Harmonische Funktionen

30.06.2016

Michael Kaltenbäck, Lukas Parapatits

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Definition, elementare Eigenschaften

1.1.1 Definition. Ist $g : G \to \mathbb{R}^m$ mit offenem $G \subseteq \mathbb{R}^p$ zweimal stetig differenzierbar, so bezeichnet $\triangle g : G \to \mathbb{R}^m$ (*Laplace g*) die Abbildung ($x = (x_1, \dots, x_p)^T$)

$$\triangle g(x) := \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

Funktionen $g : G \to \mathbb{R}^m,\ g \in C^2(G)$ heißen *harmonisch*, falls $\triangle g \equiv 0$.

Wenn wir von komplexwertigen harmonischen Funktionen sprechen, so bedeutet das, dass g als Funktion von G ($\subseteq \mathbb{R}^p$) nach $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ harmonisch ist.

1.1.2 Bemerkung. Da partielle Ableitungen von Vektor-wertigen Funktionen $f : G \to \mathbb{R}^m$ komponentenweise berechnet werden, gilt das selbe für $\triangle$, dh.

$$\triangle f(x) = \begin{pmatrix} \triangle f_1(x) \\ \vdots \\ \triangle f_m(x) \end{pmatrix},$$

wobei $f_i = \pi_i \circ f$ mit der Projektion $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eines Vektors $y \in \mathbb{R}^m$ auf seinen i-ten Eintrag. Somit ist eine Funktion $g : G \to \mathbb{R}^m$ genau dann harmonisch, wenn alle Komponentenfunktionen von $g = (g_1, \dots, g_m)^T$ harmonisch sind.

1.1.3 Beispiel. Für $M = (m_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,p} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(x) = Mx + y$ harmonisch. In der Tat gilt für den i-ten Eintrag $f_i(x)$ von $f(x)$, dass

$$\triangle f_i(x) = \triangle(y_i + \sum_{j=1}^{p} m_{ij} x_j) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} y_i + \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} x_j = 0\,.$$

1.1.4 Fakta. Im folgenden sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ immer offen und nichtleer.

1. Aus der Analysis ist bekannt, dass $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch ist, wenn f eine Geraden ist.

2. Harmonisch zu sein ist offensichtlich eine lokale Eigenschaft, dh. $g : G \to \mathbb{R}^m$ ist harmonisch genau dann, wenn es für jedes $x \in G$ ein $\epsilon_x > 0$ gibt, sodass $g|_{U_{\epsilon_x}(x)}$ harmonisch ist.

3. Man überprüft sofort, dass alle harmonischen $g : G \to \mathbb{R}^m$ einen Vektorraum bilden.

4. Sei $g : G \to \mathbb{R}^m$ in $C^2(G)$. Sind $u \in \mathbb{R}^p$ und $R > 0$ fest, so ist $h : x \mapsto g(u + Rx)$ für $x \in R^{-1} \cdot (G - u)$ offensichtlich in $C^2(R^{-1} \cdot (G - u))$ für die offene Menge $R^{-1} \cdot (G - u)$. Dabei folgt aus der Kettenregel

$$\triangle h(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x) = \sum_{j=1}^{p} R^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(u + Rx) = R^2 \cdot \triangle g(u + Rx).$$

Insbesondere ist h genau dann harmonisch, wenn g es ist.

5. Sei $h : G \to \mathbb{R}^p$ eine stetig differenzierbare Abbildung, dh. $h \in C^1(G)$. Dann bezeichnen wir mit $\operatorname{div} h : G \to \mathbb{R}$ (*Divergenz* von h) die Abbildung

$$\operatorname{div} h(x) := \operatorname{tr} dh(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(x).$$

Ist $g : G \to \mathbb{R}$ in $C^1(G)$, so bezeichnet $\operatorname{grad} g = \nabla g : G \to \mathbb{R}^p$ (*Gradient* von g bzw. *Nabla* g) die Abbildung

$$\operatorname{grad} g(x) = \nabla g(x) := dg(x)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix}.$$

Für reelwertige Funktionen g, definiert auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^p$, gilt im Falle der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit

$$\triangle g(x) = \operatorname{div}(\nabla g)(x).$$

6. Sind $h, g : G \to \mathbb{R}$ in $C^2(G)$, so folgt aus der Produktregel für $j = 1, \dots, p$,

$$\frac{\partial^2 (h \cdot g)}{\partial x_j^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(h \frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_j} g)(x) = h(x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x) + 2 \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x) g(x).$$

Also gilt [1]

$$\triangle(h \cdot g)(x) = h(x) \cdot \triangle g(x) + 2(\nabla h(x), \nabla g(x)) + g(x) \cdot \triangle h(x). \qquad (1.1)$$

7. Sind $g : G \to \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $g(G) \subseteq (a, b)$ beide zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus der Ketten- und Produktregel

$$\frac{\partial^2 f \circ g}{\partial x_j^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}((f' \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j})(x) = f''(g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)^2 + f'(g(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

[1] $(.,.)$ bezeichnet das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$.

Also gilt[2]

$$\triangle(f \circ g)(x) = f''(g(x)) \cdot \| \nabla g(x) \|^2 + f'(g(x)) \cdot \triangle g(x) \tag{1.2}$$

Man sieht auch leicht, dass

$$\nabla(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot \nabla g(x). \tag{1.3}$$

8. Sei $g : G \to \mathbb{R}^m$ harmonisch und $M \in \mathbb{R}^{q\times m}$. Dann sind alle Komponentenfunktionen von $x \mapsto Mg(x)$ reellwertige Linearkombinationen von harmonischen Funktionen und somit selber harmonisch.

9. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Für $g : G \to \mathbb{R}$ in $C^3(G)$ und $j = 1, \dots, p$ folgt aus dem Satz von Schwarz $\nabla \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla g(x)$ sowie $\frac{\partial \triangle g}{\partial x_j}(x) = \triangle \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

   Insbesondere folgt aus (1.1) für $x \in G$ ($\pi_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ist die Projektion auf die j-te Komponente, dh. $\pi_j(x) = x_j$, die wegen ihrer Linearität harmonisch ist und für die offensichtlich $\nabla \pi_j(x)$ der j-te kanonische Basisvektor e_j ist.)

$$\triangle(\pi_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j})(x) = 2(e_j, \nabla \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)) + x_j \cdot \frac{\partial \triangle g}{\partial x_j}(x),$$

   und nach Aufsummieren über j ($\mathrm{id} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ ist die Identität)

$$\triangle(\mathrm{id}, \nabla g)\,(x) = 2\triangle g(x) + (x, \nabla(\triangle g)).$$

   Ist g harmonisch, so verschwindet dieser Ausdruck offensichtlich, und es ist auch die Funktion $x \mapsto (x, \nabla g(x))$ harmonisch.

1.1.5 Beispiel.

⇝ Für die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p x_k^2$ gilt

$$\nabla g(x) = 2x, \ \triangle g(x) = \sum_{k=1}^p \triangle x_k^2 = \sum_{k=1}^p 2 = 2p.$$

⇝ Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \ln \|x\| = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2), \tag{1.4}$$

ist wegen (vgl. (1.2) und das letzte Beispiel)

$$\triangle g(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\|x\|^4} \cdot \|2x\|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\|x\|^2} \cdot 4 = 0$$

harmonisch. Das lässt sich auch direkt verifizieren:

$$\triangle g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} =$$

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 2\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^2 + 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0$$

Man beachte, dass (vgl. (1.3)) $\nabla g(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \cdot x$

[2] Wenn nichts anderes angegeben ist, dann steht $\|.\|$ für die Zweinorm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^p$.

⇝ Für $p > 2$ wird die Funktion $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \frac{1}{2-p} \cdot \|x\|^{2-p} = \frac{1}{2-p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \tag{1.5}$$

genauso wie die Funktion aus dem letzten Beispiel eine wichtige Rolle spielen. Wegen (vgl. (1.2) mit $f(t) = \frac{1}{2-p} t^{\frac{2-p}{2}}$ und das vorletzte Beispiel)

$$\triangle g(x) = -\frac{p}{4} \cdot \frac{1}{\|x\|^{p+2}} \cdot \|2x\|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\|x\|^p} \cdot 2p = 0$$

ist g harmonisch. Wieder lässt sich das auch direkt verifizieren:

$$\nabla g(x) = (\frac{\partial g}{\partial x_j}(x))_{j=1}^p = \left(x_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} \right)_{j=1}^p = \frac{1}{\|x\|^p} \cdot x,$$

$$\triangle g(x) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} - p \sum_{j=1}^{p} x_j^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p+2}{2}} =$$

$$p \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} - p \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p+2}{2}} \cdot \sum_{j=1}^{p} x_j^2 = 0.$$

⇝ Bezeichnet $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion aus dem vorletzten Beispiel im Fall $p = 2$ bzw. die Funktion aus dem letzten Beispiel im Fall $p > 2$ und ist $u \in \mathbb{R}^p$, so ist $g_{-u} : \mathbb{R}^p \setminus \{u\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x-u)$ gemäß Fakta 1.1.4, 4, ebenfalls harmonisch.

⇝ Als Graph der stetigen Funktion $x \mapsto x$ ist $D := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p : x = y\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^{2p}$ abgeschlossen und somit $G := \mathbb{R}^{2p} \setminus D$ offen.

Mit dem selben g wie im letzten Beispiel ist die Funktion

$$H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x-y),\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G,$$

als Hintereinanderausführung von C^∞ Funktionen wieder C^∞. Hält man y fest, so ist die $(x \mapsto H\binom{x}{y}) = g_{-y}$ harmonisch, wie wir eben festgestellt haben. Das gleiche gilt bei festgehaltenen y. Somit gilt

$$\triangle H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \triangle g_{-y}(x) + \triangle g_x(-y) = 0.$$

Also ist auch H harmonisch.

Nach dem Lemma 1.1.6 sind auch alle höheren partiellen Ableitungen von H in x und in y harmonisch.

1.1.6 Lemma. *Sei $g : G \to \mathbb{R}^m$ mit einem offenen $G \subseteq \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \cong \mathbb{R}^p$ mit $p = p_1 + p_2$, $p_1 > 0, p_2 \geq 0$, mindestens $k + 2$ mal stetig differenzierbar für ein $k \in \mathbb{N}$.*

Ist für jedes $v \in \mathbb{R}^{p_2}$ mit[3] $G_v := \{u \in \mathbb{R}^{p_1} : \binom{u}{v} \in G\} \neq \emptyset$[4] *die Funktion* $u \mapsto g\binom{u}{v}$, $u \in G_v$ *harmonisch, so gilt dasselbe für jede partielle Ableitung k-ten Grades*

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}$$

von g, wobei $l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, p\}$.

Beweis. Wegen dem Satz von Schwarz hängt $\frac{\partial^k g}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}$ nicht von der Reihenfolge der $x_{l_1}, \dots, x_{l_k}$ ab, und ist laut Voraussetzung mindestens noch zweimal stetig differenzierbar. Wenden wir den Satz von Schwarz abermals an, so folgt für $x \in G$

$$\sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial^k g}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}(x) = \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial^k}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} \frac{\partial g}{\partial x_j^2}(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

Laut Voraussetzung verschwindet die rechts stehende Summe. Also ist die Funktion $u \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}\binom{u}{v}$ auf G_v harmonisch.

❑

1.1.7 Beispiel. Bezeichne $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion aus (1.4) im Fall $p = 2$ bzw. die Funktion aus (1.5) im Fall $p > 2$. Wir wissen schon, dass für ein festes $y = (y_j)_{j=1}^p \in \mathbb{R}^p$ die Funktion $g_{-y} : \mathbb{R}^p \setminus \{y\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x - y)$ ebenfalls harmonisch ist. Die Funktion g_{-y} ist C^∞, wobei $\nabla g_{-y}(x) = \frac{1}{\|x-y\|^p}(x - y)$.

Wegen Lemma 1.1.6 sind auch die Funktionen $\frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, p$, auf $\mathbb{R}^p \setminus \{y\}$ harmonisch und daher auch ihre Linearkombination

$$x \mapsto -\sum_{j=1}^{p} y_j \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x) = -(y, \nabla g_{-y}(x)) = \frac{-(x, y) + \|y\|^2}{\|x - y\|^p}.$$

Aus Fakta 1.1.4, 9, folgern wir, dass auch die Funktion

$$x \mapsto -(x, \nabla g_{-y}(x)) = \frac{-\|x\|^2 + (x, y)}{\|x - y\|^p}$$

auf $\mathbb{R}^p \setminus \{y\}$ harmonisch ist. Die Summe

$$x \mapsto \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$$

dieser Funktionen ist somit auch auf dieser Menge harmonisch.

Im Falle $\|y\| = 1$ hat diese Funktion die Gestallt

$$\wp(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}, \tag{1.6}$$

und wird als *Poisson-Kern* bezeichnet.

1.1.8 Proposition. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum mit einem endlichen, nichtnegativen Maß* μ *und sei* $G \subseteq \mathbb{R}^p$ *offen. Weiters sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $h : \Omega \times G \to \mathbb{R}^q$ *eine Funktion derart,*

[3]Dieser Schnitt der Menge G ist offen in $\mathbb{R}^{p_1}$, da G_v und $(\mathbb{R}^{p_1} \times \{v\}) \cap G$ homöomorph sind.

[4]Im Falle $p_2 = 0$ ist $G_v = G$ zu setzen.

$\rightsquigarrow$ *dass für jedes feste $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto h(t,x)$ in $C^k(G)$ liegt,*

$\rightsquigarrow$ *dass für jedes feste $x \in G$ die Funktion $t \mapsto h(t,x)$ messbar auf Ω ist,*

$\rightsquigarrow$ *dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ die Funktion h und alle partiellen Ableitungen von h vom Grad kleiner oder gleich k auf $\Omega \times K$ beschränkt sind, dh. für $m = 1, \dots, k$*

$$\|h(t,x)\| \leq C_K,\ \|\frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(t,x)\| \leq C_K,$$
$$t \in \Omega,\ x \in K,\ l_1, \dots l_m \in \{1, \dots, p\}, \tag{1.7}$$

für eine von K abhängige Konstante $C_K \in (0, +\infty)$.

Dann gilt liegt die Funktion $g : G \to \mathbb{R}^q,\ \ x \mapsto \int_\Omega h(t,x)\, d\mu(t)$ auch in $C^k(G)$, wobei für $m = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial^m g}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}\, d\mu(t),\quad x \in G,\ \ l_1, \dots l_m \in \{1, \dots, p\}\,.$$

Insbesondere ist g auf G harmonisch, wenn für jedes $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto h(t,x)$ auf G harmonisch ist.

Beweis. Wegen Bemerkung 1.1.2 genügt es, skalarwertige harmonische Funktionen zu betrachten, dh. $m = 1$.

Sei $y \in G$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass $K_\epsilon(y) \subseteq G$. Da μ endlich und h voraussetzungsgemäß beschränkt auf $K_\epsilon(y) \supseteq U_\epsilon(y)$ ist, und da $t \mapsto h(t,x)$ messbar ist, existiert das Integral

$$g(x) = \int h(t,x)\, d\mu(t)$$

für alle $x \in U_\epsilon(y)$. Da die Ableitung des Integranden nach einer Variablen x_j auf $K_\epsilon(y) \supseteq U_\epsilon(y)$ vom Betrag her durch eine auch von t unabhängige Konstante abgeschätzt werden kann, und da wegen der Endlichkeit von μ diese Konstante integrierbar ist, gilt für $x \in U_\epsilon(y)$ (siehe Analysis 3)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int h(t,x)\, d\mu(t) = \int \frac{\partial}{\partial x_j} h(t,x)\, d\mu(t),$$

wobei insbesondere der Integrand auf der rechten Seite messbar ist. Wir können dieses Argument wiederholt anwenden und erhalten rekursiv ($x \in G,\ l_1, \dots l_m \in \{1, \dots, p\}$)

$$\frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \int h(t,x)\, d\mu(t) = \int \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} h(t,x)\, d\mu(t) \tag{1.8}$$

für $m = 1, 2, \dots, k$. Aus der Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} h(t,x)$ folgt zusammen ihrer vorausgesetzten lokalen Beschränktheit mit dem entsprechenden Resultat aus der Analysis 3, dass für $m = k$ der Ausdruck in (1.8) stetig in $x \in G$ ist.

Sind die Funktionen $x \mapsto h(t,x)$ auf G für $t \in \Omega$ alle harmonisch, so gilt

$$\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int h(t,x)\, d\mu(t) = \int \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h(t,x)\, d\mu(t) = 0,$$

womit g auf $U_\epsilon(y)$ harmonisch ist.

❑

1.1.9 Beispiel. Sei $\Omega = S^{p-1} := K_1(0) \setminus U_1(0)$ die Einheitskugeloberfläche im $\mathbb{R}^p$ und sei ν irgendeine nichtnegatives Borelmaß darauf. Da S^{p-1} kompakt ist, folgt immer $\nu(S^{p-1}) < +\infty$. Weiters sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wir schreiben f als $f = |f| \cdot u$, wobei u messbar ist und nur Werte in $\{-1, +1\}$ annimmt.

Für (vgl. (1.6))

$$h(y, x) := u(y) \cdot \wp(x, y) = u(y) \cdot \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$$

mit $y \in S^{p-1}$ und $x \in U_1(0)$ ist wegen Beispiel 1.1.7 $x \mapsto h(y, x)$ harmonisch für alle $y \in S^{p-1}$. Da $y \mapsto \wp(x, y)$ stetig ist, ist $y \mapsto h(y, x)$ auch messbar auf Ω und zwar für alle $x \in U_1(0)$.

Schließlich ist $\binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{\|x-y\|^p}$ als Zusammensetzung der C^∞-Funktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \|x - y\|^2 \text{ und } t \mapsto t^{-\frac{p}{2}},\ t \in (0, +\infty),$$

selber C^∞[5] und zwar für $\binom{x}{y}$ in der offenen Menge $\{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^{2p} : u \neq v\}$. Wegen der Produktregel ist es daher auch $\binom{x}{y} \mapsto \wp(x, y)$. Insbesondere sind

$$\wp(x, y),\ \frac{\partial^m \wp}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(x, y),\quad l_1, \dots, l_m \in \{1, \dots, p\} \tag{1.9}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ als Funktionen von $\binom{x}{y}$ auf $\{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^{2p} : u \neq v\}$ und daher insbesondere auf $K \times S^{p-1}$ für jedes kompakte $K \subseteq U_1(0)$ stetig. Da letztere Menge kompakt ist, gilt (1.7).

Somit können wir Proposition 1.1.8 auf h und das Maß $d\mu = |f| \cdot \nu$ anwenden und erhalten, dass die Funktion

$$x \mapsto \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot f(y)\, d\nu(y) \tag{1.10}$$

auf $U_1(0)$ harmonisch ist, und dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $l_1, \dots, l_m \in \{1, \dots, p\}$

$$\frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot f(y)\, d\nu(y) = \int_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x, y) \cdot f(y)\, d\nu(y). \tag{1.11}$$

Somit ist die Funktion (1.10) sogar C^∞ auf $U_1(0)$.

Im Fall $p = 2$ sind die harmonischen Funktionen eng verwoben mit den analytischen Funktionen.

1.1.10 Proposition. *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f auch harmonisch. Insbesondere sind dann Real- und Imaginärteil von f harmonisch.*

Ist umgekehrt $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, so gibt es ein bis auf eine imaginäre Konstante eindeutiges holomorphes $f : G \to \mathbb{C}$, sodass $u \equiv \operatorname{Re} f$.

[5] Man beweist durch vollständige Induktion nach dem Grad k der partiellen Ableitung mit Hilfe der eindimensionalen Ketten- und Produktregel, dass für $g : G \to \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit offenen $G \subseteq \mathbb{R}^p$ und $g(G) \subseteq (a, b)$ aus $f, g \in C^\infty$ folgt, dass $\frac{\partial^k (f \circ g)}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}(x)$ eine endliche Summe von Produkten der Funktionen $f^{(j)} \circ g,\ j = 0, \dots, k$ sowie $\frac{\partial^k (f \circ g)}{\partial x_{m_1} \dots \partial x_{m_r}}(x)$ mit $0 \leq r \leq k$ ist. Somit gilt auch $f \circ g \in C^\infty$.

