2; \beta f_2 + \alpha g_2)$$

mit $bf_1 + ag_1 = bf_2 + ag_2$ für gewisse $(f_1; g_1), (f_2; g_2) \in T$. Wieder wegen (4.16) gilt

$$(bf_2 + ag_2; \beta f_2 + \alpha g_2) - (bf_1 + ag_1; \beta f_1 + \alpha g_1) = (0; \beta(f_2 - f_1) + \alpha(g_2 - g_1)) \in \tau_M(T)\,,$$

und daher

$$(k; m) = (df_1 + cg_1; \beta f_2 + \alpha g_2) =$$
$$(df_1 + cg_1; \beta f_1 + \alpha g_1) + (0; \beta(f_2 - f_1) + \alpha(g_2 - g_1)) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}(T) \boxplus (\{0\}\times\operatorname{mul}\tau_M(T))\,.$$

Also gilt auch die umgekehrte Inklusion. Die zweite Gleichheit zeigt man genauso. ■

Proposition 4.2.13. *Für λ, $\mu \in \rho(T)\cap\mathbb{C}$ gilt die* Resolventengleichung

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)\,. \tag{4.17}$$

Insbesondere kommutieren alle $R(\lambda)$ für $\lambda \in \rho(T)\cap\mathbb{C}$.
Die Menge $\rho(T)$ ist offen in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ versehen mit der chordalen Metrik. Für $\lambda \in \rho(T)\cap\mathbb{C}$ gilt genauer $U_{\frac{1}{\|R(\lambda)\|}}(\lambda) \subseteq \rho(T)$.

Beweis. Da insbesondere $R(\mu) = \tau_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}}(T)$ (siehe (4.6)) ein Operator ist, dh. $\operatorname{mul} R(\mu) = \{0\}$, und da $(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \tau_{\begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}}(T)$ (siehe (4.7)), folgt aus Lemma 4.2.12

$$R(\mu) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \tau_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}}(T) \cdot \tau_{\begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}}(T) = \tau_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}}(T) = R(\lambda)\,. \tag{4.18}$$

Da diese Gleichung nur beschränkte lineare Operatoren auf X beinhaltet, folgt (4.17).
Für $\infty \in \rho(T)$ wissen wir aus Lemma 1.1.9, dass immer $K_{\|T\|}(0)^c \subseteq \rho(T)$. Nun ist aber $K_{\|T\|}(0)^c \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞.
Ist $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{C}$, so konvergiert für ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| \cdot \|R(\lambda)\| < 1$ die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\lambda)^n$, womit $(I + (\lambda - \mu)R(\lambda))$ invertierbar in $L_b(X)$ ist, vgl. Lemma 1.1.9. Also gilt folgende Gleichheit linearer Relationen

$$R(\mu) = R(\mu) \cdot I = R(\mu) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda))^{-1}\,. \tag{4.19}$$

Wegen $\ker(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \{0\}$ gilt nach Lemma 4.2.12 wieder (4.18). Somit ist die rechte Seite von (4.19) $R(\lambda) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda))^{-1}$ und daher das Produkt zweier Operatoren aus $L_b(X)$, also selber in $L_b(X)$. ∎

Bemerkung 4.2.14. Wir haben im obigen Beweis gesehen, dass für $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{C}$ und $z \in U_{\frac{1}{\|R(\lambda)\|}}(\lambda)$

$$R(z) = R(\lambda) \cdot (I + (\lambda - z)R(\lambda))^{-1} = R(\lambda) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z - \lambda)^n R(\lambda)^n\,.$$

Somit ist $R(z)$ um jedes $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickelbar, also analytisch bzw. holomorph.

Korollar 4.2.15. *Eine abgeschlossene lineare Relation T auf einem Banachraum X ist ein beschränkter, überall definierter Operator genau dann, wenn* $\operatorname{mul} T = \{0\}$, $\overline{\operatorname{dom} T} = X$, *$\rho(T) \cap \mathbb{C}$ das Komplement einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und* $\sup_{|z| \geq \mu} |z| \cdot \|R(z)\| < +\infty$ *für ein hinreichend großes $\mu > 0$.*

Beweis. Ist T überall definiert und beschränkt, dh. $T \in L_b(X)$, so ist $\rho(T) \cap \mathbb{C}$ wegen Lemma 1.1.10 das Komplement einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$. Aus (1.6) folgt zudem für $0 < |\zeta| < \frac{1}{\|T\|}$

$$\frac{1}{\zeta} R(\frac{1}{\zeta}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n T^n\,.$$

Als Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Konvergenzradius größer Null ist die rechte Seite stetig auf $U_{\frac{1}{\|T\|}}(0)$, womit $|z| \cdot \|R(z)\|$ für $|z| \to +\infty$ sogar konvergiert.
Ist umgekehrt $\rho(T) \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus K_\eta(0)$ für ein hinreichend großes $\eta > 0$, so ist $\zeta \mapsto R(\frac{1}{\zeta})$ holomorph auf $U_{\frac{1}{\eta}}(0) \setminus \{0\}$; vgl. Bemerkung 4.2.14. Wenden wir (4.11) auf $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $r = \frac{1}{\zeta}$, $\lambda = \zeta$ an, so folgt

$$(T^{-1} - \zeta)^{-1} = t(T - \frac{1}{\zeta})^{-1} + sI\,,$$

wobei $s = -\frac{1}{\zeta}$ und $t = -\frac{1}{\zeta^2}$. Aus $\sup_{|z| \geq \mu} |z| \cdot \|R(z)\| < +\infty$ folgt die Beschränktheit von $\zeta(T^{-1} - \zeta)^{-1}$ für $\zeta \in K_{\frac{1}{\mu}}(0) \setminus \{0\}$. Also lässt sich diese Funktion holomorph auf $U_{\frac{1}{\eta}}(0)$

mit Funktionswert $\lim_{\zeta\to 0} -\frac{1}{\zeta}(T-\frac{1}{\zeta})^{-1} - I =: B \in L_b(X)$ für $\zeta = 0$ fortsetzen. Für $(x;y) \in T$ gilt $(x; y - \frac{1}{\zeta}x) \in (T - \frac{1}{\zeta})$, und daher

$$-\frac{1}{\zeta}(T-\frac{1}{\zeta})^{-1}x - x = -\frac{1}{\zeta}(T-\frac{1}{\zeta})^{-1}x - (T-\frac{1}{\zeta})^{-1}(y-\frac{1}{\zeta}x) = -\zeta\frac{1}{\zeta}(T-\frac{1}{\zeta})^{-1}y \to 0 \quad \text{für} \quad \zeta \to 0\,.$$

Wenn $\operatorname{dom} T$ dicht ist, folgt $B = 0$. Insbesondere ist sogar $\zeta \mapsto (T^{-1} - \zeta)^{-1}$ holomorph auf $U_{\frac{1}{\eta}}(0)$ mit Funktionswert $\lim_{\zeta\to 0}(T^{-1} - \zeta)^{-1} =: C \in L_b(X)$ für $\zeta = 0$. Wegen $((T^{-1} - \zeta)^{-1}x; x + \zeta(T^{-1} - \zeta)^{-1}x) \in T^{-1}$ folgt aus der Abgeschlossenheit für $\zeta \to 0$, dass $(x; Cx) \in T$ für jedes $x \in X$; also $C \subseteq T$ und wegen $\operatorname{mul} T = \{0\}$ sogar $C = T$. ∎

Um nachzuprüfen, dass auch $r(T)$ offen ist, brauchen wir einige Hilfsresultate. Betrachten wir kurz den Spezialfall eines Hilbertraumes.

Lemma 4.2.16. *Sei X ein Banachraum und $M \leq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Weiters sei $A : M \to X$ ein beschränkter linearer Operator mit*

$$\|A\| \ (= \sup_{x\in M, \|x\|\leq 1} \|Ax\|) \ < 1\,.$$

Dann ist auch $N := (I + A)(M)$ ein abgeschlossener Teilraum von X, $I + A$ ist auf M injektiv und

$$I + A : M \to N$$

ist bistetig, dh. $I + A : M \to N$ und $(I + A)^{-1} : N \to M$ sind stetig.

Beweis. Zunächst gilt für $x \in M$

$$\|(I + A)x\| = \|x - (-Ax)\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq (1 - \|A\|) \cdot \|x\|\,.$$

Man schließt daraus, dass $(I + A)x = 0 \Rightarrow x = 0$ und daher $\ker(I + A) = \{0\}$. Somit ist $I + A : M \to N$ injektiv. Ihre Inverse ist wegen obiger Ungleichung beschränkt mit $\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.
Da $I + A : M \to X$ beschränkt und $M \subseteq X$ abgeschlossen ist, folgt aus Proposition 4.1.6, dass $I + A$ als Teilraum von X^2 abgeschlossen ist. Wegen Korollar 4.1.11 ist das auch $(I + A)^{-1}$. Wegen der Beschränktheit von $(I + A)^{-1} : N \to M \subseteq X$ folgt aus Proposition 4.1.6, dass N abgeschlossen in X ist. ∎

Lemma 4.2.17. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $C \in L_b(H_1, H_2)$. Dann gilt für jede Teilmenge $M \subseteq H_1$*

$$(C(M))^{\perp} = (C^*)^{-1}(\, M^{\perp}\,)\,,$$

wobei die rechte Seite das Urbild einer Menge unter einer Abbildung bezeichnet.

Beweis. Aus der Gleichung $(x, Cm) = (C^*x, m)$ für $m \in M$ und $x \in H_2$ folgt, dass $(x, Cm) = 0$ für alle $m \in M$ genau dann wenn $(C^*x, m) = 0$ für alle $m \in M$, und somit $x \in (C(M))^{\perp}$ genau dann, wenn $C^*x \in M^{\perp}$ bzw. $x \in (C^*)^{-1}(M^{\perp})$. ∎

Lemma 4.2.18. *Sei X ein Hilbertraum und $M \leq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Weiters sei $A : M \to X$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|A\| < 1$, und sei*

$N = (I + A)(M)$.

Bezeichnet P_M die orthogonale Projektion von X auf M, so ist $(I + AP_M)^*$ eine lineare bistetige Bijektion von X nach X, die $N^\perp$ bijektiv auf $M^\perp$ abbildet.

Weiters existiert eine unitäre Abbildung U von $N^\perp$ auf $M^\perp$, womit jede Orthonormalbasis von $N^\perp$ die selbe Mächtigkeit wie die einer jeden Orthonormalbasis von $M^\perp$ besitzt, dh. $N^\perp$ und $M^\perp$ haben die selbe Hilbertraum-Dimension.

Beweis. Wir wissen aus Lemma 4.2.16, dass $N = (I+A)(M)$ abgeschlossen und $I+A : M \to N$ bijektiv und bistetig ist.
Die Zusammensetzung $AP_M : X \to X$ ist linear und beschränkt mit $\|AP_M\| \le \|A\| < 1$. Also konvergiert die entsprechende Neumannsche Reihe und es folgt, dass $I + AP_M$ in $L_b(X)$ invertierbar ist, dh. $(I + AP_M)^{-1} \in L_b(X)$.
Bekannterweise ist dann auch $((I + AP_M)^*)^{-1} \in L_b(X)$, wobei $((I + AP_M)^*)^{-1} = ((I + AP_M)^{-1})^*$. Aus Lemma 4.2.17 folgt schließlich

$$(I + AP_M)^*(N^\perp) = (((I + AP_M)^*)^{-1})^{-1}(N^\perp) = (((I + AP_M)^{-1})^*)^{-1}(N^\perp) =$$
$$(I + AP_M)^{-1}(N)^\perp = (I + AP_M)^{-1}((I + AP_M)(M))^\perp = M^\perp .$$

Ist nun

$$B : N^\perp \to M^\perp,\ \ Bx := (I + AP_M)^* x,\ x \in N^\perp ,$$

so ist diese Abbildung bijektiv und bistetig. Wegen $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1}$ gilt dasselbe für $B^* : M^\perp \to N^\perp$. Als Konsequenz erhalten wir, dass $B^*B : N^\perp \to N^\perp$ ebenfalls bijektiv und bistetig ist. Für $P := (B^*B)^{\frac{1}{2}}$ folgt aus $0 \notin \sigma(B^*B) = \sigma(P)^2$, dass $P : N^\perp \to N^\perp$ bijektiv.
Schreibt man B Polar zerlegt als UP (vgl. Satz 1.6.4), so folgt aus $\operatorname{ran} U = \operatorname{ran} B = M^\perp$ und $(\ker U)^\perp = \operatorname{ran} P = N^\perp$, dass die partielle Isometrie U eine Isometrie auf $N^\perp$ ist, die $M^\perp$ als Bild hat. Also ist $U : N^\perp \to M^\perp$ unitär. ■

Satz 4.2.19. *Sei $T \le X \times X$ eine lineare Relation. Dann ist die Menge $r(T)$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (versehen mit der chordalen Metrik).*

Ist X sogar ein Hilbertraum, so ist die Hilbertraum-Dimension von $\operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$ *lokal konstant für $\lambda \in r(T)$, dh. ist $\lambda \in r(T)$, so gibt es eine Umgebung U von λ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $U \subseteq r(T)$ und*

$$\dim \operatorname{ran}(T - \mu)^\perp = \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp,\ \mu \in U(\lambda) .$$

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2.8 können wir T als abgeschlossen voraussetzen.
Sei $\lambda \in r(T)$ und sei zunächst $\lambda \ne \infty$. Dann ist $R(\lambda) = (T - \lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(T - \lambda) \to X$ ein beschränkter linearer Operator. Für $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\lambda)\|}$ können wir Lemma 4.2.16 anwenden und sehen, dass $(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & -\mu\\ 1 & -\lambda\end{smallmatrix}\right)}(T)$ (siehe (4.7)) den Raum $M = \operatorname{ran}(T - \lambda)$ bijektiv auf einen abgeschlossenen Teilraum $N \subseteq X$ abbildet. Insbesondere ist $\ker(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \{0\}$.
Mit Fakta 4.2.2, 2, folgt

$$N = \operatorname{ran}(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) =$$
$$= \operatorname{ran} \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & -\mu\\ 1 & -\lambda\end{smallmatrix}\right)}(T) = \{g - \mu f : (f; g) \in T\} = \operatorname{ran}(T - \mu) = \operatorname{dom} R(\mu) .$$

Wegen $\ker(I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) = \{0\}$ folgt aus Lemma 4.2.12 wieder (4.18) und daher (es handelt sich um eine Gleichung linearer Relationen)

$$R(\mu) = R(\mu) \cdot I|_{\operatorname{dom} R(\mu)} =$$
$$= R(\mu) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda)) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda))^{-1} = R(\lambda) \cdot (I + (\lambda - \mu)R(\lambda))^{-1} .$$

Damit ist $R(\mu)$ Zusammensetzung zweier beschränkter Operatoren, und daher selber beschränkt, also $\mu \in r(T)$.

Ist X sogar ein Hilbertraum, so folgt aus Lemma 4.2.18, dass $\dim \operatorname{ran}(T - \mu)^\perp = \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$.

Ist schließlich $\lambda = \infty$, so ist definitionsgemäß $T : \operatorname{dom}(T) \to X$ ein beschränkter Operator. Für $|\mu| > \|T\|$ – also für $\mu \neq \infty$ aus der Umgebung $(\mathbb{C} \setminus K^{\mathbb{C}}_{\|T\|}(0)) \cup \{\infty\}$ von ∞ – wende Lemma 4.2.18 auf $A = -\frac{1}{\mu}T$ an, um zu sehen, dass

$$T - \mu = -\mu(I - \frac{1}{\mu}T) : \operatorname{dom} T \to \operatorname{ran}(T - \mu)$$

stetig invertierbar ist, dh. $\mu \in r(T)$.
Im Hilbertraumfall folgt aus Lemma 4.2.18, dass $\dim \operatorname{dom}(T)^\perp = \dim \operatorname{ran}(T - \mu)^\perp$. ■

Korollar 4.2.20. *Sei X ein Hilbertraum. Für zusammenhängendes $\Omega \subsetneq r(T)$ ist die Kardinalität* $\dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$ *konstant auf* Ω.

Beweis. Sei $\mu \in \Omega$ fest, und sei

$$\Delta_= := \{\lambda \in \Omega : \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp = \dim \operatorname{ran}(T - \mu)^\perp\} ,$$

$$\Delta_{\neq} := \{\lambda \in \Omega : \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp \neq \dim \operatorname{ran}(T - \mu)^\perp\} .$$

Aus Satz 4.2.19 folgt, dass mit λ auch eine ganze Kugel um λ aus $\Delta_=$ ist. Also ist $\Delta_=$ als Teilmenge von Ω offen. Dasselbe gilt für $\Delta_{\neq}$.
Offensichtlich ist $\Omega = \Delta_= \dot\cup \Delta_{\neq}$, und wegen der Voraussetzung muss $\Delta_= = \Omega$, da ja $\mu \in \Delta_=$. ■

4.3 Lineare Relationen zwischen Hilberträumen

In diesem Abschnitt seien X und Y immer Hilberträume, für die wir standesgemäß H_1 und H_2 schreiben wollen. Das Produkt $H_1 \times H_2$ ist bekannterweise auch ein Hilbertraum, wenn man für $(x; y), (u; v) \in H_1 \times H_2$

$$((x; y), (u; v))_{H_1 \times H_2} := (x, u) + (y, v)$$

definiert. Dann lässt sich $H_1 \times H_2$ offensichtlich zerlegen in $H_1 \times H_2 = (H_1 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times H_2)$, bzw. salopp $H_1 \times H_2 = H_1 \oplus H_2$.

Definition 4.3.1. Für eine lineare Relation $T \leq H_1 \times H_2$ sei

$$T^* := \{(x; y) \in H_2 \times H_1 : (x, v) = (y, u),\ \forall\ (u; v) \in T\}$$

die *adjungierte Relation* zu T.

Direkt aus der Definition folgt für lineare Relationen S und T, wobei $S \subseteq T$, dass $T^* \subseteq S^*$.
Weiters ist $(x; y) \in T^*$ klarerweise genau dann, wenn

$$(x, v) - (y, u) = ((x; y), (-v; u))_{H_2 \times H_1} = 0, \ \forall \ (u; v) \in T .$$

Nun ist $\{(-v; u) : (u; v) \in T\}$ das Bild von T unter $\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1} : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ (hier ist $\tau_{-1} = \tau_\alpha$ mit $\alpha = -1$; siehe Bemerkung 4.1.10). Also gilt

$$T^* = (\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T))^\perp , \tag{4.20}$$

wobei rechts das orthogonale Komplement von $\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T)$ im Hilbertraum $H_2 \times H_1$ gemeint ist.
Insbesondere ist T^* immer ein abgeschlossener linearer Teilraum von $H_2 \times H_1$. Da $\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}$ bistetig ist, gilt

$$(\overline{T})^* = T^* . \tag{4.21}$$

Fakta 4.3.2.

1. Ist $T : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator, und bezeichne $T^+ : H_2 \to H_1$ den aus der Funktionalanalysis 1, [4], bekannten Adjungierten Operator. Dieser ist ebenfalls linear und beschränkt und erfüllt ($x \in H_2$)

$$(x, Tu) = (T^+ x, u)$$

für alle $(u; Tu) \in T$. Damit folgt $(x; T^+ x) \in T^*$, also $T^+ \subseteq T^*$. Ist umgekehrt $(x; y) \in T^*$, so gilt

$$(T^+ x, u) = (x, Tu) = (y, u)$$

für alle $u \in H_1$, also $y = T^+ x$. Insgesamt gilt $T^+ = T^*$.