Beweis. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, so gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentielgleichungen* ($z = x + iy$)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \ \frac{\partial v}{\partial x}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z), \tag{1.12}$$

wobei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Offensichtlich kann man (1.12) auch schreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z). \tag{1.13}$$

Da holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind, folgt aus dieser Gleichung abgeleitet nach x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) = -i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z).$$

Wegen dem Satz von Schwarz und wegen (1.13) abgeleitet nach y ist dieser Ausdruck gleich

$$-i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(z) = (-i)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z).$$

Daraus folgt sofort $\triangle f = 0$. Wegen Bemerkung 1.1.2 sind auch $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch.

Ist umgekehrt $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch und $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so setzen wir $\alpha(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(z)$, $\beta(z) := -\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ und $F(z) := \alpha + i\beta$. Dann sind $\alpha : G \to \mathbb{R}, \beta : G \to \mathbb{R}$ und $F : G \to \mathbb{C}$ alle drei C^1-Funktionen, wobei wegen $\triangle u = 0$ und wegen dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(z) + i\frac{\partial \beta}{\partial x}(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(z) =$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(z) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(z) - i\frac{\partial \alpha}{\partial y}(z) = -i \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(z).$$

Also ist F holomorph. Da G einfach zusammenhängend ist, gibt es eine holomorphe Stammfunktion f, dh. $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f' = F$. Wegen $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ gilt

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \operatorname{Re} F = \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

und

$$-\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = \operatorname{Im} F = \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Insbesondere ist $d(\operatorname{Re} f)(z) = du(z)$ ($\in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) für alle $z \in G$. Da Gradientenfelder wegunabhängig sind, und da in G je zwei Punkte durch einen Polygonzug verbindbar sind, folgt daraus $\operatorname{Re} f = u + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Nun ist $f - c$ die gesuchte holomorphe Funktion.

Falls $g : G \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} g = u$ ist, so ist $f - c - g : G \to \mathbb{C}$ auch holomorph mit einem verschwindenden Realteil. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt $d(f - c - g)(z) = 0$ und daraus, dass $f - c - g$ eine Konstante sein muss.

❑

Aus der komplexen Analysis ist bekannt, dass die Hintereinanderausführung von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist. Somit ist im Falle $p = 2$ die Hintereinanderausführung einer holomorphen und dann einer harmonischen Funktion wieder harmonisch. Im Allgemeinen wollen wir punkto Zusammensetzung folgendes Resultat bringen, das auch den soeben erwähnten Fall $p = 2$ abdeckt, da für holomorphes f die Ableitung $df(x)$ betrachtet als reelle 2×2-Matrix reelles Vielfaches einer Drehung ist.

1.1.11 Definition. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\psi : O \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Die Funktion ψ heißt *konform*, wenn $d\psi(x)$ für alle $x \in O$ ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Matrix ist, dh. falls $d\psi(x)^T d\psi(x) = d\psi(x) d\psi(x)^T = \alpha(x) \cdot I$ für alle $x \in O$, wobei $\alpha(x) \in \mathbb{R}$[6].

1.1.12 Lemma. *Sei $g : G \to \mathbb{R}^m$ mit offenem $G \subseteq \mathbb{R}^p$ in C^2 und $\psi : O \to \mathbb{R}^p$ mit offenem $O \subseteq \mathbb{R}^p$ konform und auch in C^2. Sei $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, sodass $d\psi(x)^T d\psi(x) = d\psi(x) d\psi(x)^T = \alpha(x) \cdot I$. Dann gilt für $g \circ \psi : \psi^{-1}(G) \to \mathbb{R}^m$*

$$\triangle(g \circ \psi)(x) = dg(\psi(x))\, \triangle\psi(x) + \alpha(x) \triangle g(\psi(x)). \tag{1.14}$$

Sind g und ψ dabei auch harmonisch, so ist auch $g \circ \psi$ harmonisch.

Beweis. Wegen Bemerkung 1.1.2 genügt es, skalarwertige harmonische Funktionen zu betrachten, dh. $m = 1$.

Für jedes $x \in \psi^{-1}(G)$ gilt wegen der Kettenregel $d(g \circ \psi)(x) = dg(\psi(x))\, d\psi(x)$ ($\in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times p}$), und daher ($j = 1, \dots, p$) (siehe Fakta 1.1.4, 5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g \circ \psi(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} (dg(\psi(.))\, d\psi(.) e_j)(x).$$

Wegen der Produktregel - $(Ab)' = A'b + Ab'$ für Matrix-wertige Funktionen A und Vektor-wertige Funktionen b - ist obiger Ausdruck gleich

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (dg(\psi(.))(x)\, d\psi(x) e_j + dg(\psi(x))\, \frac{\partial}{\partial x_j} (d\psi(.) e_j)(x). \tag{1.15}$$

Da $x \mapsto dg(\psi(x))^T = (dg)^T \circ \psi(x)$ eine $\mathbb{R}^p$ wertige Funktion ist, folgt aus der Kettenregel

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} ((dg)^T \circ \psi)(x)}_{\in \mathbb{R}^p} = \underbrace{d((dg)^T \circ \psi)(x)}_{\in \mathbb{R}^{p \times p}} e_j = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k x_l} (\psi(x)) \right)_{k,l=1,\dots,p} d\psi(x) e_j.$$

Nimmt man hier wieder die Transponierte und beachtet, dass $\frac{\partial}{\partial x_j} (d\psi(.) e_j)(x) = (\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_1, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_p)^T$, so stimmt (1.15) überein mit

$$e_j^T d\psi(x)^T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k x_l} (\psi(x)) \right)_{k,l=1,\dots,p} d\psi(x) e_j + dg(\psi(x)) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_p \end{pmatrix}.$$

[6]Da links- bzw. rechts-Inverse von quadratischen Matrizen immer auch Inverse sind, genügt schon eine der Bedingungen $d\psi(x)^T d\phi(x) = \alpha(x) \cdot I$ oder $d\psi(x) d\psi(x)^T = \alpha(x) \cdot I$.

Summieren wir die letzte Gleichung über $j = 1, \dots, p$ auf und beachten, dass $\triangle\psi = (\triangle\psi_1, \dots, \triangle\psi_p)^T$, so folgt

$$\triangle(g \circ \psi)(x) = \operatorname{tr}\left(d\psi(x)^T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k x_l}(\psi(x))\right)_{k,l=1,\dots,p} d\psi(x)\right) + dg(\psi(x))\,\triangle\psi(x).$$

Wegen $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, wegen $d\psi(x)^T d\psi(x) = d\psi(x) d\psi(x)^T = \alpha(x) \cdot I$ und wegen der Linearität der Spur folgt daraus die behauptete Gleichheit.

Ist g harmonisch, so verschwindet dabei der zweite Summand und ist auch ψ harmonisch, dann auch der erste.

❑

1.1.13 Bemerkung. Speziell erfüllt $\psi(x) = Ux$ für ein orthogonales $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$ die Voraussetzungen von Lemma 1.1.12. Also ist $x \mapsto g(Ux)$ immer harmonisch, wenn g es ist und wenn $U^T = U^{-1}$.

Insbesondere ist die Tatsache harmonisch zu sein für eine Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ nicht von den gewählten Koordinaten auf $\mathbb{R}^p$ abhängig. Ein Koordinatenwechsel zu einer anderen orthogonal Basis auf $\mathbb{R}^p$ entspricht ja dem Übergang von $g(x)$ zu $g(Ux)$ für ein geeignetes orthogonales U.

1.2 Kelvin Transformation

Wir wollen die Abbildung

$$x \mapsto x^* := \frac{x}{||x||^2}, \quad \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \tag{1.16}$$

studieren. Wegen $(x^*)^* = x$ ist sie eine *Involution* und daher insbesondere bijektiv. Wegen $||x^*|| = \frac{1}{||x||}$ gilt dabei

$$(S^{p-1})^* = S^{p-1}, \quad (U_1(0) \setminus \{0\})^* = \mathbb{R}^p \setminus K_1(0), \quad (\mathbb{R}^p \setminus K_1(0))^* = U_1(0) \setminus \{0\}.$$

Offensichtlich ist $x \mapsto x^*$ sogar C^∞ und somit insbesondere ein Homöomorphismus. Dabei ist

$$\frac{\partial.^*}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{||x||^2} e_j - \frac{2x_j}{||x||^4} x,$$

und daher

$$d(.^*)(x) = \frac{1}{||x||^2} I - \frac{2}{||x||^4} x x^T. \tag{1.17}$$

Aus $x^T x = ||x||^2$ folgt

$$d(.^*)(x)^T d(.^*)(x) = \frac{1}{||x||^4} I - \frac{4}{||x||^6} x x^T + \frac{4}{||x||^8} (x x^T)(x x^T) = \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{||x||^4} I - \frac{4}{||x||^6} x x^T + \frac{4}{||x||^8} ||x||^2 x x^T = \frac{1}{||x||^4} I.$$

Also ist $x \mapsto x^*$ in der Tat konform. Sie ist aber nur im Falle $p = 2$ auch harmonisch, da

$$\triangle(.^*) = \frac{4 - 2p}{||x||^4} x. \tag{1.19}$$

Also ist $x \mapsto h(x^*)$ für ein harmonisches h im Fall $p > 2$ im allgemeinen nicht harmonisch, vgl. Lemma 1.1.12. Durch eine leichte mulitplikative Korrektur erhalten wir aber folgende Aussage.

1.2.1 Proposition. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ offen und sei $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist die Funktion*

$$K[h] : G^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \cdot h(x^*)$$

auch harmonisch. $K[h]$ wird als Kelvin Transformierte *bezeichnet.*

Beweis. Im Falle $p = 2$ folgt die Aussage sofort aus Lemma 1.1.12, da dann $x \mapsto x^*$ harmonisch ist.

Im Falle $p > 2$ gilt gemäß (1.1)

$$\triangle K[h](x) = \|x\|^{2-p} \cdot \triangle(h \circ .^*)(x) + 2(\nabla\|x\|^{2-p}, \nabla(h \circ .^*)(x)) + \triangle\|x\|^{2-p} \cdot h(x^*).$$

Nun ist $\nabla\|x\|^{2-p} = (2-p)\|x\|^{-p}x$, $\triangle\|x\|^{2-p} = 0$, siehe Beispiel 1.1.5. Außerdem folgt aus (1.14) und (1.18), (1.19)

$$\triangle(h \circ .^*)(x) = \frac{4-2p}{\|x\|^4} dh(x^*)x + \frac{1}{\|x\|^4} \triangle h(x^*) = \frac{4-2p}{\|x\|^4} dh(x^*)x.$$

Aus (1.17) folgt wegen der Kettenregel $d(h \circ (.^*))(x) = \frac{1}{\|x\|^2} dh(x^*) - \frac{2}{\|x\|^4} dh(x^*)xx^T$ und daher

$$\triangle K[h](x) = \|x\|^{2-p} \cdot \frac{4-2p}{\|x\|^4} dh(x^*)x + 2(2-p)\|x\|^{-p}\left(\frac{1}{\|x\|^2} dh(x^*) - \frac{2}{\|x\|^4} dh(x^*)xx^T\right)x =$$

$$\frac{4-2p}{\|x\|^{p+2}} dh(x^*)x + \frac{2(2-p)}{\|x\|^{p+2}} dh(x^*)x - \frac{4(2-p)}{\|x\|^{p+2}} dh(x^*)x = 0.$$

❑

1.2.2 Bemerkung. Im Falle $p = 2$ ist $x \mapsto x^*$ nichts anderes, als $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

Wegen Proposition 1.2.1 lässt sich sinnvoll definieren, wann sich eine Funktion harmonisch bei ∞ fortsetzen lässt. Dazu betrachten wir die *Alexandroff-Kompaktifizierung* $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{R}^p$. Die offenen Teilmengen davon sind genau diejenigen von $\mathbb{R}^p$ und die Mengen der Form $(\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}) \setminus K$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt ist.

Klarerweise können wir die Abbildung $x \mapsto x^*$ zu einer Involution von $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ fortsetzen, indem wir $0^* = \infty$ und $\infty^* = 0$ setzen. Man zeigt leicht, dass auch diese Fortsetzung ein Homöomorphismus ist.

1.2.3 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ eine offene, ∞ enthaltende Menge. Eine harmonische Funktion $h : G \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch bei ∞ fortsetzbar, falls $K[h|_{G\setminus\{\infty,0\}}] : (G \setminus \{\infty, 0\})^* = G^* \setminus \{\infty, 0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch auf $G^* \setminus \{\infty\}$ fortsetzbar ist.

Als letztes wollen wir noch auf folgende geometrische Bedeutung der Abbildung $x \mapsto x^*$ hinweisen. Dabei ist eine verallgemeinerte Kreisoberfläche in $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ eine Teilmenge davon der Bauart $u + rS^{p-1}$ für gewisse $u \in \mathbb{R}^p$ und $r > 0$ oder eine affine Hyperebene samt ∞.

1.2.4 Lemma. *Die Funktion $x \mapsto x^*$ als Abbildung von $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ auf sich bildet verallgemeinerte Kreisoberflächen auf ebensolche ab.*

Beweis. Man überzeugt sich durch elementare Überlegungen, dass $E \subseteq \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ genau dann eine verallgemeinerte Kreisoberflächen ist, wenn

$$E = \{x \in \mathbb{R}^p : a\|x\|^2 + (b, x) + c = 0\} \cup \begin{cases} \emptyset & , a \neq 0 \\ \{\infty\} & , a = 0 \end{cases}$$

für gewisse $b \in \mathbb{R}^p$ und $a, c \in \mathbb{R}$ mit $\|b\|^2 - 4ac > 0$. Schreiben wir das als

$$E = \{x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\} : a\|x\|^2 + (b, x) + c = 0\} \cup \begin{cases} \emptyset & , a \neq 0, c \neq 0 \\ \{\infty\} & , a = 0, c \neq 0 \\ \{0\} & , a \neq 0, c = 0 \\ \{\infty, 0\} & , a = 0 = c \end{cases},$$

so folgt aus ($x \notin \{0, \infty\}$)

$$a\|x^*\|^2 + (b, x^*) + c = a\frac{\|x\|^2}{\|x\|^4} + \frac{1}{\|x\|^2}(b, x) + c = \frac{1}{\|x\|^2}\left(a + (b, x) + c\|x\|^2\right)$$

sofort

$$E^* = \{x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\} : c\|x\|^2 + (b, x) + a = 0\} \cup \begin{cases} \emptyset & , a \neq 0, c \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0, c \neq 0 \\ \{\infty\} & , a \neq 0, c = 0 \\ \{\infty, 0\} & , a = 0 = c \end{cases}.$$

Also ist auch E^* eine verallgemeinerte Kreisoberfläche.

❑

Kapitel 2

Poissonscher Darstellungssatz

2.1 Oberflächen Maß

Ehe wir die harmonischen Funktionen weiter betrachten, sei an den Begriff der Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ erinnert.

2.1.1 Definition. Für $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, heißt eine Abbildung $\phi : D \to M$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $0 < d \leq p$ eine d-dimensionale *Einbettung* in M, wenn

- $\emptyset \neq D$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist,
- $\phi(D)$ offene Teilmenge von M bzgl. der Spurtopologie ist, dh. $\phi(D) = M \cap U$ für eine in $\mathbb{R}^p$ offene Teilmenge U,
- $\phi : D \to \phi(D)$ ein Homöomorphismus[1] ist,
- ϕ als Abbildung von D nach $\mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar ist,
- $d\phi(s)$ für alle $s \in D$ injektiv ist, d.h. $d\phi(s)$ maximalen Rang d hat.

Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt d-dimensionale $(0 < d \leq p)$ *Mannigfaltigkeit* im $\mathbb{R}^p$, falls es zu jedem $x \in M$ eine d-dimensionale Einbettung $\phi : D \to M$ mit $x \in \phi(D)$ gibt.

2.1.2 Bemerkung. Ist M eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, so ist $\phi(D)$ als Folgerung des Umkehrsatzes offen in $\mathbb{R}^p$ für jede p-dimensionale Einbettung $\phi : D \to M$. Also ist M als Vereinigung offener Mengen selber offen in $\mathbb{R}^p$.

Ist umgekehrt $M \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, so ist die Abbildung $\iota_M : M \to M$, $\iota_M(x) = x$, eine p-dimensionale Einbettung mit allen $x \in M$ in ihrem Bild. Also sind die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ genau die p-dimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$.

2.1.3 Beispiel. Eine ganz wichtige $(p-1)$-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist die Einheitsspähre

$$S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| = 1\},$$

also $x \in S^{p-1}$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^p x_j^2 = 1$.

Einbettungen in S^{p-1} lassen sich ausgehend von der Kugelkoordinatenfunktion

$$T_p : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p,$$

[1] Also eine in beide Richtungen stetige Abbildung, wobei $\phi(D)$ mit der Spurtopologie versehen ist.

$$T_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \; \cos\theta_1 \; \cos\theta_2 \; \cdots \; \cos\theta_{p-3} \; \cos\theta_{p-2} \\ \sin\alpha \; \cos\theta_1 \; \cos\theta_2 \; \cdots \; \cos\theta_{p-3} \; \cos\theta_{p-2} \\ \sin\theta_1 \; \cos\theta_2 \; \cdots \; \cos\theta_{p-3} \; \cos\theta_{p-2} \\ \vdots \\ \sin\theta_{p-3} \; \cos\theta_{p-2} \\ \sin\theta_{p-2} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

wobei

$$\det dT_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r^{p-1} \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \ldots \cos^{p-2}\theta_{p-2}, \tag{2.2}$$

angeben. Da $T_n : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \to \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ ein Homöomorphismus ist, folgt elementar, dass

$$\phi : \underbrace{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}}_{=D \subseteq \mathbb{R}^{p-1}} \to S^{p-1}, \quad \phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = T_p \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix}$$

eine Einbettung nach S^{p-1} ist. Ihr Bild $\phi(D)$ ist dabei zwar nicht ganz S^{p-1}, aber das, was von der Einheitskugel fehlt ist verhältnismäßig wenig:

$$\phi(D) = S^{p-1} \setminus \{x \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}.$$

Durch die Wahl eines andern D kann man ganz S^{p-1} durch derartige Einbettungen überdecken.

Um auf d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^p$ integrieren zu können, definiert man das sogenannte Oberflächenmaß. Dafür sei $\phi_j : D_j \to M$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge von Einbettungen, sodass $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(D_j)$[2]. Die Existenz einer solchen Überdeckung folgt aus der Tatsache, dass M versehen mit der Relativtopologie eine abzählbare Basis hat.

Es gibt nun eine Partition, d.h. eine disjunkte Vereinigung,

$$M = \sum_{j\in\mathbb{N}} M_j \text{ mit } M_j \subseteq \phi_j(D_j),\ M_j \in \mathfrak{B}(M),\ j \in \mathbb{N}.$$

$M_j := \phi_j(D_j) \setminus (\phi_1(D_1) \cup \cdots \cup \phi_{j-1}(D_{j-1}))$ ist ein Beispiel für eine solche Partition.

2.1.4 Definition. Für $A \in \mathfrak{B}(M) := \mathfrak{B}_p \cap M$[3] definieren wir[4]

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A\cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_d(s) \quad (\in [0, +\infty]), \tag{2.3}$$

[2] Sollten schon endlich viele Einbettungen $\phi_1, \ldots, \phi_k$ ausreichen, um M zu überdecken, so kann man im folgenden formal mit der Folge $\phi_1, \ldots, \phi_k, \phi_k, \phi_k, \ldots$ arbeiten.

[3] $\mathfrak{B}_p$ sind die Borelteilmengen von $\mathbb{R}^p$.

[4] Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{p\times d}$ mit vollen Rang, dh. $C \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ ist injektiv, die Matrix $C^T C \in R^{d\times d}$ symmetrisch, regulär und positiv definit ist. Somit hat $C^T C$ nur positive Eigenwerte und daher $\det C^T C > 0$.

und nennen μ das *Oberflächenmaß* auf M.

Dieses Maß hat eine Reihe wichtiger Eigenschaften.

2.1.5 Fakta.

1. $\mu : \mathfrak{B}(M) \to [0, +\infty]$ ist tatsächlich ein Maß. Es ist unabhängig von der Wahl der Folge ϕ_j, $j \in \mathbb{N}$, und von der Partition M_j, $j \in \mathbb{N}$, d.h. eine andere Wahl erzeugt dasselbe Maß.

2. Ist $A \in \mathfrak{B}(M)$ im Bild einer Einbettung ϕ enthalten, so gibt es sicherlich eine Folge von Einbettungen, deren Bilder ganz M überdecken, und sodass ϕ das erste Folgenglied ist. Wählt man noch $M_1 = \phi(D)$, so gilt
$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}\, d\lambda_d(s). \tag{2.4}$$

3. Im Falle $d = p$ ist M nach Bemerkung 2.1.2 eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$, und $\iota_M : M \to M$ ist eine Einbettung. Ausgehend von dieser Einbettung folgt wegen $d\iota_M(s) = I \in \mathbb{R}^{d\times d}$ aus Definition 2.1.4 sofort, dass $\mu = \lambda_d$.

4. Für ein messbares $f : M \to [0, +\infty]$ gilt
$$\int_M f\, d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} (f \circ \phi_j) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_d(s), \tag{2.5}$$
wobei die linke Seite genau dann endlich ist, wenn es die rechte Seite ist. Wir schließen daraus, dass ein messbares, reell- oder komlexwertiges f auf M genau dann integriebar ist, wenn
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} |f \circ \phi_j| \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_d(s) < +\infty.$$
In diesem Fall gilt (2.5).

5. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, $R > 0, x \in \mathbb{R}^p$ fest. Mit M ist auch $N := RM + x$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, da mit $\phi : D \to M$ auch $\tilde{\phi} := R\phi + x : D \to N$ eine Einbettung ist. Aus der Beziehung $\sqrt{\det d\tilde{\phi}(s)^T d\tilde{\phi}(s)} = R^d \cdot \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}$ kann man herleiten, dass $\mu_N(RB+x) = R^d \mu_M(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(M)$ und
$$\int_N f\, d\mu_N = R^d \int_M f(Ry + x)\, d\mu_M(y),$$
für jede messbare Funktion $f : N \to [0, +\infty]$, und für jede messbare Funktion $f : N \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{C}$) in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut.

6. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ orthogonal, dh. $TT^* = T^*T = I$. Mit M ist auch $N := T(M)$ eine d-dimensionale

Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, da mit $\phi : D \to M$ auch $\tilde{\phi} := T \circ \phi : D \to N$ eine Einbettung ist. Aus der Beziehung $\sqrt{\det d\tilde{\phi}(s)^T d\tilde{\phi}(s)} = \sqrt{\det d\phi(s)^T T^T T d\phi(s)} = \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}$ kann man herleiten, dass $\mu_N(T(B)) = \mu_M(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(M)$ und

$$\int_N f \, d\mu_N = \int_M f \circ T \, d\mu_M,$$

für jede messbare Funktion $f : N \to [0, +\infty]$, und für jede messbare Funktion $f : N \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{C})$ in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut.

7. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$. Alle $N \subseteq M$, die selber m-dimensionale Mannigfaltigkeiten $(0 < m < d)$ sind, liegen in $\mathfrak{B}(M)$ und haben in M Oberflächenmaß Null. Das gilt auch für alle $B \in \mathfrak{B}(N) = \mathfrak{B}_p \cap N$.

2.1.6 Beispiel. Wir betrachten die $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit S^{p-1} und die Einbettung ϕ aus Beispiel 2.1.3. Ihr Oberflächenmaß werde mit μ bezeichnet.

Ist $A \in \mathfrak{B}(S^{p-1})$, so gilt - beachte, dass $\phi(D)$ offen in S^{p-1} ist und daher in der σ-Algebra $\mathfrak{B}(S^{p-1})$ liegt,

$$\mu(A) = \mu(A \cap \phi(D)) + \mu(A \setminus \phi(D)).$$

Nun gilt $S^{p-1} \setminus \phi(D) \subseteq \{x \in S^{p-1} : x_2 = 0\}$. Die rechte Seite lässt sich als $(p-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit identifizieren. Wegen Fakta 2.1.5, 7, gilt $\mu(A \setminus \phi(D)) = 0$. Aus (2.4) folgt somit

$$\mu(A) = \mu(A \cap \phi(D)) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} \, d\lambda_d(s).$$

Man überprüft leicht, dass $\phi(s)$ normal auf alle Spalten von $d\phi(s)$ steht. Insbesondere hat $dT_p(r,s)^T dT_p(r,s)$ mit $r \in (0, +\infty)$, $s \in D$, Blockdiagonalgestalt (siehe (2.1))

$$dT_p(r,s)^T dT_p(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot d\phi(s)^T d\phi(s). \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} = \frac{1}{r^{p-1}} \sqrt{\det dT_p(r,s)^T dT_p(r,s)} = \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \dots \cos^{p-2}\theta_{p-2}. \tag{2.6}$$

Für ein messbares $f : S^{p-1} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{C})$ gilt somit

$$\int_{S^{p-1}} f \, d\mu = \int_D (f \circ \phi(s)) \cdot \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \dots \cos^{p-2}\theta_{p-2} \, d\lambda_{p-1}(s). \tag{2.7}$$

Ist $R > 0, x \in \mathbb{R}^p$ fest, und betrachtet man die Oberfläche $x + R \cdot S^{p-1}$ der offenen Kugel $U_R(x)$ mit Radius R um x, so ist wegen Fakta 2.1.5, 5, auch $x + R \cdot S^{p-1}$ eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei

$$\int_{x+R\cdot S^{p-1}} f \, d\mu_{x+R\cdot S^{p-1}} = R^{p-1} \int_{S^{p-1}} f(x+Ry) \, d\mu_{S^{p-1}}(y), \tag{2.8}$$

für jedes messbare f definiert auf $x + R \cdot S^{p-1}$. Dabei bezeichnet $\mu_{x+R\cdot S^{p-1}}$ das Oberflächenmaß auf $x + R \cdot S^{p-1}$ und $\mu_{S^{p-1}}$ das Oberflächenmaß auf S^{p-1}.

Ist schließlich $f : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{C})$ integrierbar, so folgt aus der Transformationsregel mehrdimensionaler Integrale (siehe auch (2.6) sowie (2.8))

$$\int_{\mathbb{R}^p} f \, d\lambda_p = \int_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{p-2}} f \circ T_p \cdot |\det dT_p| \, d\lambda_p =$$

$$\int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{p-2}} f(r\cdot\phi\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta_1\\ \vdots\\ \theta_{p-2}\end{pmatrix})\cdot\cos\theta_1\cos^2\theta_2\dots\cos^{p-2}\theta_{p-2}\, d\lambda_{p-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta_1\\ \vdots\\ \theta_{p-2}\end{pmatrix} d\lambda(r) =$$

$$\int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{S^{p-1}} f(ry)\, d\mu(y)\, d\lambda(r) = \int_{(0,+\infty)} \int_{rS^{p-1}} f(y)\, d\mu_{rS^{p-1}}(y)\, d\lambda(r). \tag{2.9}$$

Die Gleichheit gilt auch, wenn $f : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ messbar ist, dh. das Integral auch den Wert $+\infty$ annehmen kann. Wenden wir (2.9) speziell auf $f = \mathbb{1}_{K_R(0)}$ an, so folgt

$$\lambda_p(K_R(0)) = \mu(S^{p-1}) \int_{(0,R]} r^{p-1} d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} \cdot \mu(S^{p-1}). \tag{2.10}$$

Für den Aufbau der Theorie der harmonichen Funktionen benötigen wir den Satz von Gauß und den von Green, die auch noch mit schwächeren Voraussetzungen gültig sind. Wir wollen ihn hier in der Form bringen, in der wir ihn benötigen.

Es geht dabei um offene Teilmengen G des $\mathbb{R}^p$ mit $p \geq 2$ derart, dass der topologische Rand $\partial G = \overline{G} \setminus G$ eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ein Beispiel für so ein G ist der offene Einheitskreis $U_1(0)$, dessen Rand S^{p-1} wir in Beispiel 2.1.3 studiert haben.

In dem Fall gibt es auch eine stetige Funktion, die sogenannte äußere Normalenfunktion, $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^p$ derart, dass für alle $y \in \partial G$

- $\|\nu(y)\| = 1$.
- $\nu(y)$ normal auf den Tangentialraum von ∂G in y steht, dh.

  $$0 = (\nu(y), d\phi(t)a) = \nu(y)^T d\phi(t)a$$

  für alle $a \in \mathbb{R}^{p-1}$ und allen Einbettungen $\phi : D \to \partial G$ mit $\phi(D) \ni y$, wobei $t \in D$ mit $\phi(t) = y$.
- und für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$ gilt $y + \delta\,\nu(y) \in \overline{G}^c$ und $y - \delta\,\nu(y) \in G$, dh. dass $\nu(y)$ ins Äußere von G zeigt.

2.1.7 Satz (*Gaußscher Integralsatz*). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, beschränkt und derart, dass sein Rand ∂G eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Weiters sei $h : \overline{G} \to \mathbb{R}^p$ eine stetige Funktion, sodass $h|_G$ stetig differenzierbar ist.*

Ist $x \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)$ für $i, j = 1, \dots, p$, über G nach λ_p integrierbar, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} h(x)\, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} \nu(y)^T h(y)\, d\mu(y).$$

2.1.8 Satz (*Greenscher Integralsatz*)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, beschränkt und derart, dass sein Rand ∂G eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Weiters seien $g, h : O \to \mathbb{R}$ beide C^2 auf einer offenen, $\overline{G}$ enthaltenden Menge O.*

Dann gilt

$$\int_G (h(x)\triangle g(x) - g(x)\triangle h(x))\, d\lambda_p(x) = \int_{\partial G} (h(y)\frac{\partial g}{\partial \nu(y)}(y) - g(y)\frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y))\, d\mu(y).$$

Dabei ist $\frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)$ die Richtungsableitung von h in Richtung der äußeren Normalen $\nu(y)$, also gleich $dh(y)\nu(y)$.

2.1.9 Beispiel. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, beschränkt und derart, dass sein Rand ∂G eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ist nun h harmonisch auf G und ist $g = 1$, so folgt wegen $\triangle g = 0$ und $\triangle h = 0$ auf G aus Satz 2.1.8, dass

$$0 = \int_{\partial G} (h(y)\frac{\partial g}{\partial \nu(y)}(y) - g(y)\frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y))\, d\mu(y),$$

und wegen $\frac{\partial g}{\partial \nu(y)}(y) = 0$

$$0 = \int_{\partial G} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y).$$

2.2 Poisson Integral

In Hinblick auf Bemerkung 1.1.2 wollen wir im folgenden skalarwertige harmonische Funktionen betrachten, wenn nichts anderes bemerkt wird.

2.2.1 Bemerkung. Sind $x, y \in \mathbb{R}^p$ mit $x \neq 0$, so folgt für $\|.\| = \|.\|_2 = (.,.)^{\frac{1}{2}}$ wegen der Bilinearität des Skalarproduktes

$$\left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^2 = \tag{2.11}$$

$$\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y) + 1 = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1) =$$
$$\|x - y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1).$$

Insbesondere gilt $\|x - y\| = \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$, wenn $\|y\| = 1$, und $\|x - y\| < \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$, wenn $x, y \in U_1(0)$.

Aus dieser Bemerkung folgt, dass die Funktion ($x \in U_1(0) \setminus \{0\}$)

$$w_x(t) = \begin{cases} \ln \|t - x\| - \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\| & , p = 2 \\ \frac{1}{2-p} \cdot \left(\|t - x\|^{2-p} - \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p} \right) & , p > 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{x}{\|x\|^2}\}, \tag{2.12}$$

für $\|t\| = 1$ verschwindet und für $t \in U_1(0) \setminus \{x\}$ negativ ist. Für $x = 0$ erfüllt die Funktion

$$w_0(t) = \begin{cases} \ln \|t\| & , p = 2 \\ \frac{1}{2-p} \cdot (\|t\|^{2-p} - 1) & , p > 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \tag{2.13}$$

auch, dass $w_0(t) = 0$, wenn $\|t\| = 1$, und $w_0(t) < 0$, wenn $t \in U_1(0) \setminus \{0\}$.

Ist g wie in (1.5) bzw. (1.4), so gilt für $x \in U_1(0)$

$$w_x(y) = g_{-x}(y) - \hat{g}_{-x}(y),\ y \in U_1(0) \setminus \{x\},$$

wobei $\hat{g}_{-0} = \frac{1}{2-p} \cdot \mathbb{1}_{(2,+\infty)}(p)$ für $x = 0$ und für $x \neq 0$

$$\hat{g}_{-x}:\ y \mapsto g(\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x),\ y \in \mathbb{R}^p \setminus \{\frac{1}{\|x\|^2}x\}.$$

In Beispiel 1.1.5 haben wir gesehen, dass g_{-x} auf $\mathbb{R}^p \setminus \{x\}$ harmonisch ist. Wegen Fakta 1.1.4, 4, ist auch $\hat{g}_{-x}$ auf $\mathbb{R}^p \setminus \{\frac{x}{\|x\|^2}\}$ und damit ebenso $w_x : \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{x}{\|x\|^2}\} \to \mathbb{R}$ harmonisch für alle $x \in U_1(0) \setminus \{0\}$. Für $x = 0$ ist w_0 auf $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ harmonisch. Man beachte, dass in jedem Fall $K_1(0) \setminus \{x\}$ im Harmonizitätsbereich von w_x enthalten ist.

Zudem haben wir schon ausgerechnet, dass $\nabla w_0(y) = \nabla g(y) = \frac{1}{\|y\|^p} \cdot y$ und somit gilt auch ($x \neq 0$)

$$\nabla w_x(y) = \frac{1}{\|y - x\|^p} \cdot (y - x) - \frac{\|x\|}{\left\|\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x\right\|^p} \cdot (\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x).$$

2.2.2 Bemerkung. Die Funktion $t \mapsto \ln \|t - x\|$ im Fall $p = 2$ bzw. $t \mapsto \|t - x\|^{2-p}$ im Fall $p > 2$ ist für beliebiges $x \in \mathbb{R}^p$ über jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ nach λ_p integrierbar. Dazu sei $R > 0$ so groß, dass $K_R(x)$ das gegebene Kompaktum umfasst. Nun gilt im Fall $p = 2$ mit Transformation auf Polarkoordinaten

$$\int\limits_{K_R(x)} |\ \ln \|t - x\|\ |\ d\lambda_2(t) = \int\limits_{K_R(0)} |\ \ln \|t\|\ |\ d\lambda_2(t) =$$

$$\int\limits_{(0,R]} 2\pi |\ln r| r\ d\lambda(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4}(2\ln R - 1), & R \geq 1 \\ \frac{R^2}{4}(1 - 2\ln R), & R < 1 \end{cases}$$

Im Fall $p > 2$ gilt mit Transformation auf Kugelkoordinaten (siehe auch (2.7))

$$\int\limits_{K_R(x)} \|t - x\|^{2-p}\ d\lambda_p(t) = \int\limits_{K_R(0)} \|t\|^{2-p}\ d\lambda_p(t) =$$

$$\int\limits_{(0,R]} r^{p-1} \cdot \int\limits_{(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{p-2}} r^{2-p} \cdot \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \ldots \cos^{p-2}\theta_{p-2}\ d\lambda_{p-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} d\lambda(r) =$$

$$\frac{R^2}{2} \cdot \mu(S^{p-1}).$$

Somit ist w_0 auf $U_1(0)$ nach λ_p integrierbar. Da für festes $x \in U_1(0) \setminus \{0\}$ die Funktion $t \mapsto \ln \left\|\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x\right\|$ bzw. $t \mapsto \left\|\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x\right\|^{2-p}$ auf $U_1(0)$ beschränkt ist, folgt auch, dass w_x auf $U_1(0)$ nach λ_p integrierbar ist.

2.2.3 Lemma. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen mit $O \supseteq K_1(0)$ und $h : O \to \mathbb{R}$ liege in $C^2(O)$. Dann gilt für alle $x \in U_1(0)$*

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y)\ d\mu(y) + \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int\limits_{U_1(0)} w_x(t) \triangle h(t)\ d\lambda_p(t)$$

wobei $\wp(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$ der Poissonkern ist und $w_x(t)$ wie in (2.12) *definiert ist.*

Beweis. Sei $x \in U_1(0)$ und $0 < \rho$ so klein, dass $K_\rho(x) \subseteq U_1(0)$. Die offene Menge $G = U_1(0) \setminus K_\rho(x)$ erfüllt offenbar $\partial G = S^{p-1} \cup (x + \rho S^{p-1})$, wobei für die äußere Normale gilt

$$\nu(y) = y, \ y \in S^{p-1} \ \text{ und } \ \nu(y) = -\frac{1}{\rho}(y-x), \ y \in x + \rho S^{p-1}.$$

Wenden wir Satz 2.1.8 an, so folgt wegen $\triangle w = 0$ auf G

$$-\int_G w_x(t) \triangle h(t) \, d\lambda_p(t) = \int_{\partial G} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)) \, d\mu(y) =$$

$$\int_{S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)) \, d\mu(y) +$$
$$\int_{x+\rho S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)) \, d\mu(y).$$

Da w_x auf S^{p-1} verschwindet, und da für $x \neq 0$ ($y \in S^{p-1}$ und somit $\Big\| \|x\| y - \frac{1}{\|x\|} x \Big\| = \|x - y\|$)

$$\frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) = (\nabla w_x(y))^T \, \nu(y) = \Big(\frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x) - \frac{\|x\|}{\Big\| \|x\| y - \frac{1}{\|x\|} x \Big\|^p} \cdot (\|x\| y - \frac{1}{\|x\|} x) \Big)^T y =$$

$$\frac{1}{\|y-x\|^p} \Big((y-x) - (\|x\|^2 y - x) \Big)^T y = \frac{1 - \|x\|^2}{\|y-x\|^p} = \wp(x,y),$$

und für $x = 0$ ($y \in S^{p-1}$)

$$\frac{\partial w_0}{\partial \nu(y)}(y) = (\nabla w_0(y))^T \, \nu(y) = \frac{1}{\|y\|^p} \cdot y^T y = 1 = \wp(0,y),$$

folgt

$$\int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y) \, d\mu(y) + \int_G w_x(t) \triangle h(t) \, d\lambda_p(t) = \tag{2.14}$$
$$- \int_{x+\rho S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)) \, d\mu(y) =$$

$$\underbrace{- \int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_2}.$$
$$\underbrace{- \int_{x+\rho S^{p-1}} \hat{g}_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_3} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} g_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_4}$$

Für $y \in x + \rho S^{p-1}$ gilt

$$\frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) = (\nabla g_{-x})^T \nu(y) = -\Big(\frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x)\Big)^T \frac{1}{\rho}(y-x) = -\rho^{1-p}.$$

Aus Fakta 2.1.5, 5, (siehe auch Beispiel 2.1.6) folgt

$$I_1 = \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = -\rho^{1-p} \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y)\, d\mu(y) =$$

$$-\rho^{1-p}\rho^{p-1} \int\limits_{S^{p-1}} h(x+\rho y)\, d\mu(y).$$

Wegen der Stetigkeit von h bei x konvergiert dieser Ausdruck für $\rho \searrow 0$ nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gegen $-\mu(S^{p-1})\, h(x)$.