2. Für eine lineare Relation $T \leq H_1 \times H_2$ gilt

$$\operatorname{mul} T^* = \{y \in H_1 : (0, v) - (y, u) = 0, \ \forall (u; v) \in T\} = (\operatorname{dom} T)^\perp , \tag{4.22}$$

und

$$\ker T^* = \{x \in H_2 : (x, v) - (0, u) = 0, \ \forall (u; v) \in T\} = (\operatorname{ran} T)^\perp . \tag{4.23}$$

3. Wenden wir Lemma 4.2.17 auf $C = \tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1} : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ an, so erhalten wir wegen $C^* = \tau_{-1} \circ \tau_{H_2 \leftrightarrows H_1}$, dass auch

$$T^* = (\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T))^\perp = (\tau_{-1} \circ \tau_{H_2 \leftrightarrows H_1})^{-1}(T^\perp) = (\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T^\perp)) , \tag{4.24}$$

wobei $T^\perp$ das orthogonale Komplement von T in $H_1 \times H_2$ ist. Wenden wir darauf (4.20) mit T^* statt T an, so folgt

$$(T^*)^* = (\tau_{H_2 \leftrightarrows H_1} \circ \tau_{-1}(\tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T^\perp)))^\perp = \tag{4.25}$$

$$((-\tau_{-1}) \circ \tau_{H_2 \leftrightarrows H_1} \circ \tau_{H_1 \leftrightarrows H_2} \circ \tau_{-1}(T^\perp))^\perp = (-I_{H_1 \times H_2} T^\perp)^\perp = \overline{T} .$$

Dabei haben wir die Tatsache, dass

$$\tau_{H_2 \leftrightarrows H_1} \circ \tau_{-1}(x; y) = (-y; x) = (-\tau_{-1}) \circ \tau_{H_2 \leftrightarrows H_1}(x; y)$$

für alle $(x; y) \in H_1 \times H_2$, verwendet.

4. Wegen (4.25) ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(T^*)^* = T$.

Lemma 4.3.3. *Es gilt* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ *und* $(B+T)^* = B^*+T^*$ *für jedes* $B \in L_b(H_1, H_2)$.

Beweis. Es gilt $(x; y) \in (T^{-1})^*$ genau dann, wenn $(x, v) = (y, u)$ für alle $(u; v) \in T^{-1}$, bzw. $(x, a) = (y, b)$ für alle $(a; b) \in T$. Das ist aber äquivalent zu $(y; x) \in T^*$. Insgesamt also $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
Weiters ist $(x; y) \in (B + T)^*$ genau dann, wenn $(x, v) = (y, u)$ für alle $(u; v) \in B + T$, bzw. $(x, b + Ba) = (y, a)$ für alle $(a; b) \in T$. Wegen

$$(x, b + Ba) = (y, a) \Leftrightarrow (x, b) = (y - B^* x, a)$$

ist das äquivalent zu $(x; y - B^* x) \in T^*$ und weiter zu $(x; y) \in B^* + T^*$. ■

Definition 4.3.4. Sei $T \leq H_1 \times H_2$ eine lineare Relation, dann heißt T

- *isometrisch*, falls $T^{-1} \subseteq T^*$.
- *unitär*, falls $T^{-1} = T^*$.

Ist $H_1 = H_2 = H$, so heißt T

- *symmetrisch*, falls $T \subseteq T^*$.
- *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.

Bemerkung 4.3.5. Ist $A \leq H \times H$ selbstadjungiert, dh. $A = A^*$, so gilt wegen (4.22) und (4.23)

$$\operatorname{mul} A = (\operatorname{dom} A)^\perp, \quad \ker A = (\operatorname{ran} A)^\perp . \tag{4.26}$$

Insbesondere ist A genau dann ein Operator, wenn A dichten Definitionsbereich hat.

Beispiel 4.3.6. Als Anwendung des Relationenkalküls auf Hilberträumen möchten wir den Differentialoperator

$$T := \left\{(f; g) \in (L^2[0, 1])^2 : f \in AC[0, 1], f' = ig\right\}$$

näher behandeln. Dabei ist es hilfreich, auch den beschränkten und daher abgeschlossenen Integraloperator B zu betrachten.

$$B : \left\{ \begin{array}{ccc} L^2[0,1] & \to & L^2[0,1] \\ f & \mapsto & (x \mapsto i \int_0^x f(t)\,dt) \end{array} \right.$$

Mit Hilfe des Satzes von Arcela-Ascoli (vgl. Funktionalanalysis 1 Übung) zeigt man, dass B kompakt ist. Für das Spektrum gilt $\sigma(B) = \{0\}$. Da $B \in L_b(L^2[0, 1])$ liegt, existiert eine Adjungierte B^*. Nun gilt $B^*(f)(x) = -i \int_x^1 f(t)\,dt$, denn partielle Integration liefert $(f, g \in L^2[0, 1])$

$$\begin{aligned}
(Bf, g) &= \int_0^1 \left(i \int_0^x f(t)\,dt\right) \overline{g(x)}\,dx = \\
&= i\Big(\int_0^1 f(t)\,dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)}\,dt - \int_0^1 f(x) \int_0^x \overline{g(t)}\,dt\,dx\Big) = \\
&= i \int_0^1 f(x) \int_x^1 \overline{g(t)}\,dt\,dx = \Big(f, -i \int_x^1 g(t)\,dt\Big).
\end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und da die Adjungiertenbildung mit der Inversenbildung vertauscht, erhält man

$$\begin{aligned} T_0 &:= B^{-1} = \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1], f' = ig, f(0) = 0\right\} , \\ T_0^* &= (B^*)^{-1} = \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1], f' = ig, f(1) = 0\right\} . \end{aligned}$$

T_0 ist als Inverse der abgeschlossenen Relation B ebenfalls abgeschlossen. Wie man sofort sieht, ist $T = T_0 \boxplus \{(c;0) : c \in \mathbb{C}\} = T_0^* \boxplus \{(c;0) : c \in \mathbb{C}\}$. Insbesondere ist T abgeschlossen und $\operatorname{codim}_T T_0 = \operatorname{codim}_T T_0^* = 1$. T^* ist symmetrisch, denn

$$T_0 \subseteq T \quad \Rightarrow \quad T^* \subseteq T_0^* \subseteq T\,.$$

Weil T_0 abgeschlossen ist, folgt zudem aus $T_0^* \subseteq T$, dass $T^* \subseteq T_0$. Wenn also $(f;g) \in T^*$ liegt, dann ist

$$f \in AC[0,1], \quad f' = ig, \quad f(0) = f(1) = 0\,. \tag{4.27}$$

Erfülle $(f;g)$ die Bedingungen aus (4.27) und sei $(h;k) \in T$. Partielle Integration ergibt:

$$(f,k) - (g,h) = \int_0^1 f\bar{k}\,dx + i\int_0^1 f'\bar{h}\,dx = if\bar{h}\,|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow (f;g) \in T^* \tag{4.28}$$

Insgesamt kann also auf

$$T^* = T_{00} := \left\{(f,g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1],\ f' = ig,\ f(0) = f(1) = 0\right\}$$

geschlossen werden.

Lemma 4.3.7. *Für $T \le H_1 \times H_2$ ist T eine isometrische Relation genau dann, wenn* $\operatorname{mul} T = \{0\}$ *und $T : \operatorname{dom}(T) \to H_2$ ein isometrischer Operator ist, d.h. $(Tx, Ta) = (x,a)$ für alle $x, a \in \operatorname{dom}(T) \subseteq H_1$.*
T ist genau dann eine unitäre Relation, wenn $T : H_1 \to H_2$ ein unitärer Operator ist.

Beweis. Wegen (4.24) gilt

$$T^{-1} \subseteq T^* \Leftrightarrow \tau_{-1}(T) \subseteq T^{\perp} \Leftrightarrow (x,a) = (y,b) \text{ für alle } (x;y),(a;b) \in T\,. \tag{4.29}$$

Für $x = a, y = b$ folgt $\|x\|^2 = \|y\|^2$ für alle $(x;y) \in T$, und daher insbesondere $\operatorname{mul} T = \{0\}$. Also ist T ein Operator, der wegen (4.29) isometrisch ist. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus (4.29).
Ist T ein unitärer Operator, so folgt aus Fakta 4.3.2, 1, sofort, dass T unitär als Relation ist.
Aus $T^{-1} = T^*$ folgt zunächst wegen Lemma 4.3.3 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* = (T^*)^*$. Also sind insbesondere T und T^* isometrische Relationen. Nach dem oben Gezeigten sind sie daher isometrische Operatoren und daher $(\operatorname{dom} T)^{\perp} = \operatorname{mul} T^* = \{0\} = \ker T^* = (\operatorname{ran} T)^{\perp}$.
Also hat T dichten Definitionsbereich und dichten Bildbereich. Wegen $T = (T^*)^{-1}$ ist T abgeschlossen und wir können Proposition 4.1.6 auf T und T^{-1} anwenden, um zu sehen, dass T bijektiv von H_1 auf H_2 abbildet. ∎

Nun sei $H_1 = H_2 = H$.

Bemerkung 4.3.8. Ist für $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ die Abbildung τ_M definiert wie in Definition 4.2.1, so überprüft man elementar, dass $\tau_M^* : H^2 \to H^2$ (Adjungierte zur Abbildung $\tau_M : H^2 \to H^2$) mit τ_{M^*} übereinstimmt, wobei $M^* = \left(\begin{smallmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta}\end{smallmatrix}\right)$, dh. $(\tau_M)^* = \tau_{M^*}$.

Lemma 4.3.9. *Für $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\det M \neq 0$, und $T \leq H^2$ gilt mit $\overline{M} := \left(\begin{smallmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta}\end{smallmatrix}\right)$*

$$\tau_M(T)^* = \tau_{\overline{M}}(T^*).$$

Insbesondere gilt

$$((T-\lambda)^{-1})^* = ((T^* - \overline{\lambda})^{-1}),\ \ \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{4.30}$$

Beweis. Die Elemente von $\tau_{\overline{M}}(T^*)$ sind von der Form $(\overline{\delta}u + \overline{\gamma}v; \overline{\beta}u + \overline{\alpha}v)$ mit $(u; v) \in T^*$ und die von $\tau_M(T)$ von der Form $(\delta x + \gamma y; \beta x + \alpha y)$ mit $(x; y) \in T$, wodurch

$$\begin{aligned}(\delta x + \gamma y, \overline{\beta}u + \overline{\alpha}v) = \delta\beta(x,u) + \delta\alpha(x,v) + \gamma\beta(y,u) + \gamma\alpha(y,v) = \\ \delta\beta(x,u) + \delta\alpha(y,u) + \gamma\beta(x,v) + \gamma\alpha(y,v) = (\beta x + \alpha y, \overline{\delta}u + \overline{\gamma}v)\end{aligned}$$

gilt. Wir haben also $\tau_{\overline{M}}(T^*) \subseteq \tau_M(T)^*$. Diese Tatsache auf $\tau_M(T)$ und M^{-1} angewandt ergibt

$$\tau_{\overline{M^{-1}}}(\tau_M(T)^*) \subseteq \tau_{M^{-1}}(\tau_M(T))^* = T^*.$$

Wir wenden darauf $\tau_{\overline{M}}$ an, und erhalten wegen $(\overline{M})^{-1} = \overline{M^{-1}}$ schließlich $\tau_M(T)^* \subseteq \tau_{\overline{M}}(T^*)$.
(4.30) folgt nun sofort aus (4.6). ■

Zwischen symmetrischen und isometrischen bzw. zwischen selbstadjungierten und unitären Relationen besteht dann ein enger Zusammenhang.

Definition 4.3.10. Die Abbildung $C := \tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & -i \\ 1 & i\end{smallmatrix}\right)}$ von $H \times H$ auf sich nennen wir die *Cayley Transformation* und $\mathcal{F} := \tau_{\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-i & -i \\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)}$ von $H \times H$ auf sich die *Inverse Cayley Transformation*. Also

$$C(f; g) = \frac{1}{\sqrt{2}}(if + g; -if + g)\,,$$

$$\mathcal{F}(f; g) = \frac{i}{\sqrt{2}}(-f + g; -if - ig)\,.$$

Das Bild $C(T)$ einer linearen Relation $T \leq H^2$ unter der Cayley Transformation heißt die Cayley Transformierte von T. Entsprechend heißt $\mathcal{F}(T)$ die Inverse Cayley Transformierte oder Cayley Rücktransformierte von T.

Die Rechnung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i \\ 1 & i\end{pmatrix} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i & -i \\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

liefert $\mathcal{F} = C^{-1}$. Wegen (4.4) und (4.8) gilt

$$C(T) = I - 2i(T + iI)^{-1},\ \ \mathcal{F}(T) = -iI - 2i(T - I)^{-1} = -i(I + 2(T - I)^{-1})\,.$$

Bemerkung 4.3.11. Die Cayley-Transformierte und ihre Inverse kann man etwas allgemeiner definieren. Sei $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann erfüllen auch $C_\mu = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\bar{\mu} \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}$ und $\mathcal{F}_\mu := \tau_{\frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\left(\begin{smallmatrix} \mu & -\bar{\mu} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)}$ alle obigen Eigenschaften von C und $\mathcal{F}$. Die Beweise sind bis auf Kleinigkeiten die selben.

Satz 4.3.12. *Für eine lineare Relation $T \leq H^2$ gilt*

$$C(T^*) = (C(T)^*)^{-1} = (C(T)^{-1})^* .$$

Insbesondere ist T genau dann symmetrisch (selbstadjungiert), wenn $C(T)$ isometrisch (unitär) ist, und T genau dann isometrisch (unitär), wenn $\mathcal{F}(T)$ symmetrisch (selbstadjungiert) ist.

Beweis. Wegen Lemma 4.3.9 gilt

$$C(T)^* = \tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)}(T)^* = \tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)}(T^*) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)}(T^*) = C(T^*)^{-1} .$$

Nun ist T symmetrisch (selbstadjungiert) genau dann, wenn $T \subseteq T^*$ $(T = T^*)$. Wendet man C an, so ist das äquivalent zu $C(T) \subseteq (C(T)^*)^{-1}$ $(C(T) = (C(T)^*)^{-1})$. Nimmt man hier jeweils die Inverse, so sieht man, dass $T \subseteq T^*$ zu $(C(T))^{-1} \subseteq (C(T))^*$ und $T = T^*$ zu $(C(T))^{-1} = (C(T))^*$ äquivalent ist. Die Aussage über $\mathcal{F}$ folgt aus dem Bewiesenen, da C bijektiv und $\mathcal{F}$ seine Inverse ist. ∎

Bemerkung 4.3.13. Für $T \leq H^2$ gilt

$$\operatorname{mul} T = \operatorname{mul} \mathcal{F}(C(T)) = \{-ix - iy : (x; y) \in C(T), -x + y = 0\} = \ker(C(T) - I) .$$

Also ist T genau dann ein Operator, wenn $\ker(C(T) - I) = \{0\}$ dh. $1 \notin \sigma_p(C(T))$.

Beispiel 4.3.14. Man betrachte $T = \{0\} \times H$. Diese Relation ist selbstadjungiert – sie ist ja die Inverse der Nullabbildung – und ihre Cayley Transformierte ist die Identität I.

Aus Korollar 4.2.9 folgt unmittelbar:

Korollar 4.3.15. *Sei $T \leq H^2$ eine lineare Relation. Dann gilt*

$$r(C(T)) = \{\frac{z-i}{z+i} : z \in r(T)\}, \quad \rho(C(T)) = \{\frac{z-i}{z+i} : z \in \rho(T)\} ,$$

$$\sigma(C(T)) = \{\frac{z-i}{z+i} : z \in \sigma(T)\} ,$$

und

$$r(\mathcal{F}(T)) = \{\frac{z+1}{i(z-1)} : z \in r(T)\}, \quad \rho(\mathcal{F}(T)) = \{\frac{z+1}{i(z-1)} : z \in \rho(T)\} ,$$

$$\sigma(\mathcal{F}(T)) = \{\frac{z+1}{i(z-1)} : z \in \sigma(T)\} .$$

Korollar 4.3.16. *Für ein selbstadjungiertes $T \leq H^2$ gilt $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Beweis. Nach Satz 4.3.12 ist $C(T)$ unitär und daher $\sigma(C(T)) \subseteq \mathbb{T}$. Da für $z \in \mathbb{T}$ immer $\bar{z} = \frac{1}{z}$ und somit $(z \neq 1)$

$$\overline{\left(\frac{z+1}{i(z-1)}\right)} = \frac{\frac{1}{z}+1}{-i(\frac{1}{z}-1)} = \frac{z+1}{i(z-1)} \in \mathbb{R}\,, \tag{4.31}$$

folgt aus Korollar 4.3.15 $\sigma(T) = \sigma(\mathcal{F}(C(T))) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. ∎

Lemma 4.3.17. *Ist $T \leq H^2$ isometrisch bzw. symmetrisch, so gilt*

$$r(T) \supseteq (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{T} \;\; \textit{bzw.} \;\; r(T) \supseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Ist T isometrisch, so auch $\overline{T}$. Also können wir wegen Bemerkung 4.2.8 T als abgeschlossen voraussetzen. Somit hat T einen abgeschlossenen Definitionsbereich (vgl. Bemerkung 4.2.7).
Sei P die orthogonale Projektion von H auf $\operatorname{dom} T$. Damit ist $TP : H \to H$ beschränkt mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich 1, und somit $\sigma(TP) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Außerdem gilt $TP \supseteq T$ und daher $(TP - \lambda I)^{-1} \supseteq (T - \lambda I)^{-1}$ als lineare Relationen.
Für $|\lambda| > 1$ ist $\lambda \in \rho(TP)$, und daher $(TP - \lambda I)^{-1} \in L_b(H)$. Als Einschränkung muss daher auch $(T - \lambda I)^{-1} : \operatorname{ran}(T - \lambda) \to H$ ein beschränkter Operator sein. Also gilt $\lambda \in r(T)$ und insgesamt $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \subseteq r(T)$. Da $T : \operatorname{dom} T \to H$ auch beschränkt ist, gilt auch $\infty \in r(T)$.
Mit T ist auch T^{-1} isometrisch, also $\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in r(T)\} = r(T^{-1}) \supseteq (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$, und daher $r(T) \supseteq (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{T}$.
Ist T symmetrisch so folgt $r(T) \supseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ aus $r(C(T)) \supseteq (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{T}$ wie im Beweis von Korollar 4.3.16. ∎

Wir sehen, dass, für ein isometrisches T, die Menge $r(T)$ zumindest $\mathbb{D}$ und $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$ enthält. Diese Mengen sind zusammenhängend. Aus Korollar 4.2.20 wissen wir daher, dass $\dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$ konstant auf den jeweiligen Mengen ist. Analog gilt, dass für symmetrisches T die Dimension von $\operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$ auf $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^-$ jeweils konstant ist ($\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^-$ bezeichnen dabei die obere beziehungsweise die untere Halbebene).

Beispiel 4.3.18. In Allgemeinen kann man nicht erwarten, dass $\dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp$ konstant auf der gesamten Menge $r(T)$ ist. Man betrachte zum Beispiel den Rechtsshift:

$$S : \begin{cases} \ell^2 & \to \quad \ell^2 \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \quad (0, a_1, a_2, a_3, ...) \end{cases}$$

S ist trivialerweise isometrisch. Dennoch folgt

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{ran}(S - 0)^\perp &= \dim \operatorname{span}\{(1, 0, 0, 0, ...)\} = 1 \\ \dim \operatorname{ran}(S - \infty)^\perp &= \dim (\operatorname{dom} S)^\perp = \dim\{0\} = 0\,. \end{aligned}$$

Definition 4.3.19. Für ein isometrisches $T \leq H^2$ sei

$$n_i := \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp\,, \quad \lambda \in \mathbb{D}\,,$$

$$n_a := \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp\,, \quad \lambda \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}\,.$$

Für ein symmetrisches $T \le H^2$ sei

$$n_+ := \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}^+\,,$$

$$n_- := \dim \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}^-\,.$$

Die Zahlen (n_i, n_a) bzw. (n_+, n_-) heißen die *Defektindizes* von T.

Bemerkung 4.3.20. Wegen Bemerkung 4.2.8 haben T und $\overline{T}$ die selben Defektindizes.