Da $y \mapsto h(y), y \mapsto \hat{g}_{-x}(y), y \mapsto \nabla h(y), y \mapsto \nabla \hat{g}_{-x}(y)$ alle auf $K_1(0)$ stetig und daher dort beschränkt sind, und da wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$\Big|\frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial \nu(y)}(y)\Big| \le \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\|, \quad \Big|\frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\Big| \le \|\nabla h(y)\|,$$

folgt für ein $C > 0$ mit $C \ge \|\nabla h(y)\| \cdot |\hat{g}_{-x}(y)| + \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\| \cdot |h(y)|,\ y \in K_1(0)$,

$$|I_2 - I_3| \le \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} C\, d\mu = C\rho^{p-1}\mu(S^{p-1}) \to 0, \ \ \rho \searrow 0.$$

Es bleibt I_4. Auf $x + \rho S^{p-1}$ ist $g(y-x)$ konstant gleich $\ln \rho$ im Fall $p = 2$ und konstant gleich $\frac{1}{2-p}\rho^{2-p}$ im Fall $p > 2$. Somit gilt für ein geeignetes $c > 0$ mit $c \ge \|\nabla h(y)\|,\ y \in K_1(0)$,

$$|I_4| \le c \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} |g(y-x)|\, d\mu(y) = c(\rho^{p-1}\mu(S^{p-1})) \cdot \begin{cases} |\ln \rho| & , p = 2 \\ \frac{1}{p-2}\rho^{2-p} & , p > 2 \end{cases} =$$

$$c\mu(S^{p-1}) \cdot \begin{cases} \rho |\ln \rho| & , p = 2 \\ \frac{1}{p-2}\rho & , p > 2 \end{cases} \xrightarrow{\rho \searrow 0} 0.$$

Für $\rho \searrow 0$ folgt die Aussage des Lemmas nun aus (2.14), da wegen Bemerkung 2.2.2 und dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\int\limits_G w_x(t) \triangle h(t)\, d\lambda_p(t) \xrightarrow{\rho \searrow 0} \int\limits_{U_1(0)} w_x(t) \triangle h(t)\, d\lambda_p(t).$$

❑

Im folgenden sei σ das Oberflächenmaß μ auf S^{p-1} multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{\mu(S^{p-1})}$. Somit gilt $\sigma(S^{p-1}) = 1$.

2.2.4 Satz (*Poisson-Darstellung*)**.** *Sei $h : K_1(0) \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_{U_1(0)}$ harmonisch ist. Dann gilt für alle $x \in U_1(0)$*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y),$$

wobei $\wp(x,y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ *der Poissonkern ist. Weiters gilt* $h|_{U_1(0)} \in C^\infty(U_1(0))$*, wobei für alle* $l_1, \dots, l_m \in \{1, \dots, p\}$; $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y). \tag{2.15}$$

Beweis. Ist h harmonisch auf einer $K_1(0)$ umfassenden offenen Menge, so folgt die Darstellung

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y),$$

unmittelbar aus Lemma 2.2.3, da $\triangle h = 0$.

Für allgemeines h wie im Satz gefordert gehen wir folgendermaßen vor. Ein stetiges $h : K_1(0) \to \mathbb{R}$ ist wegen der Kompaktheit von $K_1(0)$ sogar gleichmäßig stetig. Insbesondere konvergiert $x \mapsto h(rx),\ x \in S^{p-1}$ gleichmäßig für $r \nearrow 1$ gegen $h|_{S^{p-1}}$. Für $r \in (0,1)$ ist $x \mapsto h(rx)$ auf $U_{\frac{1}{r}}(0)$ harmonisch. Also wissen wir

$$h(rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y).$$

Wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz geht die rechte Seite für $r \nearrow 1$ gegen $\int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y)$ und die linke wegen der Stetigkeit von h gegen $h(x)$.

Der Rest folgt sofort aus (1.11) in Beispiel 1.1.9.

❑

2.2.5 Korollar (*Mittelwerteigenschaft*)**.** *Sei* $h : G \to \mathbb{R}$ *harmonisch mit* $G \supseteq K_r(a)$ *für* $r > 0$*, so gilt*

$$\int\limits_{S^{p-1}} h(a + ry)\, d\sigma(y) = h(a)\,.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn $G \supseteq U_r(a)$ *und* $h|_{U_r(a)}$ *eine stetige Fortsetzung auf* $K_r(a)$ *hat.*

Beweis. Wende Satz 2.2.4 mit $x = 0$ auf die harmonische Funktion $u \mapsto h(a + ru)$ (vgl. Fakta 1.1.4, 4) an.

❑

2.2.6 Korollar. *Sei* $h : G \to \mathbb{R}$ *harmonisch mit* $G \supseteq U_R(a)$ *für* $R > 0$*, so gilt*

$$\frac{1}{\lambda_p(U_R(a))} \int\limits_{U_R(a)} h\, d\lambda_p = h(a).$$

Beweis. Wir wenden (2.9) auf die Funktion $x \mapsto u(a+x) \cdot \mathbb{1}_{U_R(0)}$ an und erhalten wegen der Translationsinvarianz von λ_p

$$\int\limits_{U_R(a)} h\, d\lambda_p = \int\limits_{U_R(0)} h(a+x)\, d\lambda_p(x) = \int\limits_{(0,R)} r^{p-1} \cdot \int\limits_{S^{p-1}} h(a+ry)\, d\mu(y)\, d\lambda(r) =$$

$$\int\limits_{(0,R)} r^{p-1} \cdot h(a) \cdot \mu(S^{p-1})\, d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} h(a) \mu(S^{p-1}).$$

Die Behauptung folgt nun aus (2.10).

❑

2.2.7 Korollar. *Jedes harmonische $h : G \to \mathbb{R}$ ist in $C^\infty(G)$. Zudem erfüllen die partiellen Ableitungen folgende Abschätzung ($l_1, \dots, l_m \in \{1, \dots, p\}$; $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$),*

$$\frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a) \leq \frac{C_{l_1,\dots,l_m}}{r^m} \cdot \sup_{t \in U_r(a)} |h(t)|, \tag{2.16}$$

wenn nur $U_r(a) \subseteq G$ für eine nur von $l_1, \dots, l_m$ abhängige Konstante $C_{l_1,\dots,l_m}$.

Somit gilt für eine beschränkte harmonische Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ für alle $a \in G$

$$\frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a) \leq \frac{C_{l_1,\dots,l_m}}{d(a, \partial G)^m} \cdot \|h\|_\infty,$$

wobei $d(a, \partial G) = \inf\{\|a - t\| : t \in \partial G\}$.

Beweis. Sei $a \in G$ und $\rho \in (0, r)$, womit sogar $K_\rho(a) \subseteq G$. Offensichtlich ist h in $C^\infty(U_\rho(a))$ genau dann, wenn $x \mapsto h(\rho x + a)$ in $C^\infty(U_1(0))$ liegt. Letzteres haben wir aber in Satz 2.2.4 schon gezeigt.

Aus der Kettenregel und aus (2.15) folgt

$$\rho^m \frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(\rho x + a) = \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} h(\rho x + a) = \int_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x, y) \cdot h(a + \rho y)\, d\sigma(y)\,.$$

Setzen wir $x = 0$, so folgt daraus

$$\left| \frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a) \right| \leq \frac{C_{l_1,\dots,l_m}}{\rho^m} \cdot \sup_{t \in a + \rho \cdot S^{p-1}} |h(t)| \leq \frac{C_{l_1,\dots,l_m}}{\rho^m} \cdot \sup_{t \in U_r(a)} |h(t)|\,,$$

wobei $C_{l_1,\dots,l_m} = \int_{S^{p-1}} \left(\frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x, y) \right)_{x=0} d\sigma(y)$. Die gewünscht Ungleichung folgt für $\rho \nearrow r$.

❑

2.2.8 Korollar. *Ist $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt auf $\mathbb{R}^p$, so ist h konstant, dh. $h \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Da man in (2.16) den Radius r beliebig groß machen kann, und da das Supremum laut Voraussetzung unabhängig von r nach oben abgeschätzt werden kann, gilt insbesondere $\frac{\partial h}{\partial x_j}(a) = 0$. Für alle $a \in \mathbb{R}^p$ und $j = 1, \dots, p$. Daraus folgt leicht, dass h konstant ist.

❑

2.3 Dirichlet Problem

In diesem Abschnitt wollen wir das Dirichletsche Problem lösen und damit eine Art Umkehrung von Satz 2.2.4 herleiten. Selbiges besteht in der Aufgabe, zu einer gegebenen stetigen Funktion auf der Kugeloberfläche S^{p-1} eine stetige Fortsetzung nach $K_1(0)$ zu finden, sodass diese auf $U_1(0)$ harmonisch ist. Um dieses zeigen zu können, wollen wir weitere Eigenschaften des Poisson-Kerns herleiten

2.3.1 Lemma. *Der Poisson-Kern* $\wp(x,y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ *hat folgende Eigenschaften.*

(*i*) *Für alle* $x \in U_1(0)$ *und* $y \in S^{p-1}$ *gilt* $\wp(x,y) > 0$.

(*ii*) *Für alle* $x \in U_1(0)$ *gilt*

$$\int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\sigma(y) = 1\,,$$

(*iii*) *Für jedes* $\xi \in S^{p-1}$ *und jedes* $\delta > 0$

$$\lim_{x\to\xi} \sup_{y\in S^{p-1}\setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y) = 0\,.$$

Beweis. Eigenschaft (i) ist offensichtlich. (ii) folgt aus Satz 2.2.4, wenn wir dort $h \equiv 1$ setzen.

Schließlich folgt (iii) unmittelbar aus der Tatsache, dass für $\|y-\xi\| > \delta$ und $x \in K_{\frac{\delta}{2}}(\xi) \cap U_1(0)$ sicherlich $\|x-y\| > \frac{\delta}{2}$ und daher

$$\wp(x,y) \le 2^p \frac{1-\|x\|^2}{\delta^p}\,.$$

❑

2.3.2 Lemma (*Dirichlet Problem*)**.** *Sei* $u : S^{p-1} \to \mathbb{R}$ *in* $L^1(\sigma)$*. Dann ist*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot u(y)\, d\sigma(y),\ \ x \in U_1(0)\,, \tag{2.17}$$

harmonisch auf $U_1(0)$*. Ist u bei* $\xi \in S^{p-1}$ *stetig, so gilt*

$$\lim_{x\to\xi} h(x) = u(\xi)\,.$$

Insbesondere ist $P[u] : K_1(0) \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $P[u]|_{S^{p-1}} = u$ *und* $P[u]|_{U_1(0)} = h$ *bei* ξ *stetig.*

Beweis. Dass die Funktion (2.17) auf $U_1(0)$ harmonisch ist, haben wir in Beispiel 1.1.9 gesehen. Es bleibt die Grenzwertbeziehung zu zeigen.

Dazu sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so klein, dass $|u(y) - u(\xi)| < \epsilon$, wenn nur $\|y-\xi\| < \delta$. Wegen Lemma 2.3.1, (i) und (ii), folgt für $x \in U_1(0)$

$$|h(x) - u(\xi)| = \left| \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot u(y)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot u(\xi)\, d\sigma(y) \right| \le$$

$$\int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) =$$

$$\int\limits_{S^{p-1}\setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y)\cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) + \int\limits_{S^{p-1}\cap K_\delta(\xi)} \wp(x,y)\cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) \le$$

$$\left(\sup_{y\in S^{p-1}\setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y)\right)\cdot \int_{S^{p-1}} |u(y)-u(\xi)|\, d\sigma(y) + \epsilon \int_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\sigma(y).$$

Wegen Lemma 2.3.1, (iii), wegen $\|u-u(\xi)\|_1 \le \|u\|_1 + \sigma(S^{p-1})u(\xi)$, und wegen Lemma 2.3.1, (ii), ist das kleiner als $\epsilon(\|u\|_1 + u(\xi)) + \epsilon$, wenn nur $\|x-\xi\| < \delta'$ für ein $\delta' \in (0,\delta]$.

Wenn $x \in S^{p-1}$ ist, so folgt aus $\|x-\xi\| < \delta'$ wegen $\delta' \le \delta$ nach der Wahl von δ, dass $|u(x)-u(\xi)| < \epsilon$. Also ist $P[u] : K_1(0) \to \mathbb{R}$ bei ξ stetig.

❑

2.3.3 Satz (*Dirichlet Problem*). *Sei $u : S^{p-1} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung $P[u] : K_1(0) \to \mathbb{R}$ von u, sodass $P[u]|_{U_1(0)}$ harmonisch ist. $P[u]$ ist dabei für $x \in U_1(0)$ gegeben durch*

$$P[u](x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot u(y)\, d\sigma(y).$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Satz 2.2.4 und die Existenz aus Lemma 2.3.2.

❑

2.4 Konvergenz harmonischen Funktionen

2.4.1 Proposition. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen.*

(*i*) *Ist $(h_j)_{j\in J}$ ein Netz reellwertiger harmonischer Funktionen definiert auf G, das* lokal gleichmäßig, *dh. gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen $K \subseteq G$, gegen eine Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch h harmonisch.*

In diesem Fall konvergiert für jedes $l_1,\dots,l_m \in \{1,\dots,p\}; m \in \mathbb{N}$, das Netz

$$\left(\frac{\partial^m h_j}{\partial x_{l_1}\dots\partial x_{l_m}}\right)_{j\in J} \quad \textit{gegen} \quad \frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1}\dots\partial x_{l_m}}.$$

(*ii*) *Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine* lokal gleichmäßig beschränkte Folge *reellwertiger harmonischer Funktionen definiert auf G, die punktweise gegen ein $h : G \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist die Konvergenz sogar lokal gleichmäßig und h somit harmonisch.*

Beweis.

(*i*) Sei $a \in G$ und $r > 0$, sodass $K_r(a) \subseteq G$. Nach Satz 2.2.4 gilt ($j \in J,\ x \in U_1(0)$)

$$h_j(a+rx) = \int_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot h_j(a+ry)\, d\sigma(y).$$

Für jedes $0 < \rho < 1$ wissen wir aus (1.9), dass $|\wp(x,y)| \le c_\rho$ für $x \in K_\rho(0), y \in S^{p-1}$ und für ein $c_\rho > 0$. Da $a + rS^{p-1} \subseteq G$ kompakt ist, konvergiert (h_j) darauf gleichmäßig gegen h. Also folgt ($x \in K_\rho(0)$)

$$\left| \int_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot h_j(a+ry)\, d\sigma(y) - \int_{S^{p-1}} \wp(x,y)\cdot h(a+ry)\, d\sigma(y) \right| \le$$

$$\int_{S^{p-1}} c_\rho \cdot \sup_{t \in a+rS^{p-1}} |h_j(t) - h(t)| \, d\sigma(y) \xrightarrow{j\in J} 0,$$

und daher ($x \in K_\rho(0)$)

$$h(a+rx) = \lim_{j\in J} h_j(a+rx) = \lim_{j\in J} \int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h_j(a+ry) \, d\sigma(y) =$$
$$\int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(a+ry) \, d\sigma(y).$$

Da $\rho < 1$ beliebig war, gilt diese Gleichung für alle $x \in U_1(0)$, womit nach Beispiel 1.1.9 h harmonisch auf $U_r(a)$ und in Folge auf ganz G ist.

Nach (2.15) gilt auch

$$\frac{\partial^m h_j}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a+rx) =$$
$$\int_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x,y) \cdot h_j(a+ry) \, d\sigma(y).$$

Die selbe Gleichung gilt für h statt h_j.

Für jedes $0 < \rho < 1$ wissen wir wieder aus (1.9), dass $|\frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x,y)| \leq d_\rho$ für $x \in K_\rho(0), y \in S^{p-1}$ und für ein $d_\rho > 0$. Wegen der Kompaktheit von $a+rS^{p-1} \subseteq G$ konvergiert (h_j) darauf gleichmäßig gegen h. Also folgt ($x \in K_\rho(0)$)

$$|\frac{\partial^m h_j}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a+rx) - \frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}(a+rx)| =$$

$$\Bigg| \int_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x,y) \cdot h_j(a+ry) \, d\sigma(y) -$$
$$\int_{S^{p-1}} \frac{\partial^m}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} \wp(x,y) \cdot h(a+ry) \, d\sigma(y) \Bigg| \leq$$

$$\int_{S^{p-1}} d_\rho \cdot \sup_{t \in a+rS^{p-1}} |h_j(t) - h(t)| \, d\sigma(y) \xrightarrow{j\in J} 0,$$

Insbesondere konvergiert $(\frac{\partial^m h_j}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}})_{j\in J}$ gleichmäßig auf $U_{\rho \cdot r}(a)$ gegen $\frac{\partial^m h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}}$. Da man jedes kompakte $K \subseteq G$ mit endlich vielen Kugeln der Bauart $U_{\rho \cdot r}(a)$ überdecken kann, folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz auf G.

(*ii*) Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge, die punktweise gegen ein $h : G \to \mathbb{R}$ konvergiert, so sei wieder $a \in G$ und $r > 0$, sodass $K_r(a) \subseteq G$. Nach Satz 2.2.4 gilt ($n \in \mathbb{N}, x \in U_1(0)$)

$$h_n(a+rx) = \int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h_n(a+ry) \, d\sigma(y).$$

Für jedes $0 < \rho < 1$ gilt wieder wegen (1.9) $|\wp(x,y)| \leq c_\rho$ für $x \in K_\rho(0)$ und $y \in S^{p-1}$. Da $a + rS^{p-1} \subseteq G$ kompakt ist, folgt nach Voraussetzung mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz daraus für $n \to \infty$

$$h(a+rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(a+ry)\, d\sigma(y).$$

Nach Beispiel 1.1.9 ist die rechte Seite harmonisch in x. Also ist h harmonisch auf $U_r(a)$ und somit auf G.

Wieder mit Satz 2.2.4 folgt ($x \in K_\rho(0)$)

$$|h_n(a+rx) - h(a+rx)| =$$

$$\left| \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h_n(a+ry)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(a+ry)\, d\sigma(y) \right| \leq$$

$$c_\rho \int\limits_{S^{p-1}} |h_n(a+ry) - h(a+ry)|\, d\sigma(y).$$

Wieder gemäß Voraussetzung folgt aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass die rechte Seite gegen Null konvergiert und zwar unabhängig von $x \in K_\rho(0)$.

Somit konvergiert (h_n) gleichmäßig auf $U_{\rho \cdot r}(a)$ gegen h. Da man jedes kompakte $K \subseteq G$ wieder mit endlich vielen Kugeln der Bauart $U_{\rho \cdot r}(a)$ überdecken kann, folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz.

❑

2.4.2 Lemma (*Harnacksche Ungleichung*)**.** *Sei $h : U_1(0) \to \mathbb{R}$ harmonisch und nichtnegativ. Dann gilt ($x \in U_1(0)$)*

$$\frac{1 - \|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} h(0) \leq h(x) \leq \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}} h(0).$$

Beweis. Zunächst gilt für $x \in U_1(0)$, $y \in S^{p-1}$ wegen der Dreiecksungleichung nach unten bzw. nach oben $1 - \|x\| \leq \|x - y\| \leq 1 + \|x\|$, und somit

$$\frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} \leq \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p} \leq \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}}.$$

Für $r < 1$ und $x \in U_1(0)$ gilt nach Satz 2.2.4 und wegen $h \geq 0$

$$h(rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p} \cdot h(ry)\, d\sigma(y) \leq \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}} \int\limits_{S^{p-1}} h(ry)\, d\sigma(y) = \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}} h(0),$$

bzw.

$$h(rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p} \cdot h(ry)\, d\sigma(y) \geq \frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} \int\limits_{S^{p-1}} h(ry)\, d\sigma(y) = \frac{1+\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} h(0).$$

Mit $r \nearrow 1$ folgt die Aussage.

❑

2.4.3 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Gebiet und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es ein nur von G und K abhängiges $C \in [1, +\infty)$, sodass*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{h(y)}{h(x)} \leq C$$

für alle $x, y \in K$ und alle harmonischen und positiven $h : G \to \mathbb{R}$.