Bemerkung 4.3.21. Aus (4.23) und Lemma 4.3.3 folgt unmittelbar, dass für $T \le H^2$ und $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$\operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda})\,.$$

Korollar 4.3.22. *Sei $S \le H^2$ symmetrisch mit Defektindizes (n_+, n_-) und die Isometrie $V := C(S)$ habe Defektindizes (n_i, n_a). Dann gilt $n_+ = n_i$ und $n_- = n_a$.*

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}^+$, ist $w = \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$. Nach (4.14) angewandt auf $C = \tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)}$ gilt $\operatorname{ran}(V - w) = \operatorname{ran}(S - z)$, und daher $n_+ = \dim \operatorname{ran}(S - z)^\perp = \dim \operatorname{ran}(V - w)^\perp = n_i$. Genauso argumentiert man für $z \in \mathbb{C}^-$, da dann $w = \frac{z-i}{z+i} \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$. ∎

Korollar 4.3.23. *Eine abgeschlossene isometrische (symmetrische) lineare Relation ist genau dann unitär (selbstadjungiert), wenn $n_i = n_a = 0$ ($n_- = n_+ = 0$).*

Beweis. Sei V abgeschlossen und isometrisch. Wegen Proposition 4.1.6 ist $\operatorname{dom} V$ abgeschlossen und weil auch V^{-1} abgeschlossen und isometrisch ist, gilt dasselbe für $\operatorname{ran} V$.
Wegen

$$\dim(\operatorname{dom} V)^\perp = \dim(\operatorname{ran}(V - \infty))^\perp = n_a$$

und

$$\dim(\operatorname{ran} V)^\perp = \dim(\operatorname{ran}(V - 0))^\perp = n_i$$

ist $n_i = n_a = 0$ dazu äquivalent, dass $\operatorname{dom} V = H = \operatorname{ran} V$, also dazu, dass V unitär ist.
Die entsprechende Aussage für symmetrische Relationen folgt sofort aus Korollar 4.3.22 und Satz 4.3.12. ∎

Korollar 4.3.24. *Eine Isometrie $V \le H^2$ hat genau dann eine unitäre* Erweiterung *$U \le H^2$, wenn $n_i = n_a$.*
Eine symmetrische Relation $S \le H^2$ hat genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung *$A \le H^2$, wenn $n_+ = n_-$.*

Beweis. Da bei der Bildung des Abschlusses sowohl die Defektindizes unverändert bleiben, als auch die Tatsache, dass die betreffliche Relation eine unitäre (selbstadjungierte) Erweiterung hat oder nicht, können wir V und S als abgeschlossen annehmen.
Ist $U \ge V$ unitär, so bildet $U|_{\operatorname{dom} V} = V$ den Raum $\operatorname{dom} V$ bijektiv und isometrisch auf $\operatorname{ran} V$ und daher $(\operatorname{dom} V)^\perp = \operatorname{ran}(V - \infty)^\perp$ bijektiv und isometrisch auf $\operatorname{ran}(V - 0)^\perp$ ab.
Also $n_i = n_a$.
Ist umgekehrt $n_i = n_a$, so haben Orthonormalbasen von $(\operatorname{dom} V)^\perp$ und von $(\operatorname{ran}(V))^\perp$ gleiche Mächtigkeit. Eine Bijektion von einer solchen von $(\operatorname{dom} V)^\perp$ auf eine solche

von $(\operatorname{ran} V)^\perp$ lässt sich offensichtlich zu einer Isometrie $V' : (\operatorname{dom} V)^\perp \to (\operatorname{ran} V)^\perp$ fortsetzen. Nun definiert

$$U(u+v) := V(u) + V'(v),\;\; u \in \operatorname{dom} V, v \in (\operatorname{dom} V)^\perp$$

eine unitäre Fortsetzung von V.
Die Behauptung für S folgt über die Cayley-Transformation aus der für V. ■

Bemerkung 4.3.25. Meist werden symmetrische Operatoren S betrachtet, dh. $\operatorname{mul} S = \{0\}$. Ist A eine selbstadjungierte Erweiterung, so ist zunächst nicht sicher, dass auch A ein Operator ist. In der Tat ist das wegen Bemerkung 4.3.13 genau dann der Fall, wenn $\ker(C(A) - I) = \{0\}$.
Ist S dicht definiert, so folgt aus (4.22)

$$\{0\} = (\operatorname{dom} S)^\perp \supseteq (\operatorname{dom} A)^\perp = \operatorname{mul} A$$

für jede selbstadjungierte Erweiterung A. Also sind alle selbstadjungierten $A \supseteq S$ ebenfalls Operatoren.
Ist S nicht dicht definiert, so gilt das im Allgemeinen nicht.

Beispiel 4.3.26. An dieser Stelle können wir Beispiel 4.3.6 fortsetzen. Es wurde gezeigt, dass

$$T := \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1], f' = ig\right\}$$

eine abgeschlossene Relation und

$$T^* = T_{00} = \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1],\; f' = ig,\; f(0) = f(1) = 0\right\}$$

symmetrisch ist. Zur Berechnung der Defektindizes von T_{00} lösen wir zunächst eine Differentialgleichung. Wegen

$$f \in \ker(T+i) \;\Leftrightarrow\; (f;-if) \in T \;\Leftrightarrow\; f' = f \;\Leftrightarrow\; f(x) = c \cdot e^x \in L^2[0,1],\; c \in \mathbb{C}$$

ist $\ker(T+i)$ eindimensional, und es folgt

$$n_+(T_{00}) = \dim \operatorname{ran}(T_{00} - i)^\perp = \dim \ker(T+i) = 1$$

Analog zeigt man $n_- = 1$. Nach Korollar 4.3.24 ($T_{00} = T^* \subseteq T_{00}^*$) hat T_{00} also eine selbstadjungierte Erweiterung. Sei

$$A := \left\{(f,g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1],\; f' = ig,\; f(0) = f(1)\right\}.$$

Aus der Definition folgt direkt $T \supseteq A \supseteq T_{00}$ und durch Adjungieren $T_{00} = T^* \subseteq A^* \subseteq T_{00}^* = T$.
Wie man analog zu (4.28) berechnet, muss $A \subseteq A^*$ sein. Angenommen $A^* \supsetneq A$. Wegen $\operatorname{codim}_T A \leq 1$ muss dann $T = A^*$ sein. A ist als endlichdimensionale Erweiterung von T_{00} abgeschlossen, daher folgt

$$T_{00} = T^* = A^{**} = \overline{A} = A\,.$$

Dies ist ein Widerspruch, denn $(1;0)$ liegt in $A \setminus T_{00}$. A ist also selbstadjungiert.

Interessant ist auch das Spektrum von A. Da A ein Operator ist, sehen wir zunächst $\infty \notin \sigma_p(A)$. Also gilt

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f \neq 0 : (f; \lambda f) \in A\} .$$

Da für selbstadjungierte Operatoren $\sigma(A) \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$ gilt, ist auch das Punktspektrum reell. Löst man die Differentialgleichung $f' = i\lambda f$, so erhält man $f = C \cdot e^{i\lambda x}$, $C \in \mathbb{C}$. Um die Randbedingungen $f(0) = f(1)$ zu erfüllen, muss $1 = e^{i\lambda 0} = e^{i\lambda}$, also $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$ sein. In diesem Fall ist f für beliebige C eine Lösung. Somit haben wir

$$\sigma_p(A) = 2\pi\mathbb{Z} .$$

Sei $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{ran}(A - \lambda I) = L^2[0,1]$. Für ein beliebiges $h \in L^2[0,1]$ soll also ein Paar $(f; g) \in A$ gefunden werden, sodass $-\lambda f + g = -\lambda f - if' = h$. Die aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannte Methode der Variation der Konstanten liefert eine Lösungsformel für f.

$$f(x) = \left(i \int_0^x e^{-i\lambda t} h(t)\, dt + c\right) e^{i\lambda x}, \quad c \in \mathbb{C} .$$

Als Produkt von absolut stetigen Funktionen ist f wieder absolut stetig. Um die durch A vorgegebenen Randbedingungen zu erfüllen, muss die lineare Gleichung

$$f(0) = c = \left(i \int_0^1 e^{-i\lambda t} h(t)\, dt + c\right) e^{i\lambda} = f(1)$$

gelöst werden. Nach Voraussetzung ist $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$, das heißt $e^{i\lambda} \neq 1$. c kann daher durch

$$c = \frac{\left(i \int_0^1 e^{-i\lambda t} h(t)\, dt\right) e^{i\lambda}}{1 - e^{i\lambda}}$$

berechnet werden. Damit ist gezeigt, dass ein passendes Paar $(f; g)$ zu h gefunden werden kann. Der Bildbereich von $A - \lambda I$ ist also der ganze Raum. Verwendet man Bemerkung 4.2.7, das heißt

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(A - \lambda I) = H, \ker(A - \lambda) = \{0\}\} ,$$

so folgt wegen $\ker(A - \lambda) = \operatorname{ran}(A^* - \bar{\lambda} I)^\perp = \operatorname{ran}(A - \lambda I)^\perp$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ schließlich $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.

4.4 Kern und Bild

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und H ein Hilbertraum. Weiters sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$.

Lemma 4.4.1. *Für $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt*

$$\ker \int \phi\, dE = \operatorname{ran} E(\phi^{-1}(\{0\})) \tag{4.32}$$

und

$$\overline{\operatorname{ran} \int \phi\, dE} = \ker E(\phi^{-1}(\{0\})) = \{g \in H : E_{g,g}(\phi^{-1}(\{0\})) = 0\} . \tag{4.33}$$

Beweis. Für ein $g \in H$ gilt

$$\|\left[\int \phi \, dE\right] g\|^2 = \int_\Omega |\phi(t)|^2 \, dE_{g,g} = \int_{\{t\in\Omega:\phi(t)\neq 0\}} |\phi(t)|^2 \, dE_{g,g} .$$

Da $|\phi(t)|^2 > 0$ auf $\{t \in \Omega : \phi(t) \neq 0\}$, und da das Integral einer strikt positiven Funktion nach einem (nichtnegativen) Maß genau dann verschwindet, wenn das Maß das Nullmaß ist, gilt $\left[\int \phi \, dE\right] g = 0$ genau dann, wenn

$$0 = E_{g,g}(\{t \in \Omega : \phi(t) \neq 0\}) = \|E(\{t \in \Omega : \phi(t) \neq 0\})g\|^2 .$$

Wegen $g = E(\{t \in \Omega : \phi(t) \neq 0\})g + E(\{t \in \Omega : \phi(t) = 0\})g$ bedeutet das $g \in \operatorname{ran} E(\phi^{-1}(\{0\}))$.
Schließlich gilt wegen $\phi^{-1}(\{0\}) = (\bar{\phi})^{-1}(\{0\})$

$$\overline{\operatorname{ran} \int \phi \, dE} = (\ker \int \bar{\phi} \, dE)^\perp = \ker E(\phi^{-1}(\{0\})) ,$$

und wegen $E_{g,g}(\phi^{-1}(\{0\})) = \|E(\phi^{-1}(\{0\}))g\|^2$ schließlich ganz (4.33). ■

Korollar 4.4.2. *Sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\ker(\int \phi \, dE - \lambda I) = \operatorname{ran} E(\phi^{-1}(\{\lambda\})) .$$

Insbesondere ist $\lambda \in \sigma_p(\int \phi \, dE)$ genau dann, wenn $E(\phi^{-1}(\{\lambda\})) \neq 0$.

Beweis. Da $\int \phi \, dE - \lambda I = \int (\phi - \lambda) \, dE$, folgt die Behauptung unmittelbar aus (4.32). ■

Proposition 4.4.3. *Für $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ liegt ein $g \in H$ im Bild des Operators $\int \phi \, dE$ genau dann, wenn*

$$E_{g,g}(\phi^{-1}(\{0\})) = 0 \ \textit{und} \ \int_{\Omega\setminus\phi^{-1}(\{0\})} \frac{1}{|\phi|^2} \, dE_{g,g} < +\infty . \tag{4.34}$$

Setzt man $\frac{1}{|\phi(t)|^2} = +\infty$, wenn $\phi(t) = 0$, so ist (4.34) *äquivalent zu*

$$\int_\Omega \frac{1}{|\phi|^2} \, dE_{g,g} < +\infty . \tag{4.35}$$

Beweis. Dass (4.34) und (4.35) äquivalent sind folgt sofort daraus, dass das Integral der Funktion $+\infty$ über eine Menge dann und nur dann endlich ist, wenn diese Menge Maß Null hat.
Ist g im Bild von $\int \phi \, dE$, dh. $g = \left[\int \phi \, dE\right] h$ für ein $h \in H$, so gilt wegen (4.33) $E_{g,g}(\phi^{-1}(\{0\})) = 0$.
Setzen wir $\Delta_n = \{t \in \Omega : |\phi(t)| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist diese Mengenfolge monoton wachsend, $\Delta_n \in \mathcal{A}$ und es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Omega \setminus \phi^{-1}(\{0\})$. Gemäß dem Satz von der

monotonen Konvergenz und dem Funktionalkalkül folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\phi^{-1}(\{0\})} \frac{1}{|\phi|^2}\, dE_{g,g} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_n} \frac{1}{|\phi|^2}\, dE_{g,g} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\Big[\int \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big]\, g, g \Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\Big[\int \phi\, dE \Big]^* \Big[\int \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big] \Big[\int \phi\, dE \Big]\, h, h \Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\Big[\int \frac{\overline{\phi}\phi}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big]\, h, h \Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\Big[\int \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big]\, h, h \Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE_{h,h} = E_{h,h}(\Omega \setminus \phi^{-1}(\{0\})) < \infty\,.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Also gilt (4.34). Gelte nun umgekehrt (4.34). Man betrachte die Folge

$$h_n := \Big[\int \frac{1}{\phi} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big] g$$

in H. Für $n \geq m$ gilt

$$\begin{aligned}
\|h_n - h_m\|^2 &= \Big\| \Big[\int \frac{1}{\phi} \cdot (\mathbb{1}_{\Delta_n} - \mathbb{1}_{\Delta_m})\, dE \Big] g \Big\|^2 = \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n\setminus\Delta_m}\, dE_{g,g} = \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE_{g,g} - \int_{\Omega} \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_m}\, dE_{g,g}\,.
\end{aligned}$$

Nun ist aber $\int_{\Omega\setminus\phi^{-1}(\{0\})} \frac{1}{|\phi|^2}\, dE_{g,g}$ endlich. Also gilt

$$\int_{\Omega\setminus\phi^{-1}(\{0\})} \frac{1}{|\phi|^2}\, dE_{g,g} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_n} \frac{1}{|\phi|^2}\, dE_{g,g}\,,$$

weshalb

$$\Big(\int_{\Omega} \frac{1}{|\phi|^2} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE_{g,g} \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge ist. Somit ist auch $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen ein $h \in H$, für das

$$\begin{aligned}
\Big[\int \phi\, dE \Big] h = \lim_{n\to\infty} \Big[\int \phi\, dE \Big] h_n &= \\
= \lim_{n\to\infty} \Big[\int \phi \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big] g &= \\
= \lim_{n\to\infty} \Big[\int \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE \Big] g &
\end{aligned}$$

gilt. Nun folgt aus der punktweisen Konvergenz des Integranden die Konvergenz dieser Folge gegen $\Big[\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{t\in\Omega:\phi(t)\neq 0\}}\, dE \Big] g = E(\Omega \setminus \phi^{-1}(\{0\}))g$. Wegen $\|E(\phi^{-1}(\{0\}))g\|^2 =$

$E_{g,g}(\phi^{-1}(\{0\})) = 0$ stimmt $E(\Omega \setminus \phi^{-1}(\{0\}))g$ mit g überein, also $g = \left[\int \phi\, dE\right] h \in$ ran $\int \phi\, dE$. ∎

4.5 Funktionalkalkül für unbeschränkte messbare Funktionen

Bezeichne die Menge aller $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $U(\Omega, \mathcal{A})$. Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich eines Spektralmaßes E für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ integrieren kann. Im Allgemeinen erhalten wir keinen beschränkten, sondern nur abgeschlossenen Operator. Für den Spezialfall $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ wird dieses Integral mit dem schon bekannten beschränkten Operator $\int \phi\, dE$ übereinstimmen.

Bemerkung 4.5.1. Ist $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$, so kann man ϕ immer als Summe $\phi = \phi_1 + \phi_2$ schreiben, wobei ϕ_1, ϕ_2 in $U(\Omega, \mathcal{A})$ liegen, ϕ_1 beschränkt ist und $|\phi_2| \geq \delta$ für ein festes $\delta > 0$ gilt; man nehme zum Beispiel

$$\phi_2 = \mathbb{1}_{\{t \in \Omega : |\phi(t)| \geq 1\}} \cdot \phi(t) + \mathbb{1}_{\{t \in \Omega : |\phi(t)| < 1\}} \quad \text{und} \quad \phi_1 = \mathbb{1}_{\{t \in \Omega : |\phi(t)| < 1\}} \cdot (\phi - 1)\,.$$

Gemäß dem Funktionalkalkül für Funktionen aus $B(\Omega, \mathcal{A})$ existieren $\int \phi_1\, dE$ und $\int \frac{1}{\phi_2}\, dE$ in $L_b(H)$. Dabei ist wegen (4.32) $\ker\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right] = \{0\}$ und wegen (4.33) $\overline{\operatorname{ran}\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]} = H$.

Definition 4.5.2. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum. Weiters sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$.
Sei $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $\phi = \phi_1 + \phi_2$ zerlegt wie in Bemerkung 4.5.1. Dann setzen wir

$$\int \phi\, dE := \left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1} + \int \phi_1\, dE\,.$$

Bemerkung 4.5.3. Wir haben in Bemerkung 4.5.1 gesehen, dass $\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]$ ein injektiver Operator aus $L_b(H)$ mit dichtem Bild ist. Somit ist $\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1}$ ein abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich $\operatorname{ran}\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]$. Wegen $\int \phi_1\, dE \in L_b(H)$ ist gemäß Korollar 4.1.11 dann auch $\int \phi\, dE$ ein abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich $\operatorname{ran}\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]$.
Ist dabei ϕ beschränkt, so ist es auch ϕ_2. Nach der Multiplikativität des Funktionalkalküls für Funktionen aus $B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1} = \int \phi_2\, dE$. Man sieht also, dass die Definition von $\int \phi\, dE$ in Definition 4.5.2 mit der üblichen Definition von $\int \phi\, dE$ übereinstimmt.

Lemma 4.5.4. *Sei $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ und sei $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Mengen, sodass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \Omega$ und sodass ϕ auf allen Δ_n beschränkt ist.*

(*i*) *Für $g \in H$ gilt $g \in \operatorname{dom}\left[\int \phi\, dE\right] \Leftrightarrow \int_\Omega |\phi|^2 dE_{g,g} < +\infty$.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n})\, dE \,\big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_n)} \subseteq \int \phi \, dE$.*

(iii) *Die Folge $\left(\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren aus $L_b(H)$ konvergiert stark gegen $\int \phi \, dE$. Das bedeutet, dass für ein $g \in H$*

$$\left(\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent in } H \;\Leftrightarrow\; g \in \operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right]$$

und

$$g \in \operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right] \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g = \left[\int \phi \, dE\right] g\,.$$

(iv) *Setzt man*

$$C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n})\, dE \,\Big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_n)}\,, \tag{4.37}$$

so ist C ein abschließbarer linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} E(\Delta_n)$, wobei für den Abschluss von C auch $\overline{C} = \int \phi \, dE$.

(v) *$\int \phi \, dE$ ist unabhängig von der gewählten Zerlegung $\phi = \phi_1 + \phi_2$.*

(vi) *Für $g \in \operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right]$ und $\Delta \in \mathcal{A}$ gilt*

$$E_{[\int \phi\, dE]g, [\int \phi\, dE]g}(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2 dE_{g,g}\,.$$

Beweis. Zu Beginn sei bemerkt, dass für jedes $g \in H$

$$\lim_{N\to\infty} E(\Delta_N) g = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}) g = g$$

wobei $\Delta_0 := \emptyset$. Insbesondere liegt $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ dicht in H.

(i) Aus Bemerkung 4.5.3 ist bekannt, dass $\operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right] = \operatorname{ran}\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]$. Wegen Proposition 4.4.3 folgt somit $g \in \operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right] \Leftrightarrow \int_\Omega |\phi_2|^2\, dE_{g,g} < +\infty$. Wegen $|\phi| - \|\phi_1\|_\infty \leq |\phi_2| \leq |\phi| + \|\phi_1\|_\infty$ ist das zu $\int_\Omega |\phi|^2\, dE_{g,g} < +\infty$ äquivalent.

(ii) Für $g \in \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ gilt $g = E(\Delta_n) g$. Da ϕ_2 auf Δ_n beschränkt ist, erhalten wir

$$g = E(\Delta_n) g = \left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g,$$

also $g \in \operatorname{ran}\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right] = \operatorname{dom}\left[\int \phi \, dE\right]$ mit

$$\left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1} g = \left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g\,.$$

Somit gilt

$$\left[\int \phi \, dE\right] g = \left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1} g + \left[\int \phi_1 \, dE\right] g =$$

$$\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g + \left[\int \phi_1 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g = \left[\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n})\, dE\right] g\,.$$

(*iii*) Zunächst gilt wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\int \mathbb{1}_{\Delta_n} |\phi|^2 \, dE_{g,g} \nearrow \int_\Omega |\phi|^2 \, dE_{g,g} ,$$

egal, ob die rechte Seite endlich ist, oder nicht. Offensichtlich ist die rechte Seite genau dann endlich, wenn die linke eine Cauchy-Folge ist. Wegen ($n \geq m$)

$$\| \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] g - \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_m} \, dE \right] g \|^2 = \| \left[\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n \setminus \Delta_m}) \, dE \right] g \|^2 =$$

$$\int \mathbb{1}_{\Delta_n \setminus \Delta_m} |\phi|^2 \, dE_{g,g} = \int \mathbb{1}_{\Delta_n} |\phi|^2 \, dE_{g,g} - \int \mathbb{1}_{\Delta_m} |\phi|^2 \, dE_{g,g} ,$$

ist das dazu äquivalent, dass $\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] g$ eine Cauchy-Folge, dh. eine konvergente Folge in H ist. In diesem Fall sei h der Grenzwert. Nun konvergiert wegen

$$\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] g = \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] E(\Delta_n) g \tag{4.38}$$

die Folge

$$(E(\Delta_n)g; \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] g) \tag{4.39}$$

von Paaren aus $\int \phi \, dE$ – siehe den vorherigen Punkt – gegen $(g; h)$. Wegen der Abgeschlossenheit muss $\left[\int \phi \, dE \right] g = h$.

(*iv*) Zunächst gilt für $m < n$ sicherlich $\operatorname{ran} E(\Delta_m) \subseteq \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ sowie für $g \in \operatorname{ran} E(\Delta_m)$ wegen $g = E(\Delta_m)g$

$$\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}) \, dE \Big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_n)} g = \int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_m}) \, dE \Big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_m)} g .$$

Also ist

$$\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}) \, dE \Big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_n)} \quad \text{Fortsetzung von} \quad \int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_m}) \, dE \Big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_m)} .$$

Damit ist C ein Operator mit Definitionsbereich R. Wegen des vorvorherigen Punktes gilt $C \subseteq \int \phi \, dE$.

Außerdem haben wir im vorherigen Punkt gesehen, dass für $g \in \operatorname{dom} \left[\int \phi \, dE \right]$ die Folge von Paaren aus (4.39) gegen $(g; \left[\int \phi \, dE \right] g)$ konvergiert Wegen (4.38) und $E(\Delta_n)g \in \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ liegt diese Folge in C, also $\overline{C} = \int \phi \, dE$.

(*v*) Die Unabhängigkeit von der gewählten Zerlegung $\phi = \phi_1 + \phi_2$ folgt aus dem vorherigen oder vorvorherigen Punkt.

(*vi*) Ist $g \in \operatorname{dom} \left[\int \phi \, dE \right]$, so gilt

$$\left[\int \phi \, dE \right] g = \lim_{n \to \infty} \left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE \right] g .$$

Damit gilt für $\Delta \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} E_{[\int \phi\, dE]g,[\int \phi\, dE]g}(\Delta) &= \|E(\Delta)\left[\int \phi\, dE\right] g\|^2 = \\ &= \|E(\Delta) \lim_{n\to\infty}\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g\|^2 = \\ &= \|\lim_{n\to\infty} E(\Delta)\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g\|^2 = \\ &= \|\lim_{n\to\infty}\left[\int \phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n \cap \Delta}\, dE\right] g\|^2 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\phi|^2 \mathbb{1}_{\Delta_n\cap\Delta}\, dE_{g,g} = \int_\Delta |\phi|^2\, dE_{g,g}\,. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.5.5. Ist $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ und setzt man $\Delta_n := \{t \in \Omega : |\phi(t)| \le n\}$, so ist ϕ auf allen Δ_n beschränkt und offensichtlich gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Omega$.

Proposition 4.5.6. *Sei $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$. Es gilt*

(i) *Für $\lambda \neq 0$ gilt $\lambda\left[\int \phi\, dE\right] = \int \lambda\phi\, dE$.*

(ii) $\left[\int \phi\, dE\right]^* = \int \overline{\phi}\, dE$ *(Konjugieren in $\mathbb{C}$).*

(iii) $\overline{\left[\int \phi_1\, dE\right] + \left[\int \phi_2\, dE\right]} = \int (\phi_1 + \phi_2)\, dE$ *(Abschluss einer linearen Relation).*

(iv) $\overline{\left[\int \phi_1\, dE\right]\left[\int \phi_2\, dE\right]} = \int \phi_1 \cdot \phi_2\, dE$ *(Abschluss einer linearen Relation).*

(v) *Ist $\phi(t) \neq 0,\ t \in \Omega$, so gilt $\left[\int \phi\, dE\right]^{-1} = \int \frac{1}{\phi}\, dE$.*

(vi) $\sigma(\int \phi\, dE) \subseteq \overline{\phi(\Omega)}$ *als Teilmengen von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Beweis.

(i) Folgt unmittelbar aus (4.37) und der Tatsache, dass der Abschluss von λC gleich λ mal dem Abschluss von C ist.

(ii) Schreiben wir ϕ als $\phi = \phi_1 + \phi_2$ mit beschränktem ϕ_1 und mit $|\phi_2| \ge \delta > 0$, so gilt

$$\int \phi\, dE = \left[\int \frac{1}{\phi_2}\, dE\right]^{-1} + \int \phi_1\, dE\,.$$

Aus dem bekannten Funktionalkalkül für beschränkte Funktionen folgt, dass die Adjungierten von $\int \phi_1\, dE$ bzw. $\int \frac{1}{\phi_2}\, dE$ gerade $\int \overline{\phi_1}\, dE$ bzw. $\int \frac{1}{\overline{\phi_2}}\, dE$ sind. Zusammen mit Lemma 4.3.3 folgt

$$\left[\int \phi\, dE\right]^* = \left[\int \frac{1}{\overline{\phi_2}}\, dE\right]^{-1} + \int \overline{\phi_1}\, dE\,.$$

Wegen Lemma 4.5.4, (iii), stimmt das mit $\int \overline{\phi}\, dE$ überein.

(iii) Man wähle eine monoton wachsende Folge von Mengen $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Omega$, sodass ϕ_1 und ϕ_2 beide auf allen Δ_n beschränkt sind. Damit ist auch $\phi_1 + \phi_2$ auf allen Δ_n beschränkt.

Ist $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ und $A_1 = \int \phi_1 \, dE$, $A_2 = \int \phi_2 \, dE$ und $A = \int (\phi_1 + \phi_2) \, dE$, so wissen wir aus Lemma 4.5.4, dass R im Definitionsbereich aller dieser Operatoren enthalten ist.

Für $g \in R$, also $g \in \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, gilt mit $C := A|_R$

$$Cg = \left[\int (\phi_1 + \phi_2) \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g =$$

$$= \left[\int \phi_1 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g + \left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g = A_1 g + A_2 g \, .$$

Also $C \subseteq A_1 + A_2$ und daher $A = \overline{C} \subseteq \overline{A_1 + A_2}$.

Ist andererseits $g \in \operatorname{dom}(A_1 + A_2)$ $(= \operatorname{dom} A_1 \cap \operatorname{dom} A_2)$, so folgt aus Lemma 4.5.4, dass $\phi_1, \phi_2 \in L^2(E_{g,g})$ und daher auch $\phi_1 + \phi_2 \in L^2(E_{g,g})$. Also liegt nach Lemma 4.5.4 das Element g auch in $\operatorname{dom}(A)$. Dabei konvergiert

$$\left[\int (\phi_1 + \phi_2) \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g = \left[\int \phi_1 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g + \left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g$$

einerseits gegen Ag und andererseits gegen $A_1 g + A_2 g$. Also gilt auch $A_1 + A_2 \subseteq A$ und, da A abgeschlossen ist, auch $\overline{A_1 + A_2} \subseteq A$.

(iv) Wähle die Folge $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, wie eben. Außerdem sei wieder $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} E(\Delta_n)$, $A_1 = \int \phi_1 \, dE$, $A_2 = \int \phi_2 \, dE$ und $A = \int (\phi_1 \phi_2) \, dE$.

Für $g \in R$, also $g \in \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, gilt mit $C := A|_R$ wegen dem schon bekannten Funktionalkalkül

$$\begin{aligned} Cg &= \left[\int (\phi_1 \phi_2) \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g = \\ &= \left[\int \phi_1 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right]\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g = \\ &= A_1 A_2 g \, . \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g \in R$ und daher in $\operatorname{dom}(A_1)$. Also $C \subseteq A_1 A_2$ und daher $A = \overline{C} \subseteq \overline{A_1 A_2}$.

Ist andererseits $g \in \operatorname{dom}(A_1 A_2)$ $(\subseteq \operatorname{dom} A_2)$, so folgt aus Lemma 4.5.4, (vi), dass $E_{A_2 g, A_2 g}(\Delta) = \int_\Delta |\phi_2|^2 \, dE_{g,g}$ für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$. Zudem ist $A_2 g \in \operatorname{dom} A_1$, also

$$+\infty > \int_\Omega |\phi_1|^2 \, dE_{A_2 g, A_2 g} = \int_\Omega |\phi_1 \cdot \phi_2|^2 \, dE_{g,g} \, ,$$

und daher auch $\phi_1 \cdot \phi_2 \in L^2(E_{g,g})$. Also liegt g in $\operatorname{dom}(A)$. Nun gilt

$$A_2 g = \lim_{n\to\infty} \left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE\right] g \, .$$

Offensichtlich gilt $\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g \in \operatorname{ran} E(\Delta_n)$ und daher

$$\begin{aligned} A_1 \left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g &= \left[\int \phi_1 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right]\left[\int \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g \\ &= \left[\int \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}\, dE\right] g\,. \end{aligned}$$

Wegen $g \in \operatorname{dom}(A)$ wissen wir aus Lemma 4.5.4, dass dieser Ausdruck gegen Ag konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von A_1 folgt $A_1(A_2 g) = Ag$, und daher $A_1 A_2 \subseteq A$. Wegen der Abgeschlossenheit von A folgt auch $A \supseteq \overline{A_1 A_2}$.

(*v*) Sei $A := \int \phi\, dE$ und $B := \int \frac{1}{\phi}\, dE$. Ist $g \in \operatorname{dom} A$, so folgt aus Lemma 4.5.4, (*vi*), dass $E_{Ag,Ag}(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2\, dE_{g,g}$ für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$. Also gilt

$$\int_\Omega \left|\frac{1}{\phi}\right|^2 dE_{Ag,Ag} = \int_\Omega 1\, dE_{g,g} < +\infty\,,$$

und damit $Ag \in \operatorname{dom}(B)$. Aus dem letzten Punkt folgt zudem $BA \subseteq I$, also $(Ag; g) \in B$ und damit $A^{-1} \subseteq B$. Die umgekehrte Richtung folgt genauso.

(*vi*) Sei $\lambda \neq \infty$. Ist $\lambda \notin \overline{\phi(\Omega)}$, so ist $\frac{1}{\phi-\lambda}$ eine beschränkte Funktion auf Ω, also

$$\int \frac{1}{\phi - \lambda}\, dE \in L_b(H)\,.$$

Nach (*iii*) und (*v*) gilt aber

$$\left[\int \phi\, dE - \lambda I\right]^{-1} = \int \frac{1}{\phi - \lambda}\, dE\,,$$

und daher $\lambda \in \rho(\int \phi\, dE)$.

Ist $\lambda = \infty \notin \overline{\phi(\Omega)}$, so bedeutet das, dass ϕ beschränkt ist und daher $\int \phi\, dE$ beschränkt ist, bzw. $\infty \in \rho(\int \phi\, dE)$.

■

4.6 Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Satz 4.6.1. *Sei $A : \operatorname{dom}(A)\ (\subseteq H) \to H$ ein selbstadjungierter Operator, dh. $A \subseteq H^2$ ist eine selbstadjungierte lineare Relation mit* $\operatorname{mul} A = \{0\}$. *Dann gibt es genau ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H\rangle$, sodass*

$$A = \int t\, dE(t)$$

im Sinne des Funktionalkalküls für unbeschränkte messbare Funktionen. Dabei lebt E nur auf $\sigma(A) \cap \mathbb{R}$, dh. $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$.

Beweis. Sei $U := C(A)$ die Cayley-Transformierte von A. Nach Satz 4.3.12 ist U unitär, sodass $1 \notin \sigma_p(U)$; vgl. Bemerkung 4.3.13. Korollar 2.2.4 liefert ein eindeutiges Spektralmaß F für $\langle \mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), H \rangle$, sodass

$$U = \int \zeta \, dF(\zeta) .$$

Wegen $1 \notin \sigma_p(U)$ gilt $F(\{1\}) = 0$; vgl. Korollar 4.4.2. Schränkt man F auf alle Borelteilmengen von $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ wie in Fakta 2.1.12 ein, so erhält man ein Spektralmaß F für $\langle \mathbb{T} \setminus \{1\}, \mathfrak{B}(\mathbb{T} \setminus \{1\}), H \rangle$, sodass auch

$$U = \int_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \zeta \, dF(\zeta) .$$

Nun gilt $A = \mathcal{F}(U) = -i(I + 2(U - I)^{-1})$. Die Funktion

$$\phi_{\mathcal{F}}(\zeta) := -i(1 + \frac{2}{\zeta - 1}) = \frac{\zeta + 1}{i(\zeta - 1)}$$

ist auf $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ eine messbare komplexwertige Funktion. Aus Proposition 4.5.6 folgt

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \phi_{\mathcal{F}} \, dF = -i(I + 2(U - I)^{-1}) = A . \tag{4.40}$$

Nun beachte man, dass $\phi_{\mathcal{F}}$ eine Möbiustransformation ist, und $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet; vgl. Bemerkung 4.2.3 sowie (4.31).
Gemäß Fakta 2.1.12 ist $E := F^{\phi_{\mathcal{F}}}$, dh. $E(\Delta) := F(\phi_{\mathcal{F}}^{-1}(\Delta))$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H \rangle$, für das

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, dE = \int_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \phi \circ \phi_{\mathcal{F}} \, dF \tag{4.41}$$

für alle $\phi \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ gilt. Weil man jedes messbare $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als $\phi_1 + \phi_2$ mit $\phi_1, \frac{1}{\phi_2} \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ schreiben kann, gilt wegen Proposition 4.5.6 die Gleichung (4.41) sogar für alle $\phi \in U(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Nimmt man $\phi(t) = t$, so folgt zusammen mit (4.40) $A = \int_{\mathbb{R}} t \, dE(t)$.
Wäre $\tilde{E}$ ein weiteres Spektralmaß mit dieser Eigenschaft, so schließt man ähnlich wie eben, dass $\tilde{F} := \tilde{E}^{\phi_{\mathcal{F}}^{-1}|_{\mathbb{R}}}$, dh. $\tilde{F}(\Delta) = \tilde{E}(\phi_{\mathcal{F}}(\Delta \setminus \{1\}))$, ein Spektralmaß auf $\mathbb{T}$ wäre, das

$$A = \int_{\mathbb{T}} \phi_{\mathcal{F}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \, d\tilde{F} = \int \frac{\zeta + 1}{i(\zeta - 1)} \, d\tilde{F}(\zeta)$$

erfüllt. Mit Proposition 4.5.6 ergibt sich daraus

$$U = I - 2i(A + iI)^{-1} = \int \zeta \, d\tilde{F}(\zeta) ,$$

also $F = \tilde{F}$ und weiter $E = \tilde{E}$. Schließlich folgt aus Korollar 4.3.15, dass $\phi_{\mathcal{F}}(\sigma(U)) = \sigma(A)$, und weiter

$$E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = F\Big(\phi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \sigma(A))\Big) = F((\mathbb{T} \setminus \{1\}) \setminus \sigma(U)) = 0 .$$

∎

Beispiel 4.6.2. Mithilfe dieses Satzes können noch weitere Aussagen über den in Beispiel 4.3.6 und Beispiel 4.3.26 betrachteten Differentialoperator

$$T := \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1], f' = ig\right\}$$

gemacht werden. Wie in Beispiel 4.3.26 gezeigt, ist

$$A := \left\{(f,g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1],\ f' = ig,\ f(0) = f(1)\right\}$$

eine selbstadjungierte Einschränkung von T mit $\sigma(A) = 2\pi\mathbb{Z}$. Nach dem Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren gibt es ein eindeutiges Spektralmaß E zu A, welches nur auf $\sigma(A)$ lebt. Dieses kann genauer bestimmt werden. Für $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$ folgt mit den Resultaten aus Beispiel 4.3.26

$$E(\{\lambda\}) = P_{\ker(A-\lambda)} = P_{\operatorname{span}\{e^{i\lambda x}\}}.$$

Für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ kann $E(\Delta)$ somit über die Summe

$$E(\Delta)g = E(\Delta \cap \sigma(A))g = \sum_{\lambda \in \Delta \cap \sigma(A)} E(\{\lambda\})\, g = \sum_{\lambda \in \Delta \cap \sigma(A)} \left(g(x), e^{i\lambda x}\right)_{L^2} e^{i\lambda x}$$

berechnet werden.

Beispiel 4.6.3. Zum Abschluss möchten wir noch den Differentialoperator auf $\mathbb{R}$ betrachten. In Beispiel 4.3.6 wurde bereits gezeigt, dass die abgeschlossenen Relationen

$$T^{[0,1]} = \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1], f' = ig\right\}$$
$$T_{00}^{[0,1]} = \left\{(f;g) \in (L^2[0,1])^2 : f \in AC[0,1],\ f' = ig,\ f(0) = f(1) = 0\right\}$$

durch die Beziehungen $(T_{00}^{[0,1]})^* = T^{[0,1]}$ und $(T^{[0,1]})^* = T_{00}^{[0,1]} \subsetneq T^{[0,1]}$ verknüpft sind. Ersetzt man $[0,1]$ durch ein beliebiges $[a,b]$, so gelten die entsprechenden Aussagen für die entsprechenden Differentialoperator $T^{[a,b]}$ und $T_{00}^{[a,b]}$. Wir möchten nun auf den Differentialoperator auf ganz $\mathbb{R}$ eingehen. Setzt man $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f|_{[a,b]} \in AC[a,b]$ für alle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, so wird durch

$$T := \left\{(f;g) \in L^2(\mathbb{R}) : f \in AC_{loc}(\mathbb{R}), f' = ig\right\}$$

eine lineare Relation definiert. Wir behaupten, dass T selbstadjungiert ist. Zunächst werden wir nachweisen, dass T abgeschlossen ist. Sei dazu eine Folge $(f_n; g_n)$ gewählt, die in $L^2(\mathbb{R})^2$ gegen $(f;g)$ konvergiert. Für $N \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gilt daher

$$f_n|_{[-N,N]} \xrightarrow{L^2[-N,N]} f|_{[-N,N]}$$
$$g_n|_{[-N,N]} \xrightarrow{L^2[-N,N]} g|_{[-N,N]}\ .$$

Da $T^{[-N,N]}$ abgeschlossen ist, muss

$$(f|_{[-N,N]}; g|_{[-N,N]}) \in T^{[-N,N]}$$

gelten. Da N beliebig war und Differenzieren ein lokaler Vorgang ist, folgt $(f;g) \in T$. T ist also abgeschlossen und daher $T^{**} = T$.