Für alle $x, y \in K$ und alle harmonischen und nichtnegativen $h : G \to \mathbb{R}$ gilt sogar

$$h(y) \leq Ch(x). \tag{2.18}$$

Beweis. Wir zeigen nur $\frac{h(y)}{h(x)} \leq C$, da man die Rollen von x und y vertauschen kann. Dazu sei $s : G \times G \to (0, +\infty]$

$$s(x, y) := \sup\{\frac{h(y)}{h(x)} : h \text{ ist harmonisch und positiv auf } G\}.$$

Sei $x \in G$ fest, und sei $E = \{y \in G : s(x, y) < +\infty\}$. Offensichtlich ist $s(x, x) = 1$ und daher $x \in E$.

Sei $y \in E$ und $U_{2r}(y) \subseteq G$. Für ein positives und harmonisches h auf G folgt aus Lemma 2.4.2 angewandt auf $\xi \mapsto h(y + 2r\xi)$

$$h(y + 2r\xi) \leq \frac{1 + \|\xi\|}{(1 - \|\xi\|)^{p-1}} h(y) \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^{p-1}} s(x, y)h(x), \quad \|\xi\| < \frac{1}{2},$$

und somit $h(\eta) \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}} s(x, y)h(x)$ für alle $\eta \in U_r(y)$. Somit gilt $U_r(y) \subseteq E$, dh. E ist offen.

Ist $y \in \overline{E}$, und ist $U_{2r}(y) \subseteq G$, so gibt es ein $\eta \in U_r(y) \cap E$. Für ein positives und harmonisches h auf G folgt aus Lemma 2.4.2 angewandt auf $\xi \mapsto h(y + 2r\xi)$

$$h(y + 2r\xi) \geq \frac{1 - \|\xi\|}{(1 + \|\xi\|)^{p-1}} h(y) \geq \frac{1 - \frac{1}{2}}{(1 + \frac{1}{2})^{p-1}} h(y), \quad \|\xi\| < \frac{1}{2}.$$

Es gilt $\eta = y + 2r\xi$ mit einem $\|\xi\| < \frac{1}{2}$. Also folgt $s(x, \eta)h(x) \geq h(\eta) \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} h(y)$, und daher $y \in E$. Also ist E auch abgeschlossen.

Da G zusammenhängend ist, muss $E = G$. Also gilt für alle $(x, y) \in G \times G$ $s(x, y) < +\infty$. Ist nun $(a, b) \in K \times K$ und $r > 0$ so, dass $U_r(a), U_r(b) \subseteq G$, so folgt wieder aus Lemma 2.4.2

$$\frac{h(a + 2r\xi)}{h(b + 2r\eta)} \leq \frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}} h(a)}{\frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} h(b)} \leq \frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}}}{\frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}}} s(a, b), \quad \|\xi\|, \|\eta\| < \frac{1}{2}.$$

Da man $K \times K$ mit endlich vielen offenen Mengen der Bauart $U_r(a) \times U_r(b)$ mit $U_r(a), U_r(b) \subseteq G$ überdecken kann, folgt, dass $s|_{K \times K}$ beschränkt ist.

Ist nun h harmonisch und nichtnegativ, so ist $h + \epsilon$ für jedes $\epsilon \in (0, +\infty)$ harmonisch und positiv, womit $\frac{h(y)+\epsilon}{h(x)+\epsilon} \leq C$ bzw. $h(y) + \epsilon \leq C(h(x) + \epsilon)$ für alle $x, y \in K$ folgt. Lassen wir hier ϵ gegen Null gehen, so folgt (2.18).

❑

Wir erhalten als erstes Korollar das sogenannte *Maximumsprinzip* für harmonische Funktionen.

2.4.4 Korollar. *Ist $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^p$, so nimmt h weder ein Minimum noch ein Maximum auf G an, außer h ist konstant.*

Beweis. Angenommen es gilt $h(x) \leq h(y)$ für alle $y \in G$ und ein festes $x \in G$, so ist $y \mapsto h(y) - h(x)$ eine nichtnegative Funktion auf G. Wegen Korollar 2.4.3 gilt daher $h(y) - h(x) \leq C(h(x) - h(x)) = 0$ und zwar für alle $y \in K$, wobei K eine beliebige kompakte, x enthaltende Teilmenge von G ist und $C \geq 1$ nur von K abhängt. Es folgt $h(y) = h(x)$ auf ganz K. Da alle derartigen K sicherlich G ausfüllen, folgt $h \equiv h(x)$.

Für die Aussage mit dem Maximum gehe man von h zu $-h$ über.

❑

2.4.5 Satz (*Prinzip von Harnack*)**.** *Sei $(h_j)_{j\in J}$ ein Netz harmonischer Funktionen definiert auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^p$, sodass $h_j \leq h_k$ für $j \leq k$.*

Dann gilt entweder $h_j(x) \to +\infty,\ j \in J$, für alle $x \in G$ und zwar lokal gleichmäßig, oder $(h_j)_{j\in J}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches h.

Beweis. Ist $j_0 \in J$ fest und bezeichnet $J_{\geq j_0}$ die gerichtete Menge $\{j \in J : j \geq j_0\}$, so konvergiert ein Netz $(y_j)_{j\in J}$ in irgend einem topologischen Raum genau dann, wenn $(y_j)_{j\in J_{\geq j_0}}$ konvergiert.

Somit können wir statt $(h_j)_{j\in J}$ das monoton wachsende Netz $(h_j - h_{j_0})_{j\in J_{\geq j_0}}$ von nichtnegativen harmonischen Funktionen betrachten bzw. wir können oBdA. annehmen, dass $(h_j)_{j\in J}$ schon selber nur aus nichtnegativen harmonischen Funktionen besteht.

Wir setzen $h(x) := \lim_{j\in J} h_j(x) \in [0, +\infty]$. Als monoton wachsendes Netz konvergiert es sicherlich in $[0, +\infty]$ und stimmt mit $\sup_{j\in J} h_j(x)$ überein.

Angenommen, wir haben $h(y) = +\infty$ für mindestens ein $y \in G$, so folgt für ein beliebiges kompaktes $K \subseteq G$ und jedes $x \in K$ aus (2.18) angewandt auf $K \cup \{y\}$, dass $h_j(y) \leq Ch_j(x)$. Somit gibt es zu jedem $\alpha > 0$ ein $j_0 \in J$, sodass $\alpha \leq h_j|_K$ für $j \geq j_0$. Also konvergiert $(h_j)_{j\in J}$ lokal gleichmäßig gegen $+\infty$.

Sei nun $h(x) < +\infty$ für alle $x \in G$, sei $K \subseteq G$ eine beliebige kompakte Teilmenge, und sei $x \in K$ fest. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $j_0 \in J$ mit $h(x) - h_j(x) \leq \epsilon$ für alle $j \geq j_0$.

Wir halten so ein $j \geq j_0$ fest. Für jedes $k \in J_{\geq j} = \{m \in J : m \geq j\}$ und jedes $y \in K$ folgt aus (2.18) wegen $h_k \geq h_j$

$$|h_k(y) - h_j(y)| = h_k(y) - h_j(y) \leq C(h_k(x) - h_j(x)).$$

Da auch $h(t) = \lim_{k\in J_{\geq j}} h_k(t)$ für jedes $t \in K$, folgt $|h(y) - h_j(y)| \leq C(h(x) - h_j(x)) \leq C\epsilon$ und daher $\|h|_K - (h_j)|_K\|_\infty \leq C\epsilon$. Also konvergiert $(h_j)_{j\in J}$ lokal gleichmäßig gegen h, welches nun nach Proposition 2.4.1 harmonisch ist.

❑

2.5 Maximumsprinzip und Folgerungen daraus

Als erste Folgerung des Maximumprinzips (Korollar 2.4.4) und der Harnackschen Ungleichung bringen wir eine Wachstumsaussage für harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^p$, die eine Verfeinerung von Korollar 2.2.8 darstellt. Dazu sei an Lemma 2.4.2 erinnert. Ist $h : U_R(y) \to \mathbb{R}$ harmonisch und nichtnegativ für ein $R > 0$, so folgt aus der Ungleichung in Lemma 2.4.2 angewandt auf $\xi \mapsto h(y + R\xi)$ mit $R\xi = x$ für $\|\xi\| < 1$ bzw. $\|x\| < R$

$$R^{p-2}\frac{R - \|x\|}{(R + \|x\|)^{p-1}}h(y) \leq h(y + x) \leq R^{p-2}\frac{R + \|x\|}{(R - \|x\|)^{p-1}}h(y). \tag{2.19}$$

2.5.1 Proposition. *Sei $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ harmonisch und nicht konstant. Setzt man für $r \in [0, +\infty)$*

$$M_{max}(r) := \sup_{\|x\|=r} u(x), \quad M_{min}(r) := \inf_{\|x\|=r} u(x),$$

so gilt

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{M_{min}(r)}{r} < 0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{M_{max}(r)}{r}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^p$ fest und betrachte $r \in (\|x\|, +\infty)$. Wegen Korollar 2.4.4 nimmt u das Maximum auf $K_r(0)$ am Rand an, also $M_{max}(r) = \sup_{\|x\|\le r} u(x)$. Insbesondere ist $M_{max}(r) - u$ auf $U_r(0)$ positiv und harmonisch, und nach (2.19) gilt

$$M_{max}(r) - u(x) \le r^{p-2} \frac{r + \|x\|}{(r - \|x\|)^{p-1}} (M_{max}(r) - u(0))$$

bzw.

$$u(x) \ge u(0) r^{p-2} \frac{r + \|x\|}{(r - \|x\|)^{p-1}} - M_{max}(r) \frac{r^{p-2}(r + \|x\|) - (r - \|x\|)^{p-1}}{(r - \|x\|)^{p-1}}. \tag{2.20}$$

Nun gilt $r^{p-2}(r + \|x\|) - (r - \|x\|)^{p-1} = r^{p-2}(\|x\| + (p-1)\|x\|) + q(r)$ mit einem Polynom $q(r)$ vom Grad höchstens $p - 3$. Insbesondere konvergiert

$$r \cdot \frac{r^{p-2}(r + \|x\|) - (r - \|x\|)^{p-1}}{(r - \|x\|)^{p-1}}$$

für $r \to +\infty$ gegen $(\|x\| + (p-1)\|x\|)$.

Angenommen $\liminf_{r\to+\infty} \frac{M_{max}(r)}{r} \le 0$, so gibt es eine monton wachsende Folge $r_n \nearrow +\infty$, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{M_{max}(r_n)}{r_n} = \alpha$ für ein $\alpha \le 0$.

Setzt man $r = r_n$ in (2.20), so folgt aus dieser Ungleichung für $n \to \infty$

$$u(x) \ge u(0) - \alpha\, (\|x\| + (p-1)\|x\|) \ge u(0).$$

Somit wäre 0 ein Minimum von u, was aber Korollar 2.4.4 widerspricht. Also gilt $0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{M_{max}(r)}{r}$.

$\limsup_{r\to+\infty} \frac{M_{min}(r)}{r} < 0$ folgt aus dieser Ungleichung, indem man $-u$ statt u betrachtet.

❑

2.5.2 Bemerkung. Man beachte, dass wegen dem Lemma vom iterierten Infimum $\inf_{r\ge R} \frac{1}{r} \inf_{\|x\|=r} u(x) = \inf_{\|x\|\ge R} \frac{u(x)}{\|x\|}$. Also gilt mit der Notation aus Proposition 2.5.1

$$\liminf_{\|x\|\to+\infty} \frac{u(x)}{\|x\|} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{M_{min}(r)}{r} \le \limsup_{r\to+\infty} \frac{M_{min}(r)}{r} < 0$$

und

$$0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{M_{max}(r)}{r} \le \limsup_{r\to+\infty} \frac{M_{max}(r)}{r} = \limsup_{\|x\|\to+\infty} \frac{u(x)}{\|x\|}$$

für nicht konstantes harmonisches $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Unmittelbar aus Proposition 2.5.1 folgt

2.5.3 Korollar. *Ist $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ harmonisch und gilt immer $u \ge 0$ oder immer $u \le 0$, so ist u konstant.*

Wir wollen uns kurz mit sogenannten von oben halbstetigen Funktionen beschäfigen.

2.5.4 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Funktion $u : X \to [-\infty, +\infty)$ heißt *von oben halbstetig*, wenn $u^{-1}[-\infty, \eta)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$ ist.

Eine äquivalente Forderung ist klarerweise die Abgeschlossenheit von $u^{-1}[\eta, +\infty)$.

2.5.5 Beispiel. Stetige Funktionen sind klarerweise von oben halbstetig.
Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist aber auch $\mathbb{1}_A$ von oben halbstetig.

Funktionen mit Werten in $[-\infty, +\infty)$ lassen sich addieren, indem man $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) + \alpha = -\infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ setzt. Sie lassen sich auch mit nichtnegativen Skalaren multiplizieren, indem man $(-\infty) \cdot 0 = 0$ und $\lambda \cdot (-\infty) = -\infty$ für $\lambda > 0$ setzt. Man erhält dann immer auch Funktionen mit Werten in $[-\infty, +\infty)$.

2.5.6 Fakta.

1. Seien $u_1, u_2 : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben, und sei $u := u_1 + u_2$. Für $\eta \in \mathbb{R}$ gilt, wie man leicht nachprüft,
$$u^{-1}[-\infty, \eta) = \{x \in X : u_1(x) + u_2(x) < \eta\} =$$
$$\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \{x \in X : u_1(x) < \tau,\ u_2(x) < \eta - \tau\} = \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} u_1^{-1}[-\infty, \tau) \cap u_2^{-1}[-\infty, \eta - \tau).$$
Also ist $u^{-1}[-\infty, \eta)$ offen und damit u auch halbstetig von oben.
Für $\lambda > 0$ und von oben halbstetiges u gilt $(\lambda u)^{-1}[-\infty, \eta) = u^{-1}[-\infty, \frac{\eta}{\lambda})$. Somit ist λu von oben halbstetig.
Insgesamt ist $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ halbstetig von oben, wenn $u_1, \ldots, u_n$ halbstetig von oben sind und wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.

2. Ist $u_i : X \to [-\infty, +\infty)$, $i \in I$, eine Familie von nach oben halbstetigen Funktionen, so ist auch $u := \inf_{i \in I} u_i : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben, da für $\eta \in \mathbb{R}$
$$u^{-1}[-\infty, \eta) = \{x \in X : \inf_{i \in I} : u_i(x) < \eta\} =$$
$$\{x \in X : \exists i \in I : u_i(x) < \eta\} = \bigcup_{i \in I} u_i^{-1}[-\infty, \eta),$$
und Vereinigungen offener Mengen sind offen.

3. Ist $u_i : X \to [-\infty, +\infty)$, $i \in I$, eine endliche Familie von nach oben halbstetigen Funktionen, so ist auch $u := \max_{i \in I} u_i : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben, da für $\eta \in \mathbb{R}$
$$u^{-1}[-\infty, \eta) = \{x \in X : \max_{i \in I} : u_i(x) < \eta\} =$$
$$\{x \in X : \forall i \in I : u_i(x) < \eta\} = \bigcap_{i \in I} u_i^{-1}[-\infty, \eta),$$
und endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

4. Ist $Y \subseteq X$ und $u : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben, so ist $u|_Y$ halbstetig von oben auf Y, wenn man Y mit der Spurtopologie versieht.

5. Da alle offenen unbeschränkten Intervalle eine Subbasis von $\mathbb{R}$ darstellen, ist $u : X \to (-\infty, +\infty)$ genau dann stetig, wenn u und $-u$ von oben halbstetig sind.

6. Ist Z ein weiterer topolgischer Raum, $\phi : Z \to X$ stetig und $u : X \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig, so ist $u \circ \phi : Z \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig.

7. Sei $u : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben und sei $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $u|_K$ nach oben beschränkt und nimmt ein Maximum an. In der Tat ist,
$$(u^{-1}[-\infty, \eta))_{\eta\in\mathbb{R}}$$
eine offene Überdeckung von K, und hat somit eine endliche Teilüberdeckung, dh.
$$K \subseteq u^{-1}[-\infty, \eta_1) \cup \cdots \cup u^{-1}[-\infty, \eta_m) = u^{-1}[-\infty, \max_{j=1,\ldots,m} \eta_j)$$
bzw. $u(x) < \max_{j=1,\ldots,m} \eta_j,\ x \in K$.
Wäre schließlich $\beta = \sup_{x\in K} u(x)$ kein Maximum, so gilt $u(x) < \beta$ für alle $x \in K$, womit
$$(u^{-1}[-\infty, \eta))_{\eta\in\mathbb{R},\ \eta<\beta}$$
ebenfalls eine offene Überdeckung von K ist. Wie oben finden wir ein $\eta \in \mathbb{R},\ \eta < \beta$, mit $K \subseteq u^{-1}[-\infty, \eta)$, was aber $\sup_{x\in K} u(x) \leq \eta < \beta$ implizieren würde.

8. Wird X mit den Borelmengen $\mathfrak{B}(X)$ versehen, so folgt unmittelbar aus der Definition, dass jede von oben halbstetige Funktion $u : X \to [-\infty, +\infty)$ messbar ist, wenn wir $[-\infty, +\infty)$ mit den Borelmengen darauf versieht.

9. Man zeigt unschwer, dass u genau dann halbstetig von oben ist, wenn für alle $x \in X$ und allen Netzen $(x_i)_{i\in I}$ aus $x_i \to x$ immer auch
$$\limsup_{i\in I} u(x_i) \leq u(x)$$
folgt.

10. Ist $(X, \mathcal{T})$ eine metrische Topologie, dh. $\mathcal{T}$ wird von einer Metrik d induziert, so ist u genau dann halbstetig von oben, wenn für jedes $x \in X$ gilt[5]
$$\limsup_{y\to x} u(y) \leq u(x)\,. \tag{2.21}$$
Ist nämlich u halbstetig von oben und $x \in X$, so ist für jedes $\eta > u(x)$, $\eta \in (-\infty, +\infty)$ die Menge $u^{-1}[-\infty, \eta)$ eine offene, x enthaltende Teilmenge von X. Also gilt
$$\sup_{y\in K_\delta(x)\setminus\{x\}} u(y) \leq \eta,$$
wenn nur $\delta > 0$ so klein ist, dass $K_\delta(x) \subseteq u^{-1}[-\infty, \eta)$. Da $\eta > u(x)$ beliebig war, folgt $\limsup_{y\to x} u(y) \leq u(x)$.

Gelte umgekehrt (2.21) für jedes $x \in X$. Sei $\eta \in (-\infty, +\infty)$ und $x \in u^{-1}[-\infty, \eta)$ beliebig. Wegen (2.21) und $u(x) < \eta$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\sup_{y\in K_\delta(x)\setminus\{x\}} u(y) < \eta$. Das bedeutet aber $K_\delta(x) \subseteq u^{-1}[-\infty, \eta)$, womit letztere Menge offen ist.

[5] $\limsup_{y\to x} u(y) := \lim_{\delta\searrow 0} \sup_{y\in K_\delta(x)\setminus\{x\}} u(y) = \inf_{\delta>0} \sup_{y\in K_\delta(x)\setminus\{x\}} u(y)$.

11. Aus dem letzten Punkt folgt unmittelbar, dass halbstetig von oben auf einem metrischen Raum zu sein eine lokale Eigenschaft ist, dh. $u : X \to [-\infty, +\infty)$ ist genau dann von oben halbstetig, wenn es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ gibt, sodass $u|_{U_{\epsilon_x}(x)}$ halbstetig von oben ist.

An dieser Stelle sei auf den Integrationskalkül für $[-\infty, +\infty]$-wertige Funktionen f, die messbar auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind, hingewiesen. Dazu setzt man

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega \max(f, 0) \, d\mu - \int_\Omega \max(-f, 0) \, d\mu,$$

wann immer nicht beide Integrale rechts gleich $+\infty$ sind. Das Integral $\int_\Omega f \, d\mu$ hat dann Werte in $[-\infty, +\infty]$. Dieses Integral ist linear und monoton, wenn man die Arithmetik in $[-\infty, +\infty]$ zu Grunde legt, mit der Einschränkung, dass keine nicht definierten Ausdrücke, wie $+\infty + -\infty$ auftreten dürfen.