Außerdem gilt $T^* \subseteq T$. Dazu sei $(h;k) \in T^*$. Dann gilt $(f;k) = (g;h)$ für alle $(f;g) \in T$. Man beachte $(h_{[-N,N]}; k|_{[-N,N]}) \in (T_{00}^{[-N,N]})^*$, denn wenn $(a;b) \in T_{00}^{[-N,N]}$ und $\tilde{a}, \tilde{b}$ die auf $\mathbb{R}$ mit 0 fortgesetzten Funktionen a, b bezeichnen, dann ist

$$(a, k|_{[-N,N]})_{L^2[-N,N]} = (\tilde{a}, k)_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(\tilde{a};\tilde{b})\in T}{=} (\tilde{b}, h)_{L^2(\mathbb{R})} = (b, h|_{[-N,N]})_{L^2[-N,N]} \, .$$

Damit folgt

$$(h_{[-N,N]}; k|_{[-N,N]}) \in (T_{00}^{[-N,N]})^* = T^{[-N,N]}, \quad \forall N \in \mathbb{N} \, ,$$

womit $(h;k)$ in T liegt.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $S := T^*$. Dann gilt $S \subseteq S^*$, womit S symmetrisch ist. Für die Selbstadjungiertheit von T betrachten wir die Defektindizes

$$n_+ = \dim \operatorname{ran}(S - i)^{\perp} = \dim \ker(S^* + i) = \dim \ker(T + i)$$

von S. Somit gilt

$$\begin{aligned} f \in \ker(S^* + i) &\Leftrightarrow (f; -if) \in T \\ &\Leftrightarrow f \in AC_{loc}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \ f' = f \end{aligned}$$

Da $f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ zusammen mit $f' = f$ impliziert, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, ist obige Aussage äquivalent zur Existenz eines $C \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = C \cdot e^x$ zu $L^2(\mathbb{R})$ gehört, was aber nur für $C = 0$ tatsächlich richtig ist. Daher gilt für den Defektindex

$$n_+ = \dim \ker(T + i) = 0 \, .$$

Analog zeigt man, dass auch $n_- = 0$. Mit Korollar 4.3.23 folgt daraus, dass T selbstadjungiert ist.

Über Funktionen in $\operatorname{dom} T$ kann man noch weitere Aussagen treffen. Sei $(f;g) \in T$. Mithilfe der partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(s)\overline{f(s)}\, ds + \int_0^t f(s)\overline{f'(s)}\, ds = \\ &= \left(|f|^2 \,|_0^t - \int_0^t f(s)\overline{f'(s)}\, ds \right) + \int_0^t f(s)\overline{f'(s)}\, ds \\ &= |f|^2 \,|_0^t = |f(t)|^2 - |f(0)|^2. \end{aligned}$$

Die linke Seite konvergiert für $t \to \infty$ gegen eine reelle Zahl, da $f|_{\mathbb{R}^+}, f'|_{\mathbb{R}^+} = g|_{\mathbb{R}^+} \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Daher existiert $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = c \in \mathbb{R}$. Um f in $L^2(\mathbb{R})$ zu gewährleisten, muss $c = 0$ sein. Analog folgt $\lim_{t\to-\infty} |f(t)| = 0$. Insgesamt muss also $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ sein.

Interessant ist auch das Zusammenspiel von T, der Fouriertransformation und dem Multiplikationsoperator. Die Fouriertransformation U ist auf dem dichten Teilraum $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ durch

$$U(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)\, dt$$

festgelegt und lässt sich, wie in der Analysis gezeigt wird, zu einem unitären Operator $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ fortsetzen. Bezeichne

$$M_t : \begin{cases} \operatorname{dom} M_t & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f(t) & \mapsto & tf(t) \end{cases}$$

den Multiplikationsoperator wie in Satz 2.3.1. Von dort wissen wir, dass M_t abgeschlossen ist. Man überprüft direkt, dass M_t sogar symmetrisch ist. Da für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ die Funktion $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist und daher der Operator $M_{\frac{1}{t-\lambda}}$ auch beschränkt ist, und da dieser mit der Relation $(M_t - \lambda I)^{-1}$ übereinstimmt, hat M_t Defekt Index $(0,0)$, ist also selbstadjungiert.
Ist $R \leq L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ eine lineare Relation, so folgt aus

$$\begin{aligned} (h;k) \in ((U \times U)(R))^* &\Leftrightarrow (\tilde{f},k) = (\tilde{g},h) \quad \forall(\tilde{f};\tilde{g}) \in (U \times U)(R) \\ &\Leftrightarrow (Uf,k) = (Ug,h) \quad \forall(f;g) \in R \\ &\Leftrightarrow (f,U^{-1}k) = (g,U^{-1}h) \quad \forall(f;g) \in R \\ &\Leftrightarrow (U^{-1}h;U^{-1}k) \in R^* \\ &\Leftrightarrow (h;k) \in (U \times U)(R^*) \end{aligned} \tag{4.42}$$

dass $((U \times U)(R))^* = (U \times U)(R^*)$. Dieses Faktum auf M_t angewandt zeigt, dass $(U \times U)(M_t) = U \circ M_t \circ U^{-1}$ wieder ein selbstadjungierter Operator ist.

Wie aus der Analysis bekannt entspricht für C^1-Funktionen dem Multiplizieren der Fouriertransformierten mit der unabhängigen Variablen das Fouriertransformieren der Ableitung und umgekehrt. Dem entsprechend ist es nicht überraschend, dass bei uns

$$(U \times U)(M_t) = -T \tag{4.43}$$

gilt. Dazu sei $(f;g) \in M_t$. Klarerweise gilt dann $(f \cdot \chi_{[-N,N]}; g \cdot \chi_{[-N,N]}) \in M_t,\ N \in \mathbb{N}$. Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$(f \cdot \chi_{[-N,N]}; g \cdot \chi_{[-N,N]}) \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})) \times (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))\,.$$

Die Fouriertransformation kann also in der Integralform angewendet werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} U(f \cdot \chi_{[-N,N]}) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \underbrace{e^{-itx} f(t)}_{|\cdot| \leq |f(t)|}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \frac{d}{dx} e^{-itx} f(t)\, dt = \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-itx} \cdot \big(tf(t)\big)\, dt = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-itx} g(t)\, dt \\ &= -i \cdot U(g \cdot \chi_{[-N,N]})\,. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$(U \times U)\ (f \cdot \chi_{[-N,N]}; g \cdot \chi_{[-N,N]}) \in -T\,.$$

Führt man den Grenzübergang $N \to \infty$ durch, so folgt aus der Abgeschlossenheit von T, dass $(U \times U)(f;g) \in -T$; also $(U \times U)(M_t) \subseteq -T$. Adjungiert man diese Beziehung auf beiden Seiten, so ergibt sich die umgekehrte Inklusion, da $(U \times U)(M_t)$ selbstadjungiert ist. Damit ist Formel (4.43) bewiesen.

4.7 Normale Lineare Relationen

Lemma 4.7.1. *Seien H_1 und H_2 zwei Vektorräume und $T \leq H_1 \times H_2$, $S \leq H_2 \times H_1$ lineare Relationen. Für $h, a \in H_1$ ist $(h; a) \in (I + ST)^{-1}$ äquivalent zur Existenz von $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in S$ mit $(h; 0) = (a; b) + (d; -c)$.*

Beweis. $(h; a) \in (I + ST)^{-1}$ bedeutet nichts anderes als $(a; h - a) \in ST$. Das ist äquivalent dazu, dass ein $b \in H_2$ existiert mit $(a; b) \in T$ und $(b; h - a) \in S$, also $(h; 0) = (a; b) + (h - a; -b)$.
Setzen wir $(c; d) := (b; h - a) \in S$, so folgt daraus $(h; 0) = (a; b) + (d; -c)$ mit $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in S$. Umgekehrt folgt aus $(h; 0) = (a; b) + (d; -c)$ mit $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in S$, dass $c = b$ und $d = h - a$. Nach dem ersten Absatz folgt $(h; a) \in (I + ST)^{-1}$. ■

Korollar 4.7.2. *Seien H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $T \leq H_1 \times H_2$ eine abgeschlossene lineare Relation und bezeichne $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} : H_2 \to H_2$ ($P_{(\operatorname{mul} T^*)^\perp} : H_1 \to H_1$) die orthogonale Projektion auf $(\operatorname{mul} T)^\perp$ ($(\operatorname{mul} T^*)^\perp$). Die orthogonale Projektion $P : H_1 \times H_2 \to H_1 \times H_2$ mit $P(H_1 \times H_2) = T$ hat bezüglich der Zerlegung $H_1 \times H_2$ die Blockoperatorform*

$$\begin{pmatrix} (I + T^*T)^{-1} & (P_{(\operatorname{mul} T^*)^\perp} T^*)(I + TT^*)^{-1} \\ (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)(I + T^*T)^{-1} & I - (I + TT^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

Dabei sind alle Einträge überall definierte Kontraktionen, die Diagonaleinträge sind auch selbstadjungiert, positiv und die Nebendiagonaleinträge sind Adjungierte von einander. Des weiteren gilt $\overline{\operatorname{ran}(I + T^*T)^{-1}} = \overline{\operatorname{dom} T^*T} = \overline{\operatorname{dom} T}$.

Beweis.

- Für $j = 1, 2$ bezeichne $\iota_j : H_j \to H_1 \times H_2$ die Abbildung definiert durch $\iota_1(x) = (x; 0)$ und $\iota_2(x) = (0; x)$ sowie $\pi_j : H_1 \times H_2 \to H_j$ definiert durch $\pi_j(x_1; x_2) = x_j$. Weiters sei $J : H_2 \times H_1 \to H_1 \times H_2$ die unitäre Abbildung mit $J(x_2; x_1) = \tau_{-1} \circ \tau_{H_2 \leftrightarrows H_1}(x_2; x_1) = (x_1; -x_2)$. Wegen (4.24) gilt

$$H_1 \times H_2 = T \oplus T^\perp = T \oplus J(T^*), \tag{4.44}$$

  Wenden wir Lemma 4.7.1 mit $S = T^*$ an, so ist $(h; a) \in (I + T^*T)^{-1}$ äquivalent zu $a = \pi_1 P \iota_1(h)$, da in $(h; 0) = (a; b) + (d; -c) = (a; b) + J(c; d)$ die $(a; b) \in T, (c; d) \in T^*$ eindeutig durch $(a; b) = P(h; 0)$ und $(I - P)(h; 0)$ bestimmt sind. Insbesondere gilt $\pi_1 P \iota_1 = (I + T^*T)^{-1}$, wobei dieser Ausdruck ein überall definierter, kontraktiver und selbstadjungierter Operator ist.

- Offenbar gilt $\operatorname{ran}(I + T^*T)^{-1} = \operatorname{dom}(I + T^*T) = \operatorname{dom} T^*T \subseteq \operatorname{dom} T$. Andererseits folgt für $h \in (\operatorname{ran}(I + T^*T)^{-1})^\perp = \ker(I + T^*T)^{-1}$ in der Gleichung $(h; 0) = (a; b) + (d; -c)$ auch $a = 0$, womit $c = b \in \operatorname{mul} T \cap \operatorname{dom} T^* = \{0\}$ und folglich $h = d \in \operatorname{mul} T^* = (\operatorname{dom} T)^\perp$. Also gilt $(\operatorname{ran}(I + T^*T)^{-1})^\perp \subseteq (\operatorname{dom} T)^\perp$ und daher $\overline{\operatorname{dom} T} \subseteq \overline{\operatorname{ran}(I + T^*T)^{-1}}$.

- Aus $(h; 0) = (a; b) + (d; -c)$ mit $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in T^*$ folgt auch $b = c \in \operatorname{dom} T^* \perp \operatorname{mul} T$, womit $(h; a) \in (I + T^*T)^{-1}$ und $(a; b) \in T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul} T)^\perp) = P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$, also $(h; b) \in (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)(I + T^*T)^{-1}$. Wir erhalten $\pi_2 P \iota_1 \subseteq (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)(I + T^*T)^{-1}$. Da rechts ein Operator steht und die linke Seite einen überall definierten

und kontraktiven Operator darstellt, gilt auch hier Gleichheit, zusammenfassend also
$$(I+T^*T)^{-1} = \pi_1 P\iota_1 \quad \text{und} \quad (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)(I+T^*T)^{-1} = \pi_2 P\iota_1\,.$$

- Wenden wir die Inverse des unitären J auf (4.44) an, so folgt $H_2 \times H_1 = J^{-1}(T \oplus JT^*) = T^* \oplus J^{-1}(T) = T^* \oplus J((T^*)^*)$. Dabei ist $J^{-1}(I-P)J$ die orthogonale Projektion auf $J^{-1}(T^\perp) = T^*$. Die Erkenntnisse von oben angewandt auf T^* ergeben
$$(I+TT^*)^{-1} = \pi^1 J^{-1}(I-P)J\iota^1 \quad \text{und} \quad (P_{(\operatorname{mul} T^*)^\perp} T^*)(I+TT^*)^{-1} = \pi^2 J^{-1}(I-P)J\iota^1\,,$$
wobei hier $\iota^1(h) = (h;0) \in H_2 \times H_1$ für $h \in H_2$ und $\pi^1(e;f) = e \in H_2$ und $\pi^2(e;f) = f \in H_1$ für $(e;f) \in H_2 \times H_1$. Wegen $J\iota^1 = -\iota_2$, $\pi^1 J^{-1} = -\pi_2$ und $\pi^2 J^{-1} = \pi_1$ erhalten wir auch
$$(I+TT^*)^{-1} = \pi_2(I-P)\iota_2 \quad \text{und} \quad (P_{(\operatorname{mul} T^*)^\perp} T^*)(I+TT^*)^{-1} = -\pi_1(I-P)\iota_2 = \pi_1 P\iota_2\,.$$

■

Im Fall, dass $H_1 = H_2$ und dass T normal ist, also $TT^* = T^*T$ gilt, erhalten wir $P_{22} = I - P_{11}$, womit wir aus $PP = P$ die Gleichheiten $P_{11} = P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21}$, $(I-P_{11}) = (I-P_{11})(I-P_{11}) + P_{21}P_{12}$ und $P_{21} = P_{21}P_{11} + (I-P_{11})P_{21}$ erhalten, dass $P_{12}P_{21} = P_{21}P_{12}$ und $P_{21}P_{11} = P_{11}P_{21}$.

Kapitel 5

Operatorhalbgruppen

In diesem Kapitel sei X immer ein fester Banachraum.

5.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zunächst wollen wir an Banachraumwertige Riemann-Integrale erinnern.

Fakta 5.1.1. Sei X ein Banachraum und $[a, b]$ ein reelles Intervall.

1. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to X$ ist immer Riemann-integrierbar, dh. der Grenzwert
$$\int_a^b f(\tau)\, d\tau \quad \in X\,,$$
der Riemann-Summen, wenn die Feinheit der Riemann-Zerlegung gegen Null geht, existiert. Dabei gilt immer
$$\|\int_a^b f(\tau)\, d\tau\| \leq \int_a^b \|f(\tau)\|\, d\tau \leq (b-a) \sup_{\tau\in[a,b]} \|f(\tau)\|\,.$$

2. Ist $f : [a, b] \to X$ stetig, so ist die Funktion $F : [a, b] \to X$,
$$F(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau\,,$$
stetig differenzierbar (und damit auch stetig), dh. für alle $t \in [a, b]$ existiert der Grenzwert
$$F'(t) = \lim_{s\to t,\ s\in[a,b]} \frac{F(s) - F(t)}{s - t} \quad \in X\,,$$
und $t \mapsto F'(t)$ ist stetig, wobei $F' = f$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

3. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to X$ stetig differenzierbar, so ist $F' \in C([a, b], X)$ und die Funktion
$$G : t \mapsto \int_a^t F'(\tau)\, d\tau\,,$$
stimmt bis auf eine additive Konstante mit F überein, da aus $F' = G'$ bzw. $(F - G)' = 0$ folgt, dass $F - G \equiv c \in X$.

4. Ist nun $f : [0,+\infty) \to X$ stetig mit $\|f(\tau)\| \leq M \cdot e^{\omega\tau},\ \tau \in [0,+\infty)$, für gewisse $M, \omega \in \mathbb{R},\ M \geq 0,\ \omega < 0$, so ist wegen

$$\int_0^{+\infty} \|f(\tau)\|\, d\tau \leq M \int_0^{+\infty} e^{\omega\tau}\, d\tau = -M\frac{1}{\omega} < +\infty$$

das unbestimmte Integral $\int_0^{+\infty} f(\tau)\, d\tau$ absolut integrierbar. Also existiert

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\, d\tau := \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau\,,$$

und erfüllt

$$\|\int_0^{+\infty} f(\tau)\, d\tau\| \leq \int_0^{+\infty} \|f(\tau)\|\, d\tau \leq -M\frac{1}{\omega}\,.$$

5.2 Halbgruppen und Infinitesimale Generatoren

Definition 5.2.1. Ein Abbildung $T : [0,+\infty) \to L_b(X)$ heißt *Operatorhalbgruppe*, falls

(i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s,t \in [0,+\infty)$,

(ii) $T(0) = I$.

Eine Operatorhalbgruppe T heißt stark stetig, wenn die Abbildung T bei 0 bezüglich der starken Operatortopologie stetig ist, dh. wenn für alle $x \in X$

$$\lim_{h\searrow 0} \|T(h)x - x\| = 0\,.$$

Eine Operatorhalbgruppe T heißt gleichmäßig stetig, wenn die Abbildung T bei 0 bezüglich der Operatornorm auf $L_b(X)$ stetig ist, dh. wenn

$$\lim_{h\searrow 0} \|T(h)I - I\| = 0\,.$$

Offensichtlich sind alle gleichmäßig stetigen Operatorhalbgruppen auch stark stetig.

Satz 5.2.2. *Ist T eine stark stetige Operatorhalbgruppe, so gibt es $M, \omega \in \mathbb{R}, M \geq 0$, mit*

$$\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t},\quad t \in [0,+\infty)\,.$$

Ist diese Ungleichung für alle $t \geq 0$ erfüllt, so muss automatisch $M \geq 1$ gelten.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass es ein $\rho > 0$ gibt, sodass $t \mapsto \|T(t)\|$ auf einem Intervall $[0,\rho]$ beschränkt ist. Wäre dem nämlich nicht so, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $[0,\frac{1}{n}]$ ein t_n, sodass $\|T(t_n)\| \geq n$.
Für alle $x \in X$ folgt aus der starken Stetigkeit bei Null $\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x$. Insbesondere ist für jedes $x \in X$ die Menge $\{T(t_n)x : n \in \mathbb{N}\}$ in X beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Korollar 4.2.2 in [4], ist dann auch $\{T(t_n) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in $L_b(X)$, was aber $\|T(t_n)\| \geq n$ widerspricht.
Also muss $\|T(t)\| \leq C$ mit einem hinreichend großen $C \geq 1$ für alle $t \in [0,\frac{1}{n}]$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Aus der Halbgruppeneigenschaft folgt für $t \in [0,1]$

$$\|T(t)\| = \|T(\frac{t}{n} \cdot n)\| = \|T(\frac{t}{n})^n\| \leq \|T(\frac{t}{n})\|^n \leq C^n =: M\,.$$

Schließlich kann man jedes $t \in [0, +\infty)$ als $t = [t] + (t - [t])$ mit $[t] \in \mathbb{N}$ und $t - [t] \in [0, 1)$ schreiben, womit

$$\|T(t)\| = \|T([t])\, T(t - [t])\| \leq \|T(1)\|^{[t]} \cdot \|T(t - [t])\| \leq M^{[t]+1} \leq M \cdot e^{t \ln M} .$$

Setzen wir in $\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t}$ die Zahl t gleich Null, so folgt $M \geq 1$. ■

Korollar 5.2.3. *Für stark (gleichmäßig) stetige Operatorhalbgruppen ist die Abbildung $T : [0, +\infty) \to L_b(X)$ stetig bzgl. der starken Operatortopologie (der Abbildungsnorm).*

Beweis. Für $t \in (0, +\infty)$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $t + h \geq 0$ gilt

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| = \|\operatorname{sgn}(h)\, T(\min(t+h, t))\, (T(|h|)x - x)\| \leq M e^{\omega \min(t+h,t)} \|T(|h|)x - x\| ,$$

wobei $M, \omega \in \mathbb{R}$ wie in Satz 5.2.2 sind. Wegen der starken Stetigkeit bei Null folgt $\lim_{h \to 0} T(t + h)x = T(t)x$.
Der Beweis im gleichmäßig stetigen Fall verläuft analog. ■

Wegen der Stetigkeit von $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ lässt sich diese Funktion über jedes kompakte Teilintervall von $[0, +\infty)$ Riemann-integrieren. Da jedes Integral Grenzwert von Riemann-Summen ist, gilt für das lineare und stetige $T(s)$ für jedes $s \geq 0$

$$T(s) \int_0^r T(\tau)x\, d\tau = \int_0^r T(s)T(\tau)x\, d\tau = \int_0^r T(\tau + s)x\, d\tau = \int_0^r T(\tau)(T(s)x)\, d\tau .$$

Definition 5.2.4. Ist T eine stark stetige Operatorhalbgruppe, so wird die Relation

$$A := \{(x; y) \in X \times X : y = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}\}$$

als *infinitesimaler Generator* oder *infinitesimaler Erzeuger* von T bezeichnet.

Man beachte, dass die Beziehung $y = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{h}$ bedeutet, dass dieser Grenzwert in X existiert und mit y übereinstimmt, bzw. dass $[0, +\infty) \ni \tau \mapsto T(\tau)x \in X$ bei 0 bei 0 differenzierbar mit Ableitung y ist.
Da Grenzwertbilden mit dem Addieren und mit dem Skalarmultiplizieren verträglich ist, und da aus $(0; y) \in A$ offensichtlich $y = 0$ folgt, ist A eine lineare Relation mit $\operatorname{mul} A = \{0\}$. Also kann man A als einen im Allgemeinen nicht beschränkten Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$ betrachten.

Lemma 5.2.5. *Sei T eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf X und $x \in X$. Weiters bezeichne $T(.)x$ die Funktion $[0, +\infty) \ni \tau \mapsto T(\tau)x \in X$. Für $\rho > 0$ gilt*

$$\left(T(.) \int_0^\rho T(t)x\, dt \right)' (s) = T(s)\, (T(\rho)x - x) .$$

Für $s = 0$ folgt daraus

$$(\int_0^\rho T(t)x\, dt; (T(\rho) - I)x) \in A ,$$

weshalb

$$(T(\rho) - I) \left(x \mapsto \int_0^\rho T(t)x\, dt \right)^{-1} \subseteq A \tag{5.1}$$

im Sinne von linearen Relationen. Schließlich liegt $\operatorname{dom} A$ *dicht in X.*

Beweis. Bezüglich der ersten Behauptung gilt

$$\int_0^s T(t)(T(\rho)x-x)\,dt = \int_0^s T(t+\rho)x\,dt - \int_0^s T(t)x\,dt = \int_\rho^{s+\rho} T(t)x\,dt - \int_0^s T(t)x\,dt =$$

$$\int_s^{s+\rho} T(t)x\,dt - \int_0^\rho T(t)x\,dt = \int_0^\rho T(t+s)x\,dt - \int_0^\rho T(t)x\,dt =$$

$$T(s)\int_0^\rho T(t)x\,dt - \int_0^\rho T(t)x\,dt\,,$$

wobei man bei der letzten Gleichheit $T(s)$ aus dem Integral herausziehen darf, da $T(s)$ stetig und linear ist, und da Riemann-Integrale Grenzwerte entsprechender Netze sind. Leiten wir beide Seiten nach s ab, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung die behauptete Gleichheit.
Nach dem Hauptsatz gilt für jedes $x \in X$ die Grenzwertbeziehung $\lim_{\rho\to 0+} \frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)x\,dt = x$, woraus sofort die Dichtheit von $\operatorname{dom} A$ in X folgt. ■

Lemma 5.2.6. *Sei T eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf X und $x \in X$. Weiters bezeichne $T(.)x$ die Funktion $[0,+\infty) \ni \tau \mapsto T(\tau)x \in X$.*
Die Funktion $T(.)x$ ist genau dann auf ganz $[0,+\infty)$ differenzierbar, wenn sie bei 0 differenzierbar ist, wobei für $s \geq 0$

$$(T(.)x)'(s) = T(s)\,(T(.)x)'(0) = (T(.)\,T(s)x)'(0)\,.$$

Folglich gilt $A = \{(x;y) \in X\times X : (T(.)x)'(s) = T(s)y,\ \ s \in [0,+\infty)\}$ und $\{(T(t)x;T(t)y) : (x;y) \in A\} \subseteq A$, was auch $T(t)x \in \operatorname{dom} A$ und $T(t)Ax = AT(t)x$ für $x \in \operatorname{dom} A$ bedeutet.

Beweis. Die behauptete Gleichung gilt offensichtlich im Fall $s = 0$. Sei also $s > 0$. Wir setzen $c := (T(.)x)'(0)$. Für $h \in \mathbb{R}$ mit $s + h \geq 0$ gilt

$$\left\|\frac{T(s+h)x - T(s)x}{h} - T(s)c\right\| =$$

$$\|T(\min(s+h,s))\left(\frac{T(|h|)x - x}{|h|} - c\right) + (T(\min(s+h,s)) - T(s))c\| \leq$$

$$M\,e^{\omega \min(s+h,s)}\left\|\frac{T(|h|)x - x}{|h|} - c\right\| + \|T(\min(s+h,s))c - T(s)c\|\,.$$

Wegen Korollar 5.2.3 konvergiert dieser Ausdruck für $h \to 0$ gegen Null. Also gilt

$$T(s)c = \lim_{h\to 0} \frac{T(s+h)x - T(s)x}{h} = (T(.)x)'(s)$$

und daher auch

$$T(s)c = \lim_{h\searrow 0} \frac{T(s+h)x - T(s)x}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{T(h) - I}{h} T(s)x = (T(.)\,T(s)x)'(0)\,.$$

■

Lemma 5.2.7. *Ist T eine stark stetige Operatorhalbgruppe, A ihr infinitesimaler Generator und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $T_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}\,T(t)$ auch eine stark stetige Operatorhalbgruppe mit $A + \lambda I$ als infinitesimalen Generator.*

Beweis. Aus der Stetigkeit der $\mathbb{R}$- bzw. X-wertigen Funktionen $t \mapsto e^{\lambda t}$ und $t \mapsto T(t)x$ sowie der Stetigkeit der skalaren Multiplikation $(\mu; y) \mapsto \mu\, y$ als Abbildung $\mathbb{C} \times X \to X$ folgt auch die Stetigkeit von $t \mapsto e^{\lambda t}\, T(t)x$ als Abbildung $[0, +\infty) \to X$.
Die Halbgruppeneigenschaft von T_λ ist offensichtlich. Schließlich gilt für $x \in \operatorname{dom} A$ wegen der Produktregel (vgl. auch Lemma 5.2.11)

$$(e^{\lambda \cdot}\, T(.)x)'(0) = \lambda T(0)x + (T(.)x)'(0) = \lambda x + Ax\,.$$

Also gilt $A + \lambda I \subseteq B$ mit dem infinitesimalen Generator B von T_λ. Wendet man diese Tatsache auf $t \mapsto e^{-\lambda t}\, T_\lambda(t) = T(t)$ an, so folgt $B - \lambda I \subseteq A$; insgesamt also $A + \lambda I - \lambda I \supseteq B - \lambda I \supseteq A$ und damit $B - \lambda I = A$ bzw. $B = A + \lambda I$. ■

Bemerkung 5.2.8. Seien T eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf X und $M, \omega \in \mathbb{R}$ mit $M \geq 0$ mit $\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t)$ für $t \geq 0$ wie in Satz 5.2.2.
Für $\lambda \in (\omega, +\infty)$ und $x \in X$ gilt dann $\|e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\| \leq M e^{(\omega-\lambda)\tau} \|x\|$ und wegen der Stetigkeit von $\tau \mapsto e^{-\lambda\tau} T(\tau)x$ konvergiert gemäß Fakta 5.1.1, 4,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\, d\tau$$

in X absolut, wobei

$$\Big\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\, d\tau \Big\| \leq M \frac{1}{\lambda - \omega} \|x\|\,.$$

Also ist

$$C_\lambda : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\, d\tau$$

eine offensichtlich lineare und beschränkte Abbildung mit Abbildungsnorm kleiner oder gleich $M\frac{1}{\lambda-\omega}$. Wegen der Linearität und Stetigkeit von $T(s)$ für ein $s \geq 0$ gilt auch

$$T(s)C_\lambda x = T(s) \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\, d\tau = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-\lambda\tau} T(\tau)T(s)x\, d\tau = C_\lambda T(s)x\,.$$

Für $\omega < \lambda$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $T(s)C_\lambda = C_\lambda T(s)$ induktiv leicht, dass

$$C_\lambda^n x = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(\tau_1+\cdots+\tau_n)}\, T(\tau_1 + \cdots + \tau_n)x\, d\tau_1 \ldots d\tau_n\,,$$

und damit

$$\|C_\lambda^n x\| \leq \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(\tau_1+\cdots+\tau_n)} M e^{\omega(\tau_1+\cdots+\tau_n)}\, \|x\|\, d\tau_1 \ldots d\tau_n = M \frac{1}{(\lambda-\omega)^n} \|x\|\,;$$

also $\|C_\lambda^n\| \leq M \frac{1}{(\lambda-\omega)^n}$.
Beispiel 5.2.9. Sei X ein Banachraum. Bekannterweise ist $C_b([0, +\infty), X)$ versehen $\|.\|_\infty$ wieder ein Banachraum und

$$D := \{(f; g) \in C_b([0, +\infty), X) \times C_b([0, +\infty), X) : f \in C^1,\ f' = g\}$$

bildet offenbar eine lineare Relation darauf. Für eine Folge $((f_n; g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aus D, die gegen ein $(f; g) \in C_b([0, +\infty), X) \times C_b([0, +\infty)$ konvergiert, und $t \geq 0$ gilt wegen der

Stetigkeit der Punktauswertung bei t und der gleichmäßigen Konvergenz von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen g auf $[0, t]$

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(0) + \int_0^t g_n(s)\, ds \right) = f(a) + \int_a^t g(s)\, ds\,,$$

weshalb nach dem Hauptsatz $f \in C^1$ und $f' = g$, also $(f; g) \in D$. Damit ist D in $C_b([0, +\infty), X) \times C_b([0, +\infty), X)$ abgeschlossen.

Proposition 5.2.10. *Sei T eine stark stetige Operatorhalbgruppe mit $\|T(t)\| \le M\, e^{\omega t}$, $t \in [0, +\infty)$, für feste $M, \omega \in \mathbb{R}$ mit $M \ge 0$, und sei A ihr infinitesimaler Generator. Dann ist A abgeschlossen und es gilt $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$, wobei (vgl. Bemerkung 5.2.8)*

$$(A - \lambda)^{-1} = -C_\lambda = (x \mapsto -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\, T(\tau)x\, d\tau)$$

für alle $\lambda \in (\omega, +\infty)$[1].

Beweis. Die Relation $A - \omega$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A es ist, wobei nach Lemma 5.2.7 die Relation $A - \omega$ der infinitesimale Generator der stark stetigen Operatorhalbgruppe $t \mapsto S(t) := e^{-\omega t}\, T(t)$ ist. Letztere Operatorhalbgruppe erfüllt $\|S(t)\| \le M$, $t \ge 0$, weshalb $R : X \to C_b([0, +\infty), X)$ mit $(Rx)(t) = S(t)x$, $t \in [0, +\infty)$, eine lineare und beschränkte Abbildung ist.
Nach Lemma 5.2.6 gilt $(x; y) \in A - \omega$ genau dann, wenn $(S(.)x)' = S(.)y$, was mit der Notation aus Beispiel 5.2.9 genau $(\iota(x); \iota(y)) \in D$ bedeutet. Also ist $A - \omega = (\iota \times \iota)^{-1}(D)$ als Urbild eines abgeschlossenen Unterraumes unter der linearen und beschränkten Abbildung $\iota \times \iota : X \times X \to C_b([0, +\infty), X) \times C_b([0, +\infty), X)$ abgeschlossen.
Für $\lambda > \omega$ haben wir in Bemerkung 5.2.8 festgestellt, dass

$$C_\lambda : X \to X,\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\, T(\tau)x\, d\tau\,,$$

ein linearer und beschränkter Operator ist. Für $x \in X$ gilt insbesondere

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-\lambda\tau}\, T(\tau)x\, d\tau = C_\lambda x\,.$$

Andererseits folgt aus $\|e^{-\lambda N}\, T(N)\| \le M e^{N(\omega-\lambda)} \to 0,\ N \to \infty$, dass $\lim_{N\to\infty}(e^{-\lambda N}\, T(N) - I)x = -x$. Somit konvergiert die Folge

$$\left(\int_0^N e^{-\lambda\tau}\, T(\tau)x\, d\tau; (e^{-\lambda N}\, T(N) - I)x \right),\ \ N \in \mathbb{N}\,,$$

von Paaren in $X \times X$, die nach Lemma 5.2.5 im infinitesimalen Generator $(A - \lambda)$ der Operatorhalbgruppe $t \mapsto e^{-\lambda t}\, T(t)$ (siehe Lemma 5.2.7) liegen, gegen $(C_\lambda x; -x)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $A - \lambda$ folgt $(C_\lambda x; -x) \in A - \lambda$, und daher $-C_\lambda^{-1} \subseteq A - \lambda$ bzw. $-C_\lambda \subseteq (A - \lambda)^{-1}$.
Für $z \in \ker(A - \lambda)$ folgt aus Lemma 5.2.6 und Lemma 5.2.7, dass

$$(e^{-\lambda .}\, T(.)(z))'(s) = 0,\ \ s \ge 0\,,$$

[1]Diese Gleichung gilt sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

und somit $e^{-\lambda s}\, T(s)\,(z) = c$ für ein konstantes $c \in X$ und alle $s \in [0, +\infty)$. Wegen $\|e^{-\lambda s}\, T(s)\| \leq M e^{s(\omega-\lambda)} \to 0,\ s \to +\infty$ folgt $c = 0$ und daher $z = e^{-\lambda 0} T(0)(z) = 0$, also $\ker(A - \lambda) = \{0\}$.
Insbesondere steht der Inklusion $-C_\lambda \subseteq (A - \lambda)^{-1}$ links ein überall definierter Operator und rechts ein Operator, womit diese gleich sein müssen. ∎

Um den infinitesimalen Generator einer Halbgruppe weiter zu untersuchen, brauchen wir eine Verallgemeinerung der Produktregel fürs Differenzieren.

Lemma 5.2.11. *Seien X, Y Banachräume, $s \in [a, b]$ und $\phi : [a, b] \to X$ sowie $R : [a, b] \to L_b(X, Y)$ Abbildungen, sodass*

- $\|R(t)\| \leq C,\ t \in [a, b]$ *für ein gewisses* $C \geq 0$,
- ϕ *im Punkt s differenzierbar ist,*
- $t \mapsto R(t)x$ *stetig im Punkt s für zumindest $x = \phi'(s)$ ist,*
- $t \mapsto R(t)\,\phi(s)$ *im Punkt s differenzierbar ist.*

Dann ist auch $t \mapsto R(t)\,\phi(t)$ im Punkt s differenzierbar, wobei

$$(R(.)\phi(.))'(s) = (R(.)\phi(s))'(s) + R(s)\phi'(s)\,.$$

Beweis. Es gilt

$$\left\| \frac{R(t)\phi(t) - R(s)\phi(s)}{t - s} - (R(.)\phi(s))'(s) - R(s)\phi'(s) \right\| =$$

$$\Bigg\| \frac{R(t)\phi(t) - R(t)\phi(s) + R(t)\phi(s) - R(s)\phi(s)}{t - s}$$
$$-(R(.)\phi(s))'(s) - R(t)\phi'(s) + (R(t) - R(s))\phi'(s) \Bigg\| \leq$$

$$\|R(t)\left(\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} - \phi'(s)\right)\| + \left\| \frac{R(t)\phi(s) - R(s)\phi(s)}{t - s} - (R(.)\phi(s))'(s) \right\| + \|(R(t) - R(s))\phi'(s)\|\,.$$

Wegen $\|R(t)\left(\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} - \phi'(s)\right)\| \leq C\, \|\left(\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} - \phi'(s)\right)\|$ und wegen der gemachten Voraussetzungen konvergieren alle drei Summanden gegen 0, wenn $t \to s$. ∎

Korollar 5.2.12. *Sei T eine stark stetige Operatorhalbgruppe und A ihr infinitesimaler Erzeuger. Zu jedem $x \in \operatorname{dom} A$ ist $u(t) := T(t)x,\ t \in [0, +\infty)$, die eindeutige Lösung $u : [0, +\infty) \to \operatorname{dom} A$ des Anfangswertproblems*

$$u' = A\,u,\quad u(0) = x\,. \tag{5.2}$$

Beweis. Dass u das Anfangswertproblem löst haben wir in Proposition 5.2.10 gesehen. Die Eindeutigkeit folgt nun aus Lemma 5.2.11, denn ist $v : [0, +\infty) \to \operatorname{dom} A$ eine weitere Lösung von (5.2), so gilt für festes $s > 0$ und $t \in [0, s]$

$$(T(.)v(s-.))'(t) = (T(.)v(s-t))'(t) + T(t)(v(s-.))'(t) = T(t)\,Av(s-t) - T(t)\,Av(s-t) = 0\,.$$

Somit ist $T(.)v(s - .)$ konstant und es gilt $T(s)x = T(s)v(s - s) = T(0)v(s) = v(s)$. ∎

Korollar 5.2.13. *Seien T_1, T_2 zwei stark stetige Operatorhalbgruppen mit infinitesimalen Generatoren A_1 bzw. A_2. Falls $A_1 \subseteq A_2$, dann gilt $T_1 = T_2$.*
Insbesondere wird eine stark stetige Operatorhalbgruppe eindeutig durch ihren infinitesimalen Generator bestimmt.

Beweis. Für $x \in \operatorname{dom} A_1 \subseteq \operatorname{dom} A_2$ ist sowohl $T_1(.)x$ als auch $T_2(.)x$ eine Lösung von (5.2). Nach Korollar 5.2.12 gilt daher $T_1(s)x = T_2(s)x$. Da $\operatorname{dom} A_1$ nach Proposition 5.2.10 dicht in X ist, folgt aus der Stetigkeit von $T_1(s)$ und $T_2(s)$, dass $T_1(s) = T_2(s)$. ■

Proposition 5.2.14. *Sei T eine stark stetige Operatorhalbgruppe und A ihr infinitesimaler Generator. T ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn* $\operatorname{dom} A = X$ *bzw. genau dann, wenn $A \in L_b(X)$.*

Beweis. Weil A ein abgeschlossener Operator ist, sind $\operatorname{dom} A = X$ und $A \in L_b(X)$ wegen Proposition 4.1.6 äquivalent.
Ist T gleichmäßig stetig, so existiert $\int_0^\rho T(\tau)\,d\tau$ als $L_b(X)$-wertiges Riemann-Integral. Für $x \in X$ ist dabei

$$(\int_0^\rho T(\tau)\,d\tau)x = \int_0^\rho T(\tau)x\,d\tau\,,$$

da $\int_0^\rho T(\tau)\,d\tau$ ein Grenzwert von Riemann-Summen ist, und da die Abbildung $L_b(X) \to X$, $S \mapsto Sx$ linear und stetig ist.
Wegen der Stetigkeit bei 0 gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\|I - T(\tau)\| \leq \frac{1}{2}$ für $\tau \in (0, \delta]$. Nun gilt

$$\|\delta I - \int_0^\delta T(\tau)\,d\tau\| = \|\int_0^\delta (I - T(\tau))\,d\tau\| \leq \int_0^\delta \|I - T(\tau)\|\,d\tau \leq \frac{\delta}{2}\,,$$

und daher $\|I - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(\tau)\,d\tau\| \leq \frac{1}{2}$. Insbesondere ist $\int_0^\delta T(\tau)\,d\tau$ in $L_b(X)$ invertierbar. Aus (5.1) folgt aber

$$(T(\delta) - I)\left(x \mapsto \int_0^\delta T(t)x\,dt\right)^{-1} \subseteq A\,.$$

Die linke Seite ist nun ein überall definierter, beschränkter Operator. Da für die rechte Seite $\operatorname{mul} A = \{0\}$ gilt, muss hier Gleichheit herrschen.