Aus Fakta 2.5.6 folgt insbesondere, dass nach oben halbetstige Funktionen f auf kompakten Mengen nach oben beschränkt sind. Also können wir sie nach Borelmaßen auf diesen Kompkta nach obigen Verständnis integrieren, da $\max(f, 0)$ immer beschränkt und daher endliches Integral hat. Das Integral von f hat dann Werte in $[-\infty, +\infty)$, wobei $-\infty$ genau dann herauskommt, wenn das Integral von $\max(-f, 0)$ nicht endlich ist.

Wir benötigen einige elementare topologische Betrachtungen in $\mathbb{R}^p$.

2.5.7 Fakta.

1. Ist $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie bestehend aus zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes, sodass $\bigcap_{i\in I} E_i \neq \emptyset$, so ist auch $E := \bigcup_{i\in I} E_i$ zusammenhängend.
Beweis:

Wir halten einen Punkt $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$ fest. Angenommen $E = A \dot\cup B$ mit getrennten, nichtleereren Mengen A und B. Wir wählen die Bezeichnung so, dass $x \in A$.

Es folgt $E_i = (A \cap E_i) \dot\cup (B \cap E_i)$ für jedes $i \in I$. Wegen $\overline{A \cap E_i} \cap (B \cap E_i) \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$ und $(A \cap E_i) \cap \overline{B \cap E_i} \subseteq A \cap \overline{B} = \emptyset$ sind auch $A \cap E_i$ und $B \cap E_i$ getrennt.

Da E_i zusammenhängend ist, muss eine dieser Mengen leer sein. Wegen $x \in A \cap E_i$ muss $B \cap E_i = \emptyset$. Das gilt für alle $i \in I$, und somit $B \cap E = \bigcup_{i\in I}(B \cap E_i) = \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von A und B.

2. Eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ist genau dann zusammenhängend, dh. ein Gebiet, wenn es zu je zwei $x, y \in D$ eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to D$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.
Beweis:

Angenommen je zwei Punkte aus D sind durch einen stetigen Weg verbindbar. Dann sei x irgendein fester Punkt aus D. Zu jedem $y \in D$ gibt es einen stetigen Weg $\gamma_y : [a_y, b_y] \to D$ mit $\gamma_y(a_y) = x$ und $\gamma_y(a_y) = y$. Es folgt

$$D = \bigcup_{y\in D} \{y\} \subseteq \bigcup_{y\in D} \gamma_y([a_y, b_y]) \subseteq D.$$

Also ist D die Vereinigung der als stetige Bilder von Intervallen zusammenhängenden Mengen $\gamma_y([a_y, b_y])$, $y \in D$. Nach unserer Wahl von γ_y haben diese Mengen zumindest den Punkt x gemein. Nach 1 ist D zusammenhängend.

Sei nun umgekehrt D zusammenhängend und $x \in D$ wieder fest. Wir bezeichnen mit A die Menge aller Punkte $y \in D$, die mit x durch einen stetigen Weg verbindbar sind. Da $\overrightarrow{xx}$ auch ein solcher ist, folgt $x \in A$, also $A \neq \emptyset$. Klarerweise ist $B := D \setminus A$ die Menge aller $y \in D$, die mit x nicht durch einen stetigen Weg verbindbar sind.

Sei $y \in A$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y) \subseteq D$. Ist nun $\gamma : [a, b] \to D$ ein stetiger Weg von x nach y, daher $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$, und $z \in U_\delta(y)$, so ist die Abbildung $\beta : [a, b + 1] \to D$ definiert durch $\beta|_{[a,b]} = \gamma$ und $\beta|_{[b,b+1]}(s) = y + (s - b)(z - y)$ ein stetiger Weg von x nach z. Also ist $z \in A$ und daher $U_\delta(y) \subseteq A$. Somit ist A offen.

Sei nun $y \in B$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y) \subseteq D$. Wäre ein $z \in U_\delta(y)$ auch in A, so gäbe es einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \to D$ von x nach z. Die Abbildung $\beta : [a, b + 1] \to D$ definiert durch $\beta|_{[a,b]} = \gamma$ und $\beta|_{[b,b+1]}(s) = z + (s - b)(y - z)$ wäre dann aber ein stetiger Weg von x nach y.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $z \in B$ und somit $U_\delta(y) \subseteq B$. Also ist auch B offen. Da D zusammenhängend ist, und da $A \neq \emptyset$, muss $B = \emptyset$ bzw. $D = A$.

3. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$ eine nichtleere, offene Menge, so lässt sich D als Vereinigung von paarweise disjunkten Gebieten schreiben:
$$D = \bigcup_{i \in I} D_i.$$
Für $x \in D$ ist dasjenige D_i mit $x \in D_i$ das größte x enthaltende und in G enthaltene Gebiet.
Beweis:

Wir definieren auf D eine Relation. $x \sim y$ gelte genau dann, wenn es ein Gebiet $G \subseteq D$ gibt, sodass $x, y \in G$. Da für $\epsilon > 0$ hinreichend klein die offene Kugel $U_\epsilon(x)$ ein in D enthaltenes Gebiet ist, ist $\sim$ reflexiv. Die Symmetrieeigenschaft ist offensichtlich, und die Translativität folgt sofort aus 1.

Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Also zerfällt D in Äquivalenzklassen $[x]_\sim$, $x \in D$. Klarerweise ist $[x]_\sim$ die Vereinigung aller Gebiete $\subseteq G$, die x enthalten, und daher offen und zusammenhängend (vgl. 1) und daher das größte x enthaltende Gebiet $\subseteq G$.

4. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$ eine nichtleere, offene Menge, und ist $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ wie im letzten Punkt, so gilt für jedes i, dass $D_i \subseteq (\bigcup_{j \neq i} D_j)^c$ und daher $\overline{D_i} \subseteq (\bigcup_{j \neq i} D_j)^c$. Somit gilt
$$\partial D_i = \overline{D_i} \setminus D_i \subseteq \overline{D} \cap (\bigcup_{j \neq i} D_j)^c \cap D_i^c = \partial D.$$

5. Jede offene Teilmenge G von $\mathbb{R}^p$ mit $\emptyset \neq G \neq \mathbb{R}^p$ hat einen nichtleeren Rand, da sonst G offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}^p$ wäre, was aber dem widerspricht, dass $\mathbb{R}^p$ zusammenhängend ist.

Wir wollen nun einen anderen Beweis für das Maximumsprinzip angeben. Dieser funktioniert für eine größere Funktionenklasse als die der harmonischen Funktionen.

2.5.8 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $u : G \to [-\infty, \infty)$ halbstetig von oben. Dann heißt u *subharmonisch* auf G, falls es zu jedem $a \in G$ eine Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestehend aus positiven Zahlen gibt, sodass $K_{r_n}(a) \subseteq G$ und
$$u(a) \leq \int_{S^{p-1}} u(a + r_n y)\, d\sigma(y) \tag{2.22}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.5.9 Fakta.

1. Wegen der Mittelwerteigenschaft, Korollar 2.2.5, sind harmonische Funktionen subharmonisch.

2. Allgemeiner folgt aus der Mittelwerteigenschaft auch sofort, dass wenn $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch und $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, die Funktion $u + h : G \to [-\infty, \infty)$ auch subharmonisch ist.

3. Schließlich sieht man unmittelbar aus der Definition, dass mit u auch $x \mapsto u(b + rx)$ für ein $b \in \mathbb{R}^p$ und ein $r > 0$ subharmonisch ist.

2.5.10 Lemma. *Sei G ein Gebiet und $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch. Nimmt u ein Maximum an, dh. es gibt ein $b \in G$ mit $u(b) \geq u(x)$ für alle $x \in G$, so ist u konstant.*

Beweis. Ist $u(b) = -\infty$, so ist u konstant gleich $-\infty$. Also sei $u(b) \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$A = \{x \in G : u(x) = u(b)\} \text{ und } B = G \setminus A = \{x \in G : u(x) < u(b)\}.$$

Wegen $A = u^{-1}[u(b), +\infty)$ ist A abgeschlossen in G und daher B offen in G und daher auch in $\mathbb{R}^p$. Außerdem ist A laut Voraussetzung nichtleer.

Angenommen B ist auch nichtleer. Wähle $z \in B$ und $x \in A$ beliebig und einen stetigen Wegen $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = z$. Das ist möglich, weil G ein Gebiet ist. Sei $t = \sup \gamma^{-1}(A)$. Wegen $\gamma^{-1}(A)\dot{\cup}\gamma^{-1}(B) = [0,1]$, der Abgeschlossenheit von $\gamma^{-1}(A)$ und $1 \in \gamma^{-1}(B)$ muss $1 > t \in \gamma^{-1}(A)$, womit auch $a := \gamma(t) \in A$. Zudem gilt $\gamma(s) \in B$ für $s \in (t,1]$.

Die Funktion $\phi : s \mapsto \|a - \gamma(s)\|$ als Abbildung von $[t,1]$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt $\phi(t) = 0,\ \phi(1) = \|a - z\|$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem $0 < r < \min(\|a - z\|, d(a, G^c))$ ein $s \in (t,1]$, sodass $\|a - \gamma(s)\| = r$. Also gilt $\gamma(s) \in \partial K_r(a) \cap B$, womit $B \cap (a + rS^{p-1}) \neq \emptyset$ für hinreichend kleines $r > 0$. Aus der Voraussetzung folgt für hinreichend großes n wegen $u(b) = u(a) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{S^{p-1}} (u(a + r_n y) - u(b))\, d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{p-1}\cap\frac{1}{r_n}(B-a)} (u(a + r_n y) - u(b))\, d\sigma(y) + \int_{S^{p-1}\setminus\frac{1}{r_n}(B-a)} (u(a + r_n y) - u(b))\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Als affines Translat von $B \cap (a + r_n S^{p-1})$ ist $S^{p-1} \cap \frac{1}{r_n}(B - a)$ nichtleer und offen, dh. $\sigma(S^{p-1} \cap \frac{1}{r_n}(B - a)) > 0$. Zudem ist $u(a + r_n y) - u(b)$ nichtpositiv auf S^{p-1} und sogar negativ auf $S^{p-1} \cap \frac{1}{r_n}(B - a)$. Also ist das erste Integral oben negativ und das zweite nicht positiv. Das ist aber ein Widerspruch zu obiger Ungleichung. Also muss $B = \emptyset$ bzw. $u \equiv u(b)$ sein.

❑

Folgender Satz geht auf die Betrachtungen von *Phragmen-Lindelöf* zurück.

2.5.11 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und sei $\partial_\infty G$ der Rand von G betrachtet als Teilmenge von $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ versehen mit der Alexandroff-Kompaktifizierung, dh. $\partial_\infty G = \partial G$ für beschränktes G und $\partial_\infty G = \partial G \cup \{\infty\}$ sonst.*

Weiters sei $C \in \mathbb{R}$ und $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch. Angenommen $\partial_\infty G = R\dot{\cup}S$, sodass

⇝ *für alle $r \in R$* [6]

$$\limsup_{x\to r} u(x) \leq C,$$

⇝ *es ein subharmonisches $h : G \to (-\infty, 0]$ derart gibt, dass es für jedes $s \in S$ und jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von s (in $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$) gibt mit*

$$u|_{G\cap U} \leq C - \epsilon h, \tag{2.23}$$

dann gilt $u \leq C$ auf G.

[6] $\limsup_{x\to r} u(x) := \lim_{\delta\searrow 0} \sup_{x\in G\cap K_\delta(r)\setminus\{r\}} u(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{x\in G\cap K_\delta(r)\setminus\{r\}} u(x)$.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass $S = \emptyset$, dh. $R = \partial_\infty G$. Wir setzen

$$m := \sup\{u(x) : x \in G\} \ (\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}).$$

Sei (x_n) eine Folge aus G mit $u(x_n) \to m$. Da $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ kompakt ist, können wir sogar annehmen, dass $x_n \to x \in G \cup \partial_\infty G$.

Ist $x \in G$, so folgt aus der Halbstetigkeit von oben

$$m = \limsup_{n\to\infty} u(x_n) \le \limsup_{y\to x} u(y) \le u(x) \le m.$$

Ist G' das größte in G enthaltene Gebiet mit $x \in G'$, so folgt aus Lemma 2.5.10, dass $u|_{G'} \equiv u(x) = m$. Für jeden Punkt $r \in \partial_\infty G'$ ($\neq \emptyset$) folgt $r \in \partial_\infty G$ und daher aus $\limsup_{x\to r} u(x) \le C$, dass $m \le C$.

Ist dagegen $x \in \partial_\infty G$, so folgt voraussetzungsgemäß $m = \limsup_{n\to\infty} u(x_n) \le \limsup_{y\to x} u(y) \le C$. In jedem Fall gilt $u(x) \le m \le C$ für alle $x \in G$.

Im allgemeinen Fall $S \neq \emptyset$ betrachte man die subharmonische Funktion $u + \epsilon\, h$ für beliebiges $\epsilon > 0$, vgl. Fakta 2.5.9. Wegen (2.23) erfüllt diese Funktion $\limsup_{x\to r}(u + \epsilon\, h) \le C$ für alle $r \in \partial_\infty G$. Aus dem Bewiesenen folgt $u + \epsilon\, h \le C$, und da $\epsilon > 0$ beliebig war, sogar $u \le C$.

❑

2.5.12 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt, sei $u : \overline{G} \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig und so, dass $u|_G$ subharmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum über $\overline{G}$ auf ∂G an.*

Beweis. Laut Voraussetzung ist $\partial_\infty G = \partial G$ kompakt. Wegen Fakta 2.5.6, 7, nimmt $u|_{\partial G}$ ein Maximum C bei einem $x_0 \in \partial G$ an, dh. $C = u(x_0) \ge u(x)$ für alle $x \in \partial G$.

Wegen der Halbstetigkeit von oben gilt $\limsup_{y\to x} u(y) \le u(x) \le C$ für alle $x \in \partial G$, vgl. (2.21). Aus Satz 2.5.11 folgt daher $u(y) \le u(x_0)$ für alle $y \in G$.

❑

2.5.13 Korollar. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $u : D \to [-\infty, +\infty)$ subharmonisch. Weiters sei $G \subseteq D$ offen und beschränkt mit $\overline{G} \subseteq D$, und $h : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_G$ harmonisch ist. Gilt nun $u|_{\partial G} \le h|_{\partial G}$, so folgt $u|_{\overline{G}} \le h$ auf ganz $\overline{G}$.*

Beweis. Die Funktion $u - h$ ist von oben halbstetig auf $\overline{G}$ und das Maximum von $(u - h)|_{\partial G}$ ist kleiner oder gleich Null. Nach Korollar 2.5.12 gilt daher auch $u - h \le 0$ auf $\overline{G}$.

❑

Wir wollen nun einige weitere Folgerungen dieser Maximumsprinzipien herleiten.

2.5.14 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $h : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- *h ist harmonisch.*
- *Für alle $a \in G$ und alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt*

$$h(a) = \int_{S^{p-1}} h(a + ry)\, d\sigma(y). \tag{2.24}$$

$\multimap$ *h und $-h$ sind subharmonisch.*

Beweis. Dass aus harmonisch (2.24) folgt, ist gerade die Mittelwerteigenschaft, und aus (2.24) folgt trivialerweise, dass h und $-h$ subharmonisch sind.

Gilt nun, dass h und $-h$ subharmonisch sind, so nehme man ein beliebiges $a \in G$ und $r > 0$ so, dass $K_r(a) \subseteq G$. Wegen Satz 2.3.3 (Dirichletsches Problem) angewandt auf $y \mapsto h(a + ry)$, $\|y\| = 1$ und dann nach $K_r(a)$ zurückverschoben, gibt es eine stetige Funktion v auf $K_r(a)$, die auf $U_r(a)$ harmonisch ist und die auf $\partial K_r(a)$ mit h übereinstimmt.

Somit gilt $h|_{\partial K_r(a)} \leq v|_{\partial K_r(a)}$ und $-h|_{\partial K_r(a)} \leq -v|_{\partial K_r(a)}$ und aus Korollar 2.5.13 folgt daher $h|_{K_r(a)} \leq v|_{K_r(a)}$ und $-h|_{K_r(a)} \leq -v|_{K_r(a)}$ bzw. $h|_{K_r(a)} \equiv v$. Insbesondere ist h auf $U_r(a)$ harmonisch.

❑

2.5.15 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $a \in G$ und $h : G \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ harmonisch. Ist h beschränkt auf $G \setminus \{a\}$, oder gilt allgemeiner*

$$0 = \begin{cases} \lim_{x\to a} h(x) \cdot \frac{1}{\ln \|x-a\|} & , \ p = 2 \\ \\ \lim_{x\to a} h(x) \cdot \|x-a\|^{p-2} & , \ p > 2 \end{cases}$$

so ist h harmonisch auf G fortsetzbar.

Beweis. Da mit h auch jede Funktion der Bauart $x \mapsto h(b+Rx)$ harmonisch ist, können wir oBdA. annehmen, dass G eine offene Obermenge von $K_1(0)$ ist, und dass $a = 0$.

Sollte h auf G harmonisch fortsetzbar sein, so muss h laut Satz 2.3.3 mit $P[h|_{S^{p-1}}]$ auf $K_1(0)$ aus (2.17) übereinstimmen. Wir setzen für $x \in K_1(0) \setminus \{0\}$

$$v(x) := h(x) - P[h|_{S^{p-1}}](x).$$

Dann ist v auf $K_1(0) \setminus \{0\}$ stetig. Auf $U_1(0) \setminus \{0\}$ ist v harmonisch. Der Rand von $U_1(0) \setminus \{0\}$ ist $S^{p-1} \dot\cup \{0\}$. Für $y \in S^{p-1}$ erfüllt v

$$\lim_{x\to y} v(x) = 0.$$

Da $P[h|_{S^{p-1}}]$ auf $K_1(0)$ beschränkt ist, erfüllt v bei 0

$$0 = \lim_{x\to 0} v(x) \cdot \begin{cases} \frac{1}{(-\ln \|x\|)} & , \ p = 2 \\ \|x\|^{p-2} & , \ p > 2 \end{cases}$$

Anders formuliert gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\rho > 0$, sodass für $x \in U_\rho(0) \setminus \{0\}$

$$|v(x)| \leq \epsilon \cdot \begin{cases} (-\ln \|x\|) & , \ p = 2 \\ \|x\|^{2-p} & , \ p > 2 \end{cases}$$

Dabei ist die rechts stehende Funktion auf $U_1(0) \setminus \{0\}$ positiv und harmonisch, vgl. Beispiel 1.1.5. Aus Satz 2.5.11 angewandt auf v und $-v$ folgt $-v, v \leq 0$, bzw. $v \equiv 0$.

Also stimmt h mit $P[h|_{S^{p-1}}]$ auf $K_1(0) \setminus \{0\}$ überein, womit sich h harmonisch auf $U_1(0)$ fortsetzen lässt. Da Harmonizität eine lokal Eigenschaft ist, lässt sich h zu einer harmonischen Funktion auf G fortsetzen.

❑

Wir wollen daran erinnern, dass für eine offene Umgebung G von ∞ in $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ eine harmonische Funktion $h : G \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}$ harmonisch bei ∞ fortsetzbar heißt, falls $K[h|_{G\setminus\{\infty,0\}}] : (G \setminus \{\infty, 0\})^* = G^* \setminus \{\infty, 0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch auf $G^* \setminus \{\infty\}$ fortsetzbar ist, wobei

$$K[h](x) = \frac{1}{||x||^{p-2}} \cdot h(x^*)$$

und $x^* = \frac{x}{||x||^2}$.