Sei nun umgekehrt $A \in L_b(X)$. Wegen (5.1) folgt für $x \in X$ und $\rho > 0$

$$A\left(\int_0^\rho T(t)x\,dt\right) = (T(\rho) - I)x\,,$$

und daher

$$\|(T(\rho) - I)x\| \leq \|A\| \left\| \int_0^\rho T(t)x\,dt \right\| \leq \|A\|\rho \max_{t\in[0,\rho]} \|T(t)x\| \leq \|A\|\, M\, \rho\, \max(1, e^{\omega\rho})\, \|x\|\,,$$

wobei $M, \omega \in \mathbb{R}$ wie in Satz 5.2.2 sind. Somit folgt $\|(T(\rho) - I)\| \leq \|A\|\, M\, \rho\, e^{|\omega|\rho} \to 0$ für $\rho \searrow 0$. ■

Beispiel 5.2.15. Ist $A \in L_b(X)$ und $t \in \mathbb{R}$, so konvergiert

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

absolut im Banachraum $L_b(X)$. Als Funktion von t in jedem kompakten Intervall $[a, b]$, dh. als Element von $C([a, b], L_b(X))$, konvergiert sie wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t^n|}{n!} \|A\|^n \leq e^{\max(|a|,|b|)\, \|A\|} < +\infty$$

sogar gleichmäßig. Als gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen ist $t \mapsto e^{tA}$ auf $[a, b]$ stetig. Wegen der Beliebigkeit von $[a, b]$ ist sie stetig auf $\mathbb{R}$. Weiters gilt für $s \in \mathbb{R}$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz von e^{tA} auf $[-|s|, |s|]$

$$\int_0^s Ae^{tA}\, dt = A \int_0^s e^{tA}\, dt = A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{n!} t^n A^n\, dt = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} A^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} A^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n = e^{sA} - I\,.$$

Ableiten ergibt nach dem Hauptsatz $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$, da A und e^{tA} wegen der Stetigkeit von $B \mapsto AB$ bzw. von $B \mapsto BA$ vertauschen.
Aus dem selben Grund gilt allgemeiner für ein $B \in L_b(X)$, welches mit A vertauscht, dass auch $Be^{tA} = e^{tA}B$. Aus der Produktregel, die für differenzierbare Banachalgebrenwertige Funktionen ganz analog den $\mathbb{R}$-wertige Funktionen zu beweisen ist, folgt

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} e^{tB}\, e^{(-t)(A+B)}) = Ae^{tA} e^{tB}\, e^{(-t)(A+B)} + e^{tA} Be^{tB}\, e^{(-t)(A+B)} - e^{tA} e^{tB}\, (A+B) e^{(-t)(A+B)} = 0\,.$$

Also ist $t \mapsto e^{tA} e^{tB}\, e^{(-t)(A+B)}$ konstant gleich $e^{0A} e^{0B}\, e^{(-0)(A+B)} = I$. Für $t = 1$ folgt $e^A e^B\, e^{-(A+B)} = I$, wenn nur $AB = BA$. Für $B = 0$ folgt, dass e^{-A} die Inverse von e^A ist. Wenden wir letztere Tatsache auf $A + B$ an, so folgt aus $e^A e^B\, e^{-(A+B)} = I$ für alle $A, B \in L_b(X)$ mit $AB = BA$

$$e^A e^B = e^{A+B}\,. \tag{5.3}$$

Wenden wir das wiederum auf die kommutierenden Operatoren sA und tA mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $A \in L_b(X)$ an, so folgt $e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}$.
Insbesondere haben wir gezeigt, dass $t \mapsto e^{tA}$ für $t \in [0, +\infty)$ eine gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppe mit A als infinitesimalen Generator ist.

5.3 Satz von Hille-Yoshida

Lemma 5.3.1. *Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ dicht und sei $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz mit $T_\lambda \in L_b(X, Y)$, $\lambda \in \Lambda$, und*

$$\limsup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| := \inf_{\mu\in\Lambda} \sup_{\mu\leq\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < +\infty\,.$$

Ist $(T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ für alle $x \in D$ ein Cauchy-Netz, dann konvergiert $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ stark gegen ein eindeutiges $T \in L_b(X, Y)$, dh.

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda x = Tx\,,$$

für alle $x \in X$, wobei $\|T\| \leq \limsup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|$.

Beweis. Setze $C := \limsup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\|$. Zunächst gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\mu(\delta) \in \Lambda$, sodass $\sup_{\mu(\delta) \leq \lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| \leq C + \delta$ und daher $\|T_\lambda\| \leq C + \delta$ für alle $\lambda \geq \mu(\delta)$.
Sei nun $x \in X$ und wähle zu $\epsilon > 0$ ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \epsilon$. Sei $\lambda_1 \geq \mu(1)$ und $\lambda_1 \geq \lambda(\epsilon, y)$, wobei $\lambda(\epsilon, y) \in \Lambda$ so ist, dass $\|T_\lambda y - T_\mu y\| < \epsilon$ für alle $\lambda, \mu \geq \lambda(\epsilon, y)$. Dann gilt

$$\|T_\lambda x - T_\mu x\| \leq \|T_\lambda(x - y)\| + \|T_\lambda y - T_\mu y\| + \|T_\mu(y - x)\| \leq \\ 2(C + 1)\, \|x - y\| + \|T_\lambda y - T_\mu y\| < (2C + 3)\epsilon\,,$$

wenn nur $\lambda, \mu \geq \lambda_1$. Also ist auch $(T_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz. Wegen der Vollständigkeit von Y konvergiert somit $(T_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ für jedes $x \in X$ gegen ein $Tx \in Y$.
Da Grenzwerte mit der Addition und der skalaren Multiplikation verträglich sind, ist $T : X \to Y$ linear und wegen $\|T_\lambda x\| \leq C + \delta$ für alle $\lambda \geq \mu(\delta)$ folgt $\|Tx\| \leq C + \delta$ für jedes $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ und jedes $\delta > 0$. Somit muss $T \in L_b(X, Y)$ mit $\|T\| \leq C$. ∎

Satz 5.3.2 (*Satz von Hille-Yoshida*)**.** *Eine lineare Relation $A \subseteq X \times X$ für einen Banachraum X ist genau dann der infinitesimale Generator einer (eindeutig bestimmten) stark stetigen Operatorhalbgruppe $T : [0, +\infty) \to L_b(X)$, wenn*

- ⇝ *A ist abgeschlossen,* $\operatorname{mul} A = \{0\}$ *und* $\overline{\operatorname{dom} A} = X$*, dh. A ist ein dicht definierter, abgeschlossener Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$.*
- ⇝ *Es gibt $\omega, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, sodass*
$$(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A) \tag{5.4}$$
und
$$\|((A - \lambda)^{-1})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \tag{5.5}$$
für alle $\lambda \in (\omega, +\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist A der infinitesimale Generator der Halbgruppe T, so erfüllt A genau dann (5.4) *und* (5.5) *für $\omega, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, wenn $\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t}$ für alle $t \in [0, +\infty)$.*

Beweis.

- ⇝ Ist A der infinitesimaler Generator der Halbgruppe T mit $\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t}$, so ist A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$ gemäß Proposition 5.2.10. Von dort wissen wir auch, dass $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$, wobei $(A - \lambda)^{-1} = -C_\lambda$ für $\lambda \in (\omega, +\infty)$. Nach Bemerkung 5.2.8 gilt folglich (5.5).

  Zu jedem A kann es nach Korollar 5.2.13 höchstens eine dazugehörige Halbgruppe geben.

- ⇝ Es bleibt also zu zeigen, dass jedes A mit obigen Eigenschaften infinitesimaler Generator irgendeiner Halbgruppe T mit $\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t}$, $t \in [0, +\infty)$, ist.

  Die Relation $A - \omega$ ist ebenfalls ein abgeschlossener und dicht definierter Operator, der zudem $(0, +\infty) \subseteq \rho(A - \omega)$ und $\|((A - \omega) - \lambda)^{-n}\| \leq \frac{M}{\lambda^n}$ für $\lambda \in (0, +\infty)$ erfüllt. Ist $A - \omega$ infinitesimaler Generator irgendeiner Halbgruppe T mit $\|T(t)\| \leq M$, so ist gemäß Lemma 5.2.7 $A = (A - \omega) + \omega$ infinitesimaler Generator der stark stetigen Operatorhalbgruppe $t \mapsto e^{\omega t}\, T(t)$, welche $\|e^{\omega t}\, T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ erfüllt.

  Also können wir in (5.4) und (5.5) annehmen, dass $\omega = 0$.

⇝ Sei also A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$, der (5.4) und (5.5) mit $\omega = 0$ erfüllt. Zunächst approximieren wir A durch beschränkte Operatoren. In der Tat gilt zunächst für $y \in \operatorname{dom} A$ und $\lambda > 0$ wegen (5.4) und (5.5)

$$\| - \lambda(A-\lambda)^{-1}y - y\| = \| - \lambda(A-\lambda)^{-1}y - (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)y\| =$$

$$\|(A-\lambda)^{-1}Ay\| \leq \frac{M}{\lambda}\,\|Ay\| \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Insbesondere ist $(-\lambda(A-\lambda)^{-1}y)_{\lambda>0}$ ein Cauchy-Netz. Für alle $\lambda > 0$ gilt zudem $\|-\lambda(A-\lambda)^{-1}\| \leq M$. Nach Lemma 5.3.1 konvergiert $(-\lambda(A-\lambda)^{-1})_{\lambda>0}$ stark gegen einen Operator aus $L_b(X)$, welcher aber auf der dichten Menge $\operatorname{dom} A$ und daher überall mit I übereinstimmt. Wegen $\|x\| = \|\lim_{\lambda\to+\infty} -\lambda(A-\lambda)^{-1}x\| \leq M\|x\|$ gilt auch $1 \leq M$.

Die sogenannte Yoshida-Approximation für $\lambda > 0$

$$A_\lambda := -\lambda(\lambda(A-\lambda)^{-1} + I) \quad (\in L_b(X))$$

erfüllt für $x \in \operatorname{dom} A$

$$A_\lambda x = -\lambda(\lambda(A-\lambda)^{-1}x + (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)x) = -\lambda(A-\lambda)^{-1}Ax \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} Ax \,.$$

Ist umgekehrt $x \in X$ so, dass $A_\lambda x$ für $\lambda \to +\infty$ gegen ein $y \in X$ konvergiert, so konvergiert das Netz $(-\lambda(A-\lambda)^{-1}x; A_\lambda x)$ von Paaren, das wegen $A_\lambda x = -\lambda(\lambda(A-\lambda)^{-1}x + (A-\lambda)(A-\lambda)^{-1}x) = A(-\lambda(A-\lambda)^{-1}x)$ in A liegt, gegen $(x; y)$. Da A abgeschlossen ist, gilt $(x; y) \in A$ bzw. $x \in \operatorname{dom} A$ und $Ax = y$.

⇝ Der beschränkte Operator A_λ ist für $\lambda > 0$ der infinitesimaler Generator der Operatorhalbgruppe $t \mapsto e^{tA_\lambda}$, die wegen (5.5) und (5.3)

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{-\lambda tI}\, e^{-\lambda^2 t\,(A-\lambda)^{-1}}\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} M \frac{t^n\,\lambda^{2n}}{n!\,\lambda^n} = M\, e^{-\lambda t + \lambda t} = M \tag{5.6}$$

erfüllt.

⇝ Für $\lambda > 0$ betrachten wir den linearen Operator

$$R_\lambda : X \to C_b([0,+\infty), X), \quad x \mapsto (t \mapsto e^{tA_\lambda}x)\,.$$

gilt $\|R_\lambda x\|_\infty = \sup_{t\geq 0}\|e^{tA_\lambda}x\| \leq M\|x\|$ nach (5.6), also $\|R_\lambda\| \leq M$. Für $y \in \operatorname{dom} A$ und $\lambda, \mu > 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung und (5.6)

$$\|R_\mu y - R_\lambda y\|_\infty = \sup_{t\geq 0}\|\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_\lambda}\, e^{sA_\mu}y)\,ds\| =$$

$$\sup_{t\geq 0}\|\int_0^t e^{(t-s)A_\lambda}\, e^{sA_\mu}(A_\mu - A_\lambda)y\,ds\| \leq M^2\|A_\mu y - A_\lambda y\|\,.$$

Also ist $(R_\lambda y)_{\lambda>0}$ ein Cauchynetz in $C_b([0,+\infty), X)$ versehen mit $\|.\|_\infty$. Somit folgt aus Lemma 5.3.1, dass $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ stark gegen ein $R \in L_b(X, C_b([0,+\infty), X))$ konvergiert, wobei

$$\|R\| \leq M\,.$$

⇝ Für $t \geq 0$ ist die Punktauswertung $\phi_t : C_b([0,+\infty), X) \to X$ offenbar linear und kontraktiv. Also gilt $T(t) := \phi_t \circ R \in L_b(X)$ mit $\|T(t)\| \leq \|\phi_t\| \, \|R\| \leq M$, wobei

$$T(t)x = (Rx)(t) = (\lim_{\lambda\to+\infty} R_\lambda x)(t) = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{t\,A_\lambda} x\,.$$

Insbesondere ist $(t \mapsto T(t)x) = Rx$ als Funktion auf $[0,+\infty)$ stetig.

Für $t = 0$ gilt

$$T(0)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{0\,A_\lambda} x = x\,,$$

also $T(0) = I$. Für $x \in X$, $s, t \geq 0$ und haben wir zudem

$$T(s+t)x = (Rx)(s+t) = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{(s+t)\,A_\lambda} x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{s\,A_\lambda}\, e^{t\,A_\lambda} x =$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{s\,A_\lambda}\, T(t)x - \underbrace{\lim_{\lambda\to+\infty} e^{s\,A_\lambda}\, (T(t)x - e^{t\,A_\lambda} x)}_{=0} = T(s)\,T(t)x\,,$$

weil $\|e^{s\,A_\lambda}\,(T(t)x - e^{t\,A_\lambda}x)\| \leq M\,\|T(t)x - e^{t\,A_\lambda}x\| \to 0$ für $\lambda \to +\infty$.

Insgesamt sehen wir, dass $T : [0,+\infty) \to L_b(X)$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe mit $\|T(t)\| \leq M$ ist.

⇝ Für $x \in \operatorname{dom} A$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|e^{tA_\lambda} A_\lambda x - T(t)Ax\| \leq \sup_{t\in[0,+\infty)} \|e^{tA_\lambda} Ax - T(t)Ax\| + \sup_{t\in[0,+\infty)} \|e^{tA_\lambda}(Ax - A_\lambda x)\| \leq$$

$$\|R_\lambda(Ax) - R(Ax)\|_\infty + M\,\|Ax - A_\lambda x\| \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Lässt man also in der nach dem Hauptsatz gültigen Gleichung

$$e^{sA_\lambda}x - x = \int_0^s e^{tA_\lambda} A_\lambda x\, dt$$

$\lambda \to +\infty$ gehen, so folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden

$$T(s)x - x = \int_0^s T(t)Ax\, dt\,.$$

Dividieren wir durch s und lassen s gegen Null streben, so folgt wieder nach dem Hauptsatz, dass $(x; Ax)$ im infinitesimalen Generator B der Operatorhalbgruppe T liegt. Wir erhalten also $A \subseteq B$. Da für $\lambda > 0$ sowohl $(A-\lambda)^{-1}$ also auch $(B-\lambda)^{-1}$ überall definierte Operatoren sind, muss $A = B$ gelten.

■

Beschränken wir uns auf den Fall $M = 1$ bzw. $M = 1$ und $\omega = 0$, so erhalten wir unmittelbar aus Satz 5.3.2

Korollar 5.3.3.

⇝ *Ein $A \subseteq X \times X$ ist infinitesimaler Generator einer stark stetigen Operatorhalbgruppe mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ für alle $t \in [0,+\infty)$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$, wenn A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$ mit $(\omega,+\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}$ für alle $\lambda \in (\omega,+\infty)$ ist.*

⇝ *Ein $A \subseteq X \times X$ ist infinitesimaler Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe, dh. $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \in [0,+\infty)$, wenn A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator $A : \operatorname{dom} A \to X$ mit $(0,+\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda \in (0,+\infty)$ ist.*

5.4 Akkretive Relationen

Definition 5.4.1. Eine lineare Relation $B \subseteq X \times X$ heißt *akkretiv*, wenn es zu jedem $(x; y) \in B$ mit $\|x\| = 1$ ein $f \in X'$ gibt, sodass

$$\|x\| = \|f\| = f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(y) \geq 0\,.$$

Bemerkung 5.4.2. Zu jedem $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gibt es nach dem Fortsetzungssatz immer zumindest ein $f \in X'$ mit $\|x\| = \|f\| = f(x) = 1$.

Ist X ein Hilbertraum und wird X' vermöge $z \mapsto (., z)$ mit X identifiziert, so folgt aus der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$|(x, z)| \leq \|x\|\,\|z\|$$

und der Tatsache, dass hier Gleichheit genau dann herrscht, wenn x und z linear abhängig sind, dass $\|x\| = \|z\| = (x, z) = 1$ genau dann, wenn $x = z$ mit $\|x\| = \|z\| = 1$.
Also gibt es zu $(x; y) \in B$ mit $\|x\| = 1$ nur das Funktional $f = (., x)$ mit $\|x\| = \|f\| = f(x) = 1$. Somit ist B genau denn akkretiv, wenn

$$\operatorname{Re}(y, x) \geq 0 \quad \text{für alle} \ (x; y) \in B\,.$$

Lemma 5.4.3. *Ein $B \subseteq X \times X$ ist genau dann akkretiv, wenn $(-\infty, 0) \subseteq r(B)$ und $\|(B + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.*

Beweis. Sei B akkretiv. Zu $(x; y) \in B$ mit $\|x\| = 1$ sei $f \in X'$ wie in Definition 5.4.1. Für $\lambda > 0$ gilt

$$\|(y + \lambda x)\|^2 \geq |f(y + \lambda x)|^2 = |f(y) + \lambda|^2 = |f(y)|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} f(y) + \lambda^2 \geq \lambda^2\,.$$

Also folgt für beliebiges $(x; y) \in B$ aus $(x; y + \lambda x) = (x; 0)$, dass auch $x = 0$, da sonst aus obiger Ungleichung angewandt auf $\frac{1}{\|x\|}\, x$ folgt, dass $\lambda = 0$. Somit gilt $\ker(B + \lambda) = \{0\}$ bzw. $\operatorname{mul}(B + \lambda)^{-1} = \{0\}$.
Für $z \in \operatorname{ran}(B + \lambda)$ und $x = (B + \lambda)^{-1} z$ folgt im Fall $x \neq 0$ aus obiger Ungleichung angewandt auf $\frac{1}{\|x\|}\, x$, dass $\|(B + \lambda)^{-1} z\| = \|x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|$. Im Fall $x = 0$ gilt diese Ungleichung sicherlich auch. Also gilt $-\lambda \in r(B)$ mit $\|(B + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Nun gelte umgekehrt $(-\infty, 0) \subseteq r(B)$ mit $\|(B + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda},\ \lambda > 0$, dh.

$$\|x\| \leq \frac{1}{\lambda}\, \|y + \lambda x\|$$

für alle $(x; y) \in B$ und $\lambda > 0$. Mit $t = \frac{1}{\lambda}$ folgt

$$\|x\| \leq \|ty + x\|$$

für alle $(x; y) \in B$ und $t > 0$. Insbesondere sind im Falle $\|x\| = 1$ die konvexen Teilmengen $U_1(0)$ und $S_{(x;y)} := \{x + ty : t > 0\}$ disjunkt. Da $U_1(0)$ auch offen ist, folgt aus dem Trennungssatz von Hahn-Banach, dass es ein $f \in X'$ und ein $\tau \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\operatorname{Re} f(z) < \tau \leq \operatorname{Re} f(x + ty), \quad \text{für alle } t > 0,\ \|z\| < 1\,.$$

Aus $0 \in U_1(0)$ folgt $\tau > 0$ und durch entsprechende Skalierung von f können wir $\tau = 1$ annehmen. Da mit z auch αz in $U_1(0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{T}$ liegt, folgt aus $\operatorname{Re} f(z) < 1$ dann $|f(z)| < 1$ für $\|z\| < 1$ und daher $\|f\| \leq 1$. Andererseits folgt aus

$$1 \leq \operatorname{Re} f(x) + t \operatorname{Re} f(y) \tag{5.7}$$

für $t \searrow 0$, dass $1 \leq \operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)|$. Also gilt $\|f\| = 1$ und somit $1 \leq \operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)| \leq 1$ bzw. $f(x) = 1$. Schließlich folgt aus (5.7), dass $0 \leq t \operatorname{Re} f(y)$. ■

Lemma 5.4.4. *Ist $B \subseteq X \times X$ akkretiv und gilt* $\operatorname{ran}(B+\lambda_0) = X$ *für zumindest ein $\lambda_0 > 0$, so gilt sogar* $(-\infty, 0) \subseteq \rho(B)$.

Beweis. Wegen Lemma 5.4.3 folgt $-\lambda_0 \in \rho(B)$ mit $\|(B + \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$. In Proposition 4.2.13 haben wir gesehen, dass mit $-\lambda_0$ auch

$$(-2\lambda_0, 0) \subseteq U_{\lambda_0}(-\lambda_0) \subseteq U_{\frac{1}{\|(B+\lambda_0)^{-1}\|}}(-\lambda_0) \subseteq \rho(B)\,.$$

Wenden wir diese Argumentation nacheinander nun auf $\frac{3}{2}\lambda_0$, $\frac{3^2}{2^2}\lambda_0$ usw. an, so sehen wir, dass $(-\infty, 0) \subseteq \rho(B)$. ■

Man beachte, dass mit den Voraussetzungen von Lemma 5.4.4 B automatisch abgeschlossen ist.
Aus Lemma 5.4.3, Lemma 5.4.4 und Korollar 5.3.3 folgt nun.

Satz 5.4.5. *Eine lineare Relation $A \subseteq X \times X$ ist infinitesimaler Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe, dh. $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \in [0, +\infty)$, wenn $-A$ ein dicht definierter und akkretiver Operator ist, sodass* $\operatorname{ran}(A - \lambda_0) = X$ *für zumindest ein $\lambda_0 > 0$.*

Korollar 5.4.6. *Sei H ein Hilbertraum, und $U : [0, +\infty) \to L_b(H)$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe bestehend aus unitären Operatoren und A sei ihr infinitesimaler Generator. Dann ist iA selbstadjungiert.*
Ist umgekehrt iA selbstadjungierter Operator, so ist A infinitesimaler Generator einer stark stetigen Operatorhalbgruppe bestehend aus unitären Operatoren.
In diesem Fall lässt sich U durch $U(-t) := U(t)^{-1}$ zu einer stark stetigen Gruppe $U : \mathbb{R} \to L_b(H)$ fortsetzen, für die

$$U(t) = e^{it\,(-iA)} = \int e^{its}\, dE(s)$$

gilt, wobei $E : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to L_b(H)$ das zu $-iA$ gehörige Spektralmaß aus Satz 4.6.1 ist.

Beweis. Besteht $U : [0, +\infty) \to L_b(H)$ aus unitären Operatoren, und definieren wir $V : [0, +\infty) \to L_b(H)$ durch $V(t) := U(t)^{-1} = U(t)^*$, so ist wegen

$$\lim_{t \searrow 0} \|(V(t) - I)x\| = \lim_{t \searrow 0} \|U^*(t)(I - U(t))x\| = \lim_{t \searrow 0} \|(I - U(t))x\| = 0$$

auch V eine stark stetige Operatorhalbgruppe bestehend aus unitäre Operatoren.
Aus $(x; y) \in A$ folgt

$$\|y - \frac{x - U(h)^*x}{h}\| \leq \|y - U(h)^*y\| + \|U(h)^*y - \frac{x - U(h)^*x}{h}\| =$$
$$\|y - U(h)^*y\| + \|y - \frac{U(h)x - x}{h}\| \stackrel{h \searrow 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Also ist $(x;-y)$ im infinitesimalen Generator B von V. Umgekehrt schließt man analog von $(x;-y) \in B$ auf $(x;y) \in A$, dh. $B = -A$. Nach Satz 5.4.5 sind beide akkretiv, was aber wegen Bemerkung 5.4.2 $\mathrm{Re}(y,x) = 0$ für alle $(x;y) \in A$ bzw.

$$(y,x) - (x,y) = 2i\,\mathrm{Im}(y,x) = 0, \quad \text{für alle } (x;y) \in iA\,.$$

nach sich zieht. Aus der Polarformel angewandt auf die Sesquilinearform $[(x;y),(u;v)] := (y,u) - (x,v)$ auf iA folgt, dass iA symmetrisch ist. Zudem ist $(0,+\infty) \subseteq \rho(A)$ und $(0,+\infty) \subseteq \rho(-A)$, was insbesondere $\pm i \in \rho(iA)$ nach sich zieht. Also hat iA Defekt Index $(0,0)$ und ist somit selbstadjungiert, vgl. Korollar 4.3.23.

Nun sei iA ein selbstadjungierter Operator. Kehren wir die letzten paar Beweisschritte um, so sehen wir, dass A und $-A$ zwei abgeschlossene, dicht definierte und akkretive Operatoren auf H sind, sodass $1 \in \rho(\pm A)$. Nach Satz 5.4.5 sind A und $-A$ infinitesimale Generatoren zweier stark stetiger Kontraktionshalbgruppen U und V. Für $x \in \mathrm{dom}\,A = \mathrm{dom}\,-A$ gilt wegen Lemma 5.2.11

$$(U(.)V(.)x)'(s) = U(s)AV(s)x + U(s)V(s)(-Ax) = 0$$

für alle $s \geq 0$, womit $U(s)V(s)x = U(0)V(0)x = x$ für alle $s \geq 0$. Da $\mathrm{dom}\,A$ dicht ist, gilt immer $U(s)V(s) = I$; genauso zeigt man $V(s)U(s) = I$, dh. $V(s) = U(s)^{-1},\ s \geq 0$. Aus $\|V(s)\| \leq 1$ und $\|U(s)\| \leq 1$ folgt

$$\|U(s)x\| \leq \|x\| = \|V(s)U(s)x\| \leq \|U(s)x\|,\ x \in H\,,$$

womit $U(s)$ unitär mit $V(s) = U(s)^*$ ist.

Setzen wir $U(t) := V(-t) = U(-t)^{-1}$ für $t < 0$, so sieht man leicht durch Fallunterscheidung, dass $U : \mathbb{R} \to L_b(H)$ immer $U(s+t) = U(s)U(t),\ s,t \in \mathbb{R}$, erfüllt.
Schließlich rechnet man elementar nach, dass auch $e^{it(-iA)},\ t \geq 0$, eine stark stetige Operatorhalbgruppe bestehend aus unitären Operatoren ist, sodass für $x \in \mathrm{dom}\,A$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{it(-iA)}x - x) = Ax\,.$$

Also ist A im infinitesimalen Generator von $e^{it(-iA)},\ t \geq 0$, enthalten. Aus Korollar 5.2.13 folgt $U(t) = e^{it(-iA)}$. ∎

Bemerkung 5.4.7. Der mittlere Beweisteil ist eigentlich unnötig, wenn wir den letzten genauer ausgeführt hätten.

Beispiel 5.4.8. Wir betrachten den Banachraum $X = C[0,1]$ aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit $\|.\|_\infty$ und die Relation

$$A = \{(f;g) \in X^2 : f \in C^2[0,1], f'' = g,\ f'(0) = f'(1) = 0\}\,.$$

Offensichtlich ist A ein Operator.
Mit Hilfe des Satzes von Stone Weierstrass zeigt man leicht, dass
$\mathrm{dom}\,A = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\}$ dicht in $X = C[0,1]$ ist.
Um zu zeigen, dass $-A$ akkretiv ist, nehme man $f \in \mathrm{dom}\,A$ mit $\|f\|_\infty = 1$, und sei $s_0 \in [0,1]$ so, dass $\|f\|_\infty = 1 = |f(s_0)|$. Somit hat das komplexe Maß

$$\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0} \in M[0,1] = X'$$

Maß eins und erfüllt $(\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0})(f) = \overline{f(s_0)}\,f(s_0) = |f(s_0)|^2 = 1$. Zudem gilt im Fall $s_0 \in (0,1)$

$$\text{Re}\,(\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0})(f'') = \text{Re}\,(\overline{f(s_0)}\,f)''(s_0) \le 0\,,$$

da die Funktion $t \mapsto \text{Re}(\overline{f(s_0)}\,f)$ offensichtlich bei s_0 ein Maximum hat. Im Fall $s_0 = 0$ folgt aus $f'(0) = 0$, dass

$$\text{Re}(\overline{f(s_0)}\,f)(t) = 1 + \int_0^t \int_0^s \text{Re}(\overline{f(s_0)}\,f)''(\tau)\,d\tau\,ds\,.$$

Wäre $\text{Re}(\overline{f(0)}\,f)''(0) > 0$, so wäre für kleine t die Rechte Seite strikt größer eins, was aber nicht möglich ist. Also muss auch in diesem Fall $\text{Re}(\overline{f(s_0)}\,f)''(s_0) \le 0$. Analog zeigt man das im Fall $s_0 = 1$.
Um Satz 5.4.5 anzuwenden, müssen wir noch zeigen, dass $\text{ran}(A - \lambda^2) = X$ für zumindest ein $\lambda > 0$ zeigen. Dazu sei $g \in X$ und setze für $s \in [0,1]$

$$k(s) := -\frac{1}{2\lambda}\left(e^{\lambda s}\int_s^1 e^{-\lambda\tau}g(\tau)\,d\tau - e^{-\lambda s}\int_s^1 e^{\lambda\tau}g(\tau)\,d\tau\right).$$

Dann liegt $k \in C^2[0,1]$ und erfüllt $k'' - \lambda^2\,k = g$. Die Funktion $(\alpha,\beta \in \mathbb{C})$

$$h_{\alpha,\beta}(s) = \alpha\,e^{\lambda s} + \beta\,e^{-\lambda s}$$

erfüllt dagegen $h''_{\alpha,\beta} - \lambda^2\,h_{\alpha,\beta} = 0$, wobei $(\alpha,\beta)^T \mapsto (h'_{\alpha,\beta}(0), h'_{\alpha,\beta}(1))^T$ linear und regulär ist. Somit gibt es eindeutige $\alpha_0,\beta_0 \in \mathbb{C}$, sodass

$$k_0 := k + h_{\alpha_0,\beta_0}$$

die Randbedingungen $k_0'(0) = 0 = k_0'(1)$ erfüllt; also $Ak_0 - \lambda^2 k_0 = g$.

Wegen Satz 5.4.5 ist A infinitesimaler Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe $T : [0,+\infty) \to L_b(X)$. Ist nun $f_0 \in C^2[0,1]$ mit $f_0'(0) = 0 = f_0'(1)$, dh. $f_0 \in \text{dom}\,A$, so gilt wegen Proposition 5.2.10 für $T(t)f_0$, dass

$$\frac{d}{dt}T(t)f_0 = T(t)Af_0 = AT(t)f_0 = (T(t)f_0)''\,.$$

Da das Punktauswertungsfunktional bei jedem $x \in [0,1]$ auf X stetig ist, folgt nach dessen Anwendung

$$\frac{d}{dt}F(x,t) = \frac{d}{d^2x}F(x,t)$$

wobei $F(x,t) := (T(t)f_0)(x)$. Also erhalten wir eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $F(x,0) = f_0(x)$.
Man überprüft leicht, dass $F \in C([0,1] \times [0,+\infty))$ und beschränkt ist.

Beispiel 5.4.9. Wir betrachten den Banachraum $X = C[-1,0]$ aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf $[-1,0]$ versehen mit $\|.\|_\infty$, ein $L \in X'$, dh. $Lf = \int f\,d\mu$ für ein komplexes Borelmaß μ auf $[-1,0]$, und die Relation

$$A = \{(f;g) \in X^2 : f \in C^1[-1,0], f' = g,\ f'(0) = Lf\}\,.$$

Also ist $\text{dom}\,A = \ker\varphi$, wobei $\varphi : C^1[-1,0] \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(f) = f'(0) - Lf$. Wäre φ bzgl. $\|.\|_\infty$ stetig auf, so auch $C^1[-1,0] \ni f \mapsto f'(0)$, was aber nicht richtig ist, da

$\{f \in C^1[-1,0] : f'(0) = 0\}$ dicht in $C[-1,0]$ ist. Also ist $\operatorname{dom} A$ dicht in $C^1[-1,0]$ und somit auch in $C[-1,0]$ bzgl. $\|.\|_\infty$.
Wir zeigen nun, dass $-(A - \|L\|I)$ akkretiv ist. Dazu sei $f \in \operatorname{dom} A$ mit $\|f\| = 1$. Sei $s_0 \in [-1,0]$ so, dass $\|f\|_\infty = 1 = |f(s_0)|$. Somit hat das komplexe Maß

$$\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0} \in M[0,1] = X'$$

Maß eins und erfüllt $(\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0})(f) = \overline{f(s_0)}\,f(s_0) = |f(s_0)|^2 = 1$. Es bleibt noch

$$\operatorname{Re}(\overline{f(s_0)}\,\delta_{s_0})(f' - \|L\|f) \le 0, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re}\overline{f(s_0)}f'(s_0) \le \|L\|$$

zu zeigen. Im Fall $s_0 \in (-1,0)$ folgt $\operatorname{Re}\overline{f(s_0)}f'(s_0) = 0$, da $t \mapsto \operatorname{Re}\overline{f(s_0)}f(t)$ bei s_0 ein Maximum hat, womit die geforderte Ungleichung sicher gilt. Im Fall $s_0 = -1$ gilt

$$\operatorname{Re}\overline{f(s_0)}f'(s_0) = \operatorname{Re}\overline{f(-1)}f'(-1) = \frac{1}{2}((|f|^2)'(-1)) \le 0\,,$$

da anderenfalls aus $|f(t)|^2 = 1 + \int_{-1}^t (|f|^2)'(s)\,ds$ folgt, dass $|f(t)|^2 > 1$ für hinreichend kleine $t > -1$.
Im Fall $s_0 = 0$ folgt aus $f'(0) = Lf$, dass

$$\operatorname{Re}\overline{f(s_0)}f'(s_0) = \operatorname{Re}\overline{f(0)}\,Lf \le |\overline{f(0)}Lf| \le \|L\|\,.$$

Um Satz 5.4.5 auf $A-\|L\|I$ anzuwenden, müssen wir noch $\operatorname{ran}(A-\lambda) = X$ für zumindest ein $\lambda > \|L\|$ zeigen. Dazu sei $g \in X$ und setze zunächst für beliebiges $c \in \mathbb{C}$

$$f(s) := ce^{\lambda s} + \int_0^s e^{\lambda\,(s-\tau)}g(\tau)\,d\tau, \quad s \in [-1,0]\,.$$

Nun gilt $f' - \lambda f = g$, $f'(0) = g(0) + \lambda c$ und

$$L(f) = cL(s \mapsto e^{\lambda\,s}) + L(s \mapsto \int_0^s e^{\lambda\,(s-\tau)}g(\tau)\,d\tau)\,.$$

Wegen $|L(s \mapsto e^{\lambda\,s})| \le \|L\| < \lambda$ kann man c so wählen, dass $L(f) = f'(0)$, dh. dass $f \in \operatorname{dom} A$.

Wegen Satz 5.4.5 ist $A - \|L\|I$ infinitesimaler Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe $\tilde{T} : [0,+\infty) \to L_b(X)$. Nach Lemma 5.2.7 ist dann A infinitesimaler Generator von $T(t) = e^{\|L\|\,t}\,\tilde{T}(t)$.
Für $f \in \operatorname{dom} A$ gilt $T(s+\alpha)f \in \operatorname{dom} A$ und daher [2]

$$\frac{d}{d\alpha}(T(t+\alpha)f)(s-\alpha) = (T(t+\alpha)Af)(s-\alpha) + T(t+\alpha)(-\underbrace{f'}_{=Af})\,(s-\alpha) = 0\,,$$

wenn nur $-1+\alpha \le s \le 0$ und $t \ge 0$. Also gilt $(T(t+\alpha)f)(s-\alpha) = (T(t)f)(s)$, womit durch $u(s+t) := (T(t)f)(s)$ für $s \in [-1,0]$ und $t \in [0,+\infty)$ eine stetige Funktion auf $[-1,+\infty)$ wohldefiniert ist, für die nach Proposition 5.2.10 ($t \ge 0$)

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(T(t)f)(0) = (T(t)Af)(0) = (AT(t)f)(0) = (T(t)f)'(0) =$$

[2] Die hier verwendete Produktregel ist eine Anwendung von Lemma 5.2.11 auf $X = C[-1,0]$, $Y = \mathbb{C}$ und $R(\alpha) := (g \mapsto g(s-\alpha))$ sowie $\phi(\alpha) = T(t+\alpha)f$.

$$L(T(t)f) = \int_{[-1,0]} (T(t)f)(s)\, d\mu(s) = \int_{[-1,0]} u(s+t)\, d\mu(s)\,.$$

Damit ist u eine Lösung der verzögerten Differentialgleichung

$$u'(t) = \int_{[-1,0]} u(s+t)\, d\mu(s), \quad t \geq 0\,.$$

Für $f \notin \operatorname{dom} A$ sei (f_n) eine Folge aus $\operatorname{dom} A$, die in X gegen f konvergiert. Wegen $\|T(t)\| \leq e^{\|L\|t}$ konvergiert $T(t)f_n$ in X gegen $T(t)f$ gleichmäßig für t in kompakten Intervallen. Somit konvergiert auch $u_n : [-1, +\infty) \to \mathbb{C}$ mit $u_n(s+t) := (T(t)f_n)(s)$ gleichmäßig auf Kompakta gegen $u : [-1, +\infty) \to \mathbb{C}$ mit $u(s+t) = (T(t)f)(s)$, womit auch letztere Funktion wohldefiniert ist. Aus

$$u_n'(t) = \int_{[-1,0]} u_n(s+t)\, d\mu(s), \quad t \geq 0\,,$$

folgt für $n \to \infty$, dass auch u_n' gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Es folgt $u \in C^1$ mit $u'(t) = \int_{[-1,0]} u(s+t)\, d\mu(s)$ für alle $t \geq 0$.

Literaturverzeichnis

[1] Conway, John B.: *Functions of one complex variable 1*. 1978.

[2] Kaltenbäck, Michael: *Fundament Analysis*. 2015.

[3] Rudin, Walter: *Real and Complex Analysis*. 1986.

[4] Woracek, Harald und Kaltenbäck, Michael: *Funktionalanalysis*. 2007.

Index