2.5.16 Korollar. *Im Fall $p = 2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *h lässt sich harmonisch bei ∞ fortsetzen, dh. $K[h]$ lässt sich harmonisch bei 0 fortsetzen;*

(ii) $\lim_{||x||\to+\infty} h(x)$ *existiert in $\mathbb{R}$;*

(iii) *h ist auf einer gewissen Umgebung von ∞ beschränkt.*

(iv) $\lim_{||x||\to+\infty} \frac{h(x)}{\ln ||x||} = 0$.

Im Fall $p > 2$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *h lässt sich harmonisch bei ∞ fortsetzen, dh. $K[h]$ lässt sich harmonisch bei 0 fortsetzen;*

(ii) $\lim_{||x||\to+\infty} h(x) = 0$.

Beweis. Im Fall $p = 2$ gilt $K[h](x) = h(x^*)$. Daraus erkennt man sofort, dass $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, und $(iii) \Rightarrow (iv)$. Gilt (iv), so folgt $\lim_{||x||\to0} \frac{K[h](x)}{\ln ||x||} = 0$ und wegen Satz 2.5.15 die harmonische Fortsetzbarkeit bei 0 von $K[h]$, also (i).

Im Fall $p > 2$ folgt aus (i), dass $K[h]$ auf einer Nullumgebung harmonisch und daher insbesondere stetig ist, dh. $\lim_{||x||\to0} \frac{1}{||x||^{p-2}} \cdot h(x^*) = c$. Somit folgt

$$\lim_{||x||\to0} h(x^*) = \lim_{||x||\to0} ||x||^{p-2} \frac{1}{||x||^{p-2}} \cdot h(x^*) = 0,$$

also $\lim_{||x||\to+\infty} h(x) = 0$.

Umgekehrt folgt aus $\lim_{||x||\to+\infty} h(x) = 0$, dass

$$\lim_{||x||\to0} ||x||^{p-2} K[h](x) = \lim_{||x||\to0} h(x^*) = 0.$$

Mit Satz 2.5.15 folgt sofort, dass sich h harmonisch bei ∞ fortsetzen lässt.

❑

2.5.17 Korollar (*Spiegelungsprinzip*). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und symmetrisch bzgl. einer Hyperebene $E = b^\perp = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, b) = 0\}$ mit $||b|| = 1$, dh. $x \in G \Rightarrow x - 2(x, b)b \in G$. Sind E_+ und E_- die offenen Halbräume*

$$E_+ := \{x \in \mathbb{R} : (x, b) > 0\}, \quad E_- := \{x \in \mathbb{R} : (x, b) < 0\}$$

und ist $h : (E_+ \cup E) \cap G \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_{E\cap G} = 0$ und sodass $h|_{E_+\cap G}$ harmonisch ist, so lässt sich h durch

$$h(x) = -h(x - 2(x, b)b), \quad x \in E_- \cap G,$$

zu einer harmonischen Funktion auf G fortsetzen.

Beweis. Da die Fortsetzung sowohl auf $(E_+ \cup E) \cap G$ als auch wegen der Voraussetzung $h|_{E\cap G} = 0$ auf $(E_- \cup E) \cap G$ stetig ist, und da das zwei abgeschlossene Teilmengen von G sind, deren Vereinigung G ist, ist $h : G \to \mathbb{R}$ stetig.

Für $a \in E_+ \cap G$ ist die Bedingung aus Satz 2.5.14 wegen der Harmonizität erfüllt. Ist $a \in E_- \cap G$, so folgt für $K_r(a) \subseteq E_- \cap G$

$$\int\limits_{S^{p-1}} h(a + ry)\, d\sigma(y) = \int\limits_{S^{p-1}} -h((a - 2(a, b)b) + r(y - 2(y, b)b))\, d\sigma(y).$$

Da $x \mapsto x - 2(x, b)b$ eine lineare und orthogonale Abbildung ist, welche S^{p-1} auf sich abbildet, folgt aus Fakta 2.1.5, 6, dass obiges Integral mit

$$\int\limits_{S^{p-1}} -h((a - 2(a, b)b) + ry)\, d\sigma(y) = -h(a - 2(a, b)b) = h(a)$$

übereinstimmt. Für $a \in E \cap G$, dh. $(a, b) = 0$, und $K_r(a) \subseteq G$ gilt

$$\int\limits_{S^{p-1}} h(a + ry)\, d\sigma(y) = \int\limits_{S^{p-1}\cap E_+} h(a + ry)\, d\sigma(y) + \int\limits_{S^{p-1}\cap E_-} h(a + ry)\, d\sigma(y) =$$

$$\int\limits_{S^{p-1}\cap E_+} h(a + ry)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}\cap E_-} h(a + r(y - 2(y, b)b))\, d\sigma(y) =$$

$$\int\limits_{S^{p-1}\cap E_+} h(a + ry)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}\cap E_+} h(a + ry)\, d\sigma(y) = 0 = h(a).$$

Nach Satz 2.5.14 muss h harmonisch sein.

❑

2.5.18 Bemerkung. Für Hyperebenen $E = b^\perp$ mit $\|b\| = 1$ ist wie eben verwendet die Abbildung $x \mapsto x_E := x - 2(x, b)b$ die Spiegelung an E. Die Spiegelung an der affinen Hyperebene $E = a + b^\perp$ ist $x \mapsto x_E := x - 2(x - a, b)b$.

Korollar 2.5.17 lässt sich unmittelbar auf affine Hyperebenen ausdehnen, da sowohl Harmonizität als auch die Symmetrie beim Verschieben erhalten bleibt. Die Fortsetzung erfüllt dabei $h(x) = -h(x_E),\ x \in G$.

Man kann die Abbildung $x \mapsto x^* = \frac{x}{\|x\|^2}$ als Spiegelung an S^{p-1} ansehen. Für Kreisoberflächen der Bauart $E = a + rS^{p-1}$ definieren wir die Spiegelung durch

$$x \mapsto x_E := a + r^2\,(x - a)^*.$$

Also haben wir zu jeder verallgemeinerten Kreisoberfläche E eine Spiegelung $x \mapsto x_E$ an derselben definiert. Man überprüft leicht, dass $T(x_E) = T(x)_{T(E)}$, wenn $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ von der Bauart $x \mapsto c + Rx$ für $R > 0$ und $c \in \mathbb{R}^p$ ist. Also bleibt die Symmetrie bei einer solchen Abbildung erhalten.

Auch bei der Abbildung $x \mapsto x^*$ bleibt sie erhalten. Da wir das im Folgenden nur für E von der Bauart $a + rS^{p-1}$ mit $r = \|a\|$ benötigen, wollen wir nur in diesem Fall kurz den Beweis dafür skizzieren.

Man rechnet leicht nach, dass $\|x_E\| = \frac{\|x\|\,\|a\|}{\|x-a\|}$, wenn $x \neq a$. Damit folgt

$$(x_E)^* = \frac{\|x - a\|^2}{\|x\|^2\,\|a\|^2}(a + \|a\|^2(x - a)^*) = x^* + \frac{a}{\|a\|^2} - \frac{2(x^*, a)}{\|a\|^2}a.$$

Andererseits ist $E^* = (\frac{1}{2\|a\|^2}a + \left(\frac{1}{\|a\|}a\right)^{\perp}) \cup \{\infty\}$, wie man aus den Überlegungen im Beweis von Lemma 1.2.4 erkennt. Somit ist

$$(x^*)_{E^*} = x^* - 2(x^* - \frac{1}{2\|a\|^2}a, \frac{a}{\|a\|})\frac{a}{\|a\|} = (x_E)^*.$$

2.5.19 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und symmetrisch bzgl. der Kreisoberfläche $E = a + rS^{p-1}$ dh. $x \in G, x \neq a \Rightarrow x_E \in G$. Ist $h : K_r(a) \cap G \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_{E\cap G} = 0$ und sodass $h|_{U_r(a)\cap G}$ harmonisch ist, so lässt sich h durch*

$$h(x) = -\frac{\|x_E\|^{p-2}}{\|x\|^{p-2}}h(x_E),\ \ x \in G \setminus K_r(a),$$

zu einer harmonischen Funktion auf G fortsetzen.

Beweis. Da sowohl Harmonizität als auch Symmetrie bei Verschiebungen nicht verloren gehen, können wir uns a so platziert denken, dass $\|a\| = r$. Man beachte, dass dann $0 \in E$.

Wie eben gesehen ist $(G \setminus \{0\})^*$ symmetrisch bzgl. der affinen Hyperebene

$$E^* = (\frac{1}{2\|a\|^2}a + \left(\frac{1}{\|a\|}a\right)^{\perp}) \cup \{\infty\},$$

und $K[h](x) = \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \cdot h(x^*)$ verschwindet auf $E^* \cap (G \setminus \{0\})^*$, ist stetig auf $(G \setminus \{0\})^*$ geschnitten mit einem der abgeschlossenen Halbräume $\overline{E^*_\pm}$ und ist harmonisch auf $(G \setminus \{0\})^*$ geschnitten mit dem entsprechenden offenen Halbraum zu E^*. Nach Korollar 2.5.17 bzw. Bemerkung 2.5.18, lässt sich $K[h]$ auf $(G \setminus \{0\})^*$ harmonisch fortsetzten zu einer Funktion g, wobei $g(x) = -g(x_{E^*})$.

Ist $0 \in G$, so ist wegen $0 \in E$ die Funktion $h|_{K_r(a)\cap G}$ bei 0 stetig und damit existiert $\lim_{x\to\infty,\ x\in\overline{E^*_\pm}} h(x^*) = 0$. Es folgt $\lim_{x\to\infty,\ x\in\overline{E^*_\pm}} K[h](x) = 0$. Aus $g(x) = -g(x_{E^*})$ folgt dann

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Nach Korollar 2.5.16 ist g harmonisch bei ∞ fortsetzbar.

Insgesamt folgt, dass $K[g]$ eine harmonische Fortsetzung von h auf G ist, wobei

$$K[g](x_E) = \frac{1}{\|x_E\|^{p-2}}g((x_E)^*) = \frac{1}{\|x_E\|^{p-2}}g((x^*)_{E^*}) = \\ -\frac{1}{\|x_E\|^{p-2}}g(x^*) = -\frac{\|x\|^{p-2}}{\|x_E\|^{p-2}}K[g](x).$$

❑

Kapitel 3

Subharmonische Funktionen

3.1 Poisson Integrale subharmonischer Funktionen

Wir bringen zunächst folgendes Lemma, das eine Charakterisierung von von oben halbstetigen Funktionen darstellt.

3.1.1 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ eine metrische Topologie und $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ halbstetig von oben. Weiters sei $K \subseteq \Omega$ derart, dass u auf K nach oben beschränkt ist, dh. $M := \sup_{z \in K} u(z) < \infty$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf X stetigen, reelwertigen Funktionen mit $M \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ auf X, sodass $f_n(z) \geq u(z)$ für alle $z \in K$, und $\lim_{n \to \infty} f_n = u$ punktweise auf K.*

Beweis. Ist $u \equiv -\infty$ auf K, so setze man $f_n = -n$. Falls $u \not\equiv -\infty$ auf K, so definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \sup_{y \in K} (u(y) - nd(x, y)), \ x \in X .$$

Zunächst ist dieses Supremum nicht $-\infty$, da es ein $y \in K$ mit $u(y) \neq -\infty$ gibt. Weiters ist klarerweise $M \geq f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ auf X sowie $f_n(x) \geq u(x)$ für alle $x \in K$.

Sind nun $x_1, x_2 \in X$, so gilt für alle $y \in K$

$$f_n(x_1) \geq u(y) - nd(x_1, y) \geq u(y) - nd(x_2, y) - nd(x_1, x_2).$$

Nimmt man rechts das Supremum über alle $y \in K$, so folgt $f_n(x_2) - f_n(x_1) \leq nd(x_1, x_2)$. Vertauscht man x_1 und x_2, so erhält man

$$|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leq nd(x_1, x_2),$$

womit f_n stetig ist.

Wegen der Monotonie existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Angenommen es wäre $a \in K$ und $f(a) > u(a)$, so wähle $m \in \mathbb{R}$ mit $u(a) < m < f(a)$ und daher $u(a) < m < f(a) \leq f_n(a), \ n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition von f_n gibt es einen Punkt $y_n \in K$ mit $u(y_n) - nd(a, y_n) > m$, d.h. mit

$$m + nd(a, y_n) < u(y_n). \tag{3.1}$$

Wegen $u(a) < m$ gilt $y_n \neq a, \ n \in \mathbb{N}$. Aus $u(y_n) \leq M$ folgt, dass $nd(a, y_n)$ beschränkt ist, und weiter $y_n \to a$. Aus (3.1) folgt auch $m < u(y_n)$ und zwar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $m < \sup_{y \in K_\delta(a) \setminus \{a\}} u(y)$ für jedes $\delta > 0$, und wegen der Halbstetigkeit von u

$$m \leq \limsup_{y \to a} u(y) \leq u(a) ,$$

im Widerspruch zu $u(a) < m < f(a)$.

❑

Zusammen mit Fakta 2.5.6, 2, folgt aus Lemma 3.1.1, dass eine nach oben beschränkte Funktion u auf einem metrischen Raum genau dann von oben halbstetig ist, wenn u der punktweise Grenzwert einer nach oben beschränkten, monoton fallenden Folge von stetigen Funktionen ist.

3.1.2 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $u : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben. Weiters $f : X \to (0, +\infty)$ stetig. Konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ in X gegen $x \in X$, so folgt

$$\limsup_{i\in I} u(x_i)f(x_i) = \big(\limsup_{i\in I} u(x_i)\big) \cdot \lim_{i\in I} f(x_i) \leq u(x) \cdot f(x)\,.$$

Also ist $u \cdot f : X \to [-\infty, +\infty)$ halbstetig von oben.

3.1.3 Lemma. *Sei $u : S^{p-1} \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig und setze für $x \in U_1(0)$*

$$P[u](x) := \int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot u(y)\, d\sigma(y)$$

und $P[u](x) = u(x)$ für $x \in S^{p-1}$.

Ist u integrierbar, so ist $P[u]|_{U_1(0)}$ harmonisch. Im Fall, dass u nicht integrierbar ist, ist $P[u]|_{U_1(0)}$ identisch gleich $-\infty$.

Beweis. Da für $y \in S^{p-1}$ und $x \in U_1(0)$

$$|u(y)| \cdot \frac{1 - \|x\|}{(1 + \|x\|)^{p-1}} \leq |u(y) \cdot \wp(x,y)| = |u(y)| \cdot \wp(x,y) \leq |u(y)| \cdot \frac{1 + \|x\|}{(1 - \|x\|)^{p-1}},$$

ist u integrierbar genau dann wenn $y \mapsto u(y) \cdot \wp(x,y)$ für alle $x \in U_1(0)$ integrierbar ist. In dem Fall ist $P[u]|_{U_1(0)}$ harmonisch; vgl. Beispiel 1.1.9. Ist das nicht der Fall, so ist $P[u](x) = -\infty,\ x \in U_1(0)$, da $\max(u \cdot \wp(x,.), 0)$ auf jeden Fall über S^{p-1} nach σ integrierbar ist.

❑

3.1.4 Bemerkung. Gemäß Lemma 3.1.1 gibt es eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen $u_n : S^{p-1} \to (-\infty, +\infty),\ n \in \mathbb{N}$, die punktweise gegen u konvergiert, wobei $u_n \leq m$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $m - u_n \cdot \wp(x,.)$ monoton wachsend gegen $m - u\wp(x,.)$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für alle $x \in U_1(0)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S^{p-1}} (m - \wp(x,y) \cdot u_n(y))\, d\sigma(y) = \int_{S^{p-1}} (m - \wp(x,y) \cdot u(y))\, d\sigma(y)$$

und daher $P[u_n](x) \to P[u](x)$ $(\in [-\infty, +\infty))$ für $n \to \infty$ punktweise monoton fallend für jedes $x \in K_1(0)$.

Es sei auch bemerkt, dass die Harmonizität von $P[u]|_{U_1(0)}$ im Falle $P[u]|_{U_1(0)} \not\equiv -\infty$ auch aus Satz 2.4.5 folgt.

Aus Fakta 2.5.6, 2, erhalten wir aus $P[u_n](x) \to P[u](x)$ für jedes $x \in K_1(0)$:

3.1.5 Korollar. *Mit der Notation von Lemma 3.1.3 ist $P[u] : K_1(0) \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig.*

3.1.6 Korollar. *Sei $u : K_1(0) \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig und sei $u|_{U_1(0)}$ subharmonisch. Dann gilt $u \leq P[u|_{S^{p-1}}]$ auf ganz $K_1(0)$.*

Beweis. Sei $u_n : S^{p-1} \to (-\infty, +\infty)$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen $u|_{S^{p-1}}$ konvergiert, wie in Lemma 3.1.1 sodass $u_n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen aus Bemerkung 3.1.4, dass $P[u_n](x) \to P[u|_{S^{p-1}}](x)$ punktweise und monoton fallend.

Für jedes feste n gilt am Rand S^{p-1} von $U_1(0)$ offensichtlich $u|_{S^{p-1}} - P[u_n]|_{S^{p-1}} = u|_{S^{p-1}} - u_n \leq 0$. Wegen Korollar 2.5.12 nimmt die auf $K_1(0)$ von oben halbstetige und auf $U_1(0)$ subharmonische Funktion $u - P[u_n]$ ihr Maximum am Rand an. Also folgt $u - P[u_n] \leq 0$ bzw. $u \leq P[u_n]$.

Da das für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, gilt es auch für den Grenzwert, dh. $u \leq P[u|_{S^{p-1}}]$.

❑

Ist in Korollar 3.1.6 die Funktion $u|_{S^{p-1}}$ integrierbar, so ist $P[u|_{S^{p-1}}]$ auf $U_1(0)$ eine harmonische Majorante von u.

Wir erhalten folgende Charakterisierung subharmonischer Funktionen:

3.1.7 Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $u : D \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) *u ist subharmonisch.*

(*ii*) *Für alle $a \in D$ und alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt*

$$u(a) \leq \int_{S^{p-1}} u(a + ry)\, d\sigma(y). \tag{3.2}$$

(*iii*) *Für alle $a \in D$ und alle $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$ gilt* (3.2).

(*iv*) *Für alle $G \subseteq D$ offen und beschränkt mit $\overline{G} \subseteq D$, und $h : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_G$ harmonisch ist, folgt aus $u|_{\partial G} \leq h|_{\partial G}$ immer $u|_{\overline{G}} \leq h$ auf ganz $\overline{G}$.*

Beweis. Die Schlüsse (iii) ⇒ (ii) und (ii) ⇒ (i) sind trivial. (i) ⇒ (iv) ist gerade Korollar 2.5.13.

Gelte (iv) und sei $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$. Ist $v_n : S^{p-1} \to (-\infty, +\infty)$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen $v|_{S^{p-1}}$ wie in Lemma 3.1.1 konvergiert, wobei $v(x) := u(a + rx)$, $x \in K_1(0)$, sodass $v_n \leq m$ für ein $m \in \mathbb{R}$, so folgt aus $v|_{S^{p-1}} \leq P[v_n]|_{S^{p-1}} = v_n$ bzw. äquivalent aus

$$u|_{\partial K_r(a)} \leq h_n|_{\partial K_r(a)},$$

wobei $h_n(a + rx) := P[v_n](x)$, $x \in K_1(0)$, und der Voraussetzung (iv), dass $u|_{K_r(a)} \leq h_n$. Setzen wir hier a ein, so folgt

$$u(a) \leq h_n(a) = P[v_n](0) = \int_{S^{p-1}} v_n(y)\, d\sigma(y).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (angewandt auf $(v_1 - v_n)$) folgt

$$u(a) \leq \int_{S^{p-1}} v(y)\, d\sigma(y) = \int_{S^{p-1}} u(a + ry)\, d\sigma(y).$$

❑

3.1.8 Fakta.

1. Aus der Dreiecksungleichung für Integrale folgt, dass $|h|$ subharmonisch ist, wenn h harmonisch ist.

2. Aus der Definition und aus Fakta 2.5.6, 11, folgt unmittelbar, dass subharmonisch zu sein, eine lokale Eigenschaft ist.

3. Eine Funktion $u \in C^2(G)$ ist genau dann subharmonisch, wenn $\triangle u \geq 0$. In der Tat folgt für ein $a \in G$ und jedes $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq G$ aus Lemma 2.2.3 angewandt auf $h(x) = u(a + rx)$, dass (siehe auch Fakta 1.1.4, 4)
$$u(a + rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot u(a + ry)\, d\sigma(y) + \int\limits_{U_1(0)} w_x(t) r^2 (\triangle u)(a + rt)\, d\lambda_p(t). \quad (3.3)$$
Man beachte, dass $w_x(t) < 0$ für $t \in U_1(0)$ (siehe nach (2.12) bzw. (2.13)). Ist nun immer $\triangle u \geq 0$, so folgt für $x = 0$ unmittelbar (2.22).

   Gilt umgekehrt $\triangle u(x) < 0$ für ein $x \in G$, so folgt aus der Stetigkeit von $\triangle u$, dass $\triangle u(t)$ für alle $t \in K_R(x)$ für ein hinreichend kleines $R > 0$. Gleichung (3.3) ergibt dann für $x = 0$
$$u(a + rx) > \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot u(a + ry)\, d\sigma(y)$$
für alle $r \in (0, R]$.

4. Aus Fakta 2.5.6, 1, und unmittelbar aus (3.2) folgt, dass mit $u_1, \dots, u_n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ auch $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ subharmonisch auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbb{R}^p$ ist.

5. Aus Fakta 2.5.6, 3, und wieder unmittelbar aus (3.2) folgt, dass mit $u_1, \dots, u_n$ auch $\max(u_1, \dots, u_n)$ subharmonisch auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbb{R}^p$ ist.

6. Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^p$, so folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz für $K_r(a) \subseteq D$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(a) \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{S^{p-1}} u_n(a + ry)\, d\sigma(y) = \int\limits_{S^{p-1}} \lim_{n\to\infty} u_n(a + ry)\, d\sigma(y).$$
Zusammen mit Fakta 2.5.6, 2, folgt, dass $\lim_{n\to\infty} u_n$ subharmonisch ist.

Der letzte Punkt hier hat sogar eine Verallgemeinerung.

3.1.9 Korollar. *Ist $(u_i)_{i\in I}$ ein monoton fallendes Netz subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^p$, so ist auch die Funktion $x \mapsto u(x) := \lim_{i\in I} u_i(x)$ auf D subharmonisch.*

Beweis. Zunächst ist u wegen Fakta 2.5.6, 2, von oben halbstetig.

Sei $G \subseteq D$ offen und beschränkt mit $\overline{G} \subseteq D$, und $h : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_G$ harmonisch ist, und sodass $u|_{\partial G} \leq h|_{\partial G}$. Wir zeigen, dass dann auch $u|_{\overline{G}} \leq h$ auf ganz $\overline{G}$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.1.7.

Sei $\epsilon > 0$. Zu jedem $x \in \partial G$ gibt es wegen $\lim_{i\in I} u_i(x) < h(x) + \epsilon$ ein $i_x \in I$ mit $u_{i_x}(x) - h(x) < \epsilon$. Da die links stehende Funktion von oben halbstetig ist, gibt es ein offenes $U_x \ni x$ mit

$$u_{i_x}|_{U_x\cap\partial G} < \epsilon + h|_{U_x\cap\partial G}.$$

Wegen der Kompaktheit von ∂G gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \partial G$, sodass $\partial G \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ und daher

$$\min_{j=1,\ldots,n} u_{i_{x_j}}|_{\partial G} < \epsilon + h|_{\partial G}.$$

Ist $i \geq i_{x_1}, \ldots, i_{x_n}$, so folgt aus der Monotonie $u_i|_{\partial G} < \epsilon + h|_{\partial G}$. Nun ist die links stehende Funktion subharmonisch und die rechts stehende Funktion harmonisch. Also folgt mit Satz 3.1.7 $u_i|_{\overline{G}} \leq \epsilon + h|_{\overline{G}}$ und wegen $u \leq u_i$ auch $u|_{\overline{G}} \leq \epsilon + h|_{\overline{G}}$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

❑

Fakta 3.1.8, 3 legt nahe, subharmonische Funktionen als mehrdimensionale Verallgemeinerung von konvexen Funktionen zu betrachten.

3.1.10 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, so ist $z \mapsto \ln|f(z)|$ auf $D \setminus f^{-1}\{0\}$ als Zusammensetzung der konformen und harmonischen Funktion f und der harmonischen Funktion $z \mapsto \ln|z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wieder harmonisch, vgl. Lemma 1.1.12.

Setzen wir $\ln|f(z)| := -\infty$ für $f(z) = 0$, so gilt $\lim_{w\to z} \ln|f(z)| = -\infty = f(z)$ für alle $z \in f^{-1}\{0\}$. Also ist $z \mapsto \ln|f(z)|$ auf D halbstetig von oben.

(2.22) gilt, wenn $x \in D \setminus f^{-1}\{0\}$ und wenn nur $R > 0$ so klein ist, dass $K_R(x) \subseteq D \setminus f^{-1}\{0\}$. Ist $x \in f^{-1}\{0\}$, so gilt (2.22) ohnehin.

3.1.11 Beispiel. Die Funktion $f(x) := \|x\|$ ist auf $\mathbb{R}^p$ stetig. Da $x \mapsto x$ als Abbildung von $\mathbb{R}^p$ auf sich harmonisch ist, gilt

$$a = \int_{S^{p-1}} (a + ry)\, d\sigma(y) \ (\in \mathbb{R}^p), \quad a \in \mathbb{R}^p.$$

Ist nun $\alpha \in K_1(0)$, so folgt

$$|(a,\alpha)| \leq \int_{S^{p-1}} |(a + ry, \alpha)|\, d\sigma(y) \leq \int_{S^{p-1}} \|a + ry\| \cdot \|\alpha\|\, d\sigma(y) \leq \int_{S^{p-1}} \|a + ry\|\, d\sigma(y).$$

Das Supremum über alle $\alpha \in K_1(0)$ links $\|a\|$. Also ist f subharmonisch.

3.1.12 Satz. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Gebiet, $u : G \to [-\infty, +\infty)$ subharmonisch und $u \not\equiv -\infty$. Für $K_r(a) \subseteq G$ mit $r > 0$ gilt immer $-\infty < \int_{S^{p-1}} u(a + ry)\, d\sigma(y) < +\infty$, wobei für $0 < r_1 < r_2$ mit $K_{r_1}(a) \subseteq K_{r_2}(a) \subseteq G$*

$$u(a) \leq \int_{S^{p-1}} u(a + r_1 y)\, d\sigma(y) \leq \int_{S^{p-1}} u(a + r_2 y)\, d\sigma(y).$$

Außerdem gilt

$$u(a) = \lim_{r\searrow 0} \int_{S^{p-1}} u(a + ry)\, d\sigma(y), \tag{3.4}$$

sowie $u(a) = \limsup_{y\to a} u(y)$.

Schließlich ist $\{x \in G : u(x) = -\infty\}$ eine Borelmenge mit λ_p-Maß Null und für jedes kompakte $K \subseteq G$ ist $u|_K$ integrierbar.

Beweis. Da u auf der kompakten Menge $a + rS^{p-1}$ nach oben beschränkt ist, gilt $\int_{S^{p-1}} u(a+ry)\, d\sigma(y) \in [-\infty, +\infty)$.

Betrachten wir $v(y) := u(a+ry)$, $y \in K_1(0)$, so folgt aus Korollar 3.1.6 $v \leq P[v|_{S^{p-1}}] =: h$. Gemäß Lemma 3.1.3 gilt $h \equiv -\infty$ oder h ist harmonisch. In jedem Fall folgt für $0 < s < 1$

$$u(a) \leq \int\limits_{S^{p-1}} u(a+sry)\, d\sigma(y) = \int\limits_{S^{p-1}} v(sy)\, d\sigma(y) \leq \int\limits_{S^{p-1}} h(sy)\, d\sigma(y) = h(0) = \int\limits_{S^{p-1}} u(a+ry)\, d\sigma(y). \tag{3.5}$$

Ist dabei $-\infty = \int_{S^{p-1}} u(a+ry)\, d\sigma(y)$, so folgt aus Lemma 3.1.3 $v \leq P[v|_{S^{p-1}}] \equiv -\infty$, und somit $u|_{U_r(a)} \equiv -\infty$. Somit gilt

$$A := \{a \in G : \exists r > 0 : K_r(a) \subseteq G \text{ und } u|_{U_r(a)} \equiv -\infty\} = \{a \in G : \exists r > 0 : K_r(a) \subseteq G \text{ und } -\infty = \int\limits_{S^{p-1}} u(a+ry)\, d\sigma(y)\}.$$

A ist wegen der ersten Darstellung offen. Für $a \in G \cap \overline{A}$ hat jede Kugel $K_r(a)$ einen nichtleeren Schnitt mit A. Insbesondere gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq G$ und $(a + rS^{p-1}) \cap A \neq \emptyset$. Somit ist $u(a+ry) = -\infty$ für y aus einer nichtleeren offenen Teilmenge von S^{p-1}. Also $-\infty = \int_{S^{p-1}} u(a+ry)\, d\sigma(y)$ bzw. $a \in A$.

Somit ist A offen und abgeschlossen in G. Aus $A = G$ folgte aber $u \equiv -\infty$, also muss $A = \emptyset$. Daraus folgt insbesondere, dass $\{x \in G : u(x) > -\infty\}$ dicht in G ist. Für a in dieser Menge und $2r_a := \min(1, d(a, G^c))$ gilt, da u auf der kompakten Menge $K_{r_a}(a) \subseteq G$ nach oben beschränkt ist,

$$(+\infty >) \int\limits_{U_{r_a}(a)} u\, d\lambda_p = \int\limits_{(0,r_a)} t^{p-1} \cdot \int\limits_{S^{p-1}} u(a+ty)\, d\mu_{S^{p-1}}(y)\, d\lambda(t) \geq \mu(S^{p-1}) \int\limits_{(0,r_a)} t^{p-1} \cdot u(a)\, d\lambda(t) = u(a) \cdot \frac{r_a^p}{p} \mu(S^{p-1}) > -\infty, \tag{3.6}$$

womit $\lambda_p(U_{r_a}(a) \cap \{x \in G : u(x) = -\infty\}) = 0$ sein muss. Aus der Dichtheit von $\{x \in G : u(x) > -\infty\}$ folgt, wie man sich leicht überzeugt,

$$G = \bigcup_{a \in G, u(a) > -\infty} U_{r_a}(a). \tag{3.7}$$

Da die Topologie auf G eine abzählbare Basis hat, folgt aus dem Satz von Lindelöff, dass bei dieser Vereinigung schon abzählbar viele a_n, $n \in \mathbb{N}$, ausreichen, womit

$$\lambda_p(\{x \in G : u(x) = -\infty\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_p(U_{r_{a_n}}(a_n) \cap \{x \in G : u(x) = -\infty\}) = 0.$$

Ist $K \subseteq G$ kompakt, so lässt sich K wegen (3.7) mit endlich vielen Kreisen $U_{r_a}(a)$ mit $u(a) > -\infty$ überdecken. Wegen (3.6) ist u auf allen diesen Kreisen nach λ_p integrierbar, und damit auch auf K.

Aus (3.5) folgt offensichtlich $u(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{S^{p-1}} u(a+r_n y)\, d\sigma(y)$ für jede Folge $r_n \nearrow 1$. Wegen der Halbstetigkeit von oben gilt $\limsup_{n\to\infty} u(a + r_n y) \leq u(a)$ und daher (Lemma von Fatou angewandt auf $m - u(a + r_n y)$ für ein hinreichend großes m) $\limsup_{n\to\infty} \int_{S^{p-1}} u(a + r_n y)\, d\sigma(y) \leq u(a)$, also (3.4).

Wäre schließlich $\limsup_{y\to a} u(y) < u(a)$, so folgte $u(a + ry) \leq u(a) - \epsilon$ für alle $\|y\| \leq \delta$ für ein $\epsilon > 0$ und ein $\delta > 0$. Integrieren über diese Ungleichung würde $\lim_{r\searrow 0} \int_{S^{p-1}} u(a + ry)\, d\sigma(y) \leq u(a) - \epsilon$ ergeben.

❑

Für subharmonische $u : G \to [-\infty, +\infty)$ ist $\{x \in G : u(x) = -\infty\}$ also klein, wenn $u \not\equiv -\infty$. Umgekehrt ist aber nicht jede Lebesgue-Nullmenge eine Menge der Bauart.

3.1.13 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ mit $A \cup B = X$, wobei entweder A und B beide abgeschlossen oder beide offen sind.*

Sind $u : A \to [-\infty, +\infty)$ und $v : B \to [-\infty, +\infty)$ zwei von oben halbstetige Funktionen, wobei A bzw. B beide mit der Spurtopologie versehen sind, sodass u und v auf $A \cap B$ übereinstimmen, dann ist auch die Funktion $u \cup v : X \to [-\infty, +\infty)$[1] *von oben halbstetig.*

Beweis. Seien A, B beide abgeschlossen. Der offene Fall ist ähnlich zu beweisen. Ist $\eta \in \mathbb{R}$, so gilt

$$(u \cup v)^{-1}[\eta, +\infty) = u^{-1}[\eta, +\infty) \cup v^{-1}[\eta, +\infty).$$

Nach Voraussetzung ist $u^{-1}[-\infty, \eta)$ abgeschlossen in der Spurtopologie $\mathcal{T}|_A$, und somit von der Bauart $C \cap A$ für eine in X abgeschlossene Menge C. Als Schnitt zweier in X abgeschlossener Mengen ist $u^{-1}[-\infty, \eta)$ in X abgeschlossen.

Genauso zeigt man, dass $v^{-1}[-\infty, \eta)$ in X abgeschlossen ist. Als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist dann auch $(u \cup v)^{-1}[\eta, +\infty)$ abgeschlossen.

❑

3.1.14 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $u : D \to [-\infty, +\infty)$ subharmonisch. Weiters sei $r > 0$ und $a \in D$ mit $K_r(a) \subseteq D$.*

Definieren wir $u_{a,r} : D \to [-\infty, +\infty)$ durch $u_{a,r}|_{D\setminus U_r(a)} \equiv u|_{D\setminus U_r(a)}$ und $u_{a,r}(a + rx) = P[v](x),\ x \in U_1(0)$, wobei $v(y) = u(a + ry),\ y \in S^{p-1}$, so ist $u_{a,r}$ subharmonisch auf D mit $u \leq u_{a,r}$.

Beweis. Definitionsgemäß gilt $P[v](y) = v(y) = u(a + ry)$ für $\|y\| = 1$, vgl. Lemma 3.1.3. Also gilt sogar $u_{a,r}(a + rx) = P[v](x)$ für $x \in K_1(0)$. Nach Lemma 3.1.3 ist $P[v]$ und daher auch $u_{a,r}|_{K_r(a)}$ halbstetig von oben sowie $P[v]|_{U_1(0)}$ und damit $u_{a,r}|_{U_r(a)}$ harmonisch bzw. $\equiv -\infty$. Nach Korollar 3.1.6 gilt auch $u|_{U_r(a)} \leq u_{a,r}|_{U_r(a)}$.

Als Einschränkung einer von oben halbstetigen Funktion ist auch $u_{a,r}|_{D\setminus U_r(a)} = u|_{D\setminus U_r(a)}$ eine solche. Wegen $K_r(a) \cap (D \setminus U_r(a)) = a + rS^{p-1}$, folgt aus Lemma 3.1.13, dass $u_{a,r}$ halbstetig von oben ist, wobei überall $u \leq u_{a,r}$.

Für $b \in D \setminus U_r(a)$ und $\rho > 0$ mit $K_\rho(b) \subseteq D$ gilt

$$u_{a,r}(b) = u(b) \leq \int_{S^{p-1}} u(b + \rho y)\, d\sigma(y) \leq \int_{S^{p-1}} u_{a,r}(b + \rho y)\, d\sigma(y).$$

[1] Das ist die Funktion, die auf A mit f und auf B mit g übereinstimmt.

Für $b \in U_r(a)$ gilt für hinreichend kleines $\rho > 0$ mit $K_\rho(b) \subseteq U_r(a)$ wegen der Harmonizität von $u_{a,r}|_{U_r(a)}$ bzw. wegen $u_{a,r}|_{U_r(a)} \equiv -\infty$

$$u_{a,r}(b) = \int\limits_{S^{p-1}} u_{a,r}(b + \rho y)\, d\sigma(y).$$

Nach Satz 3.1.7 ist $u_{a,r}$ subharmonisch.

❑

3.1.15 Fakta.

1. Für $c \in \mathbb{R}$ und subharmonisches $u : D \to [-\infty, +\infty)$ gilt $(u + c)_{a,r} = u_{a,r} + c$, da $P[c] \equiv c$.
2. Für $c > 0$ und subharmonisches $u : D \to [-\infty, +\infty)$ gilt $(cu)_{a,r} = cu_{a,r}$, da $P[cv] \equiv cP[v]$.
3. Für subharmonische $u_1, u_2 : D \to [-\infty, +\infty)$ sei $v_j(y) = u_j(a + ry)$. Aus $P[v_1 + v_2] = P[v_1] + P[v_2]$ (gilt auch wenn $P[v_1]|_{U_1(0)} \equiv -\infty$ oder $P[v_2]|_{U_1(0)} \equiv -\infty$) folgt dann $(u_1 + u_2)_{a,r} = (u_1)_{a,r} + (u_2)_{a,r}$.
4. Für subharmonische $u, w : D \to [-\infty, +\infty)$ folgt aus $u \le w$, dass $u_{a,r} \le w_{a,r}$, da $P[.]$ monotonieerhaltend ist.
5. Ist D ein Gebiet und $u \not\equiv -\infty$, so ist $u_{a,r}|_{U_r(a)}$ wegen Satz 3.1.12 harmonisch.

3.2 Perronsche Methode

Sei $\emptyset \ne D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : \partial^\infty D \to [-\infty, +\infty]$ eine Funktion. Wir fragen uns, ob f eine Randfunktion einer auf D harmonischen Funktion sein kann. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} S_f := \{u : u : D \to [-\infty, +\infty) &\text{ subharmonisch und} \\ &\text{nach oben beschränkt mit } \forall \xi \in \partial^\infty D \Rightarrow \limsup_{x \to \xi} u(x) \le f(\xi)\}. \end{aligned}$$

Diese Menge S_f erfüllt offensichtlich, dass wenn $u_1, u_2 \in S_f$ auch $\max(u_1, u_2) \in S_f$ und wenn $u \in S_f$ und $a \in D,\ r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$, so ist auch $u_{a,r} \in S_f$. Also ist S_f ein Spezialfall eines Perronschen Systems.

3.2.1 Definition. Eine nichtleere Menge S von subharmonischen Funktionen auf einer offenen, nichtleeren Menge $D \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt *Perronsches System*, falls (vgl. Fakta 3.1.8, 5, und Lemma 3.1.14)

(*i*) Zu $u_1, u_2 \in S$ gibt es ein $u_3 \in S$ mit $u_1 \le u_3$ und $u_2 \le u_3$.

(*ii*) Ist $u \in S$ und $a \in D,\ r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$, so ist auch $u_{a,r} \in S$.

Für ein derartiges System ist die Funktion

$$P_S(x) := \sup\{u(x) : u \in S\} \in [-\infty, +\infty], \quad x \in D. \tag{3.8}$$

von speziellem Interesse. Sie wird *Perronsche Funktion* genannt.

3.2.2 Fakta.

1. Ist G eine offene Teilmenge von D, so ist mit dem Perronschen System S auf D auch $\{u|_G : u \in S\}$ ein Perronsches System auf G.

2. Ist S ein Perronsches System und $c \in \mathbb{R}$, so folgt aus Fakta 3.1.15, dass auch $S + c := \{u + c : u \in S\}$ ein Perronsches System ist, wobei $P_{S+c} = P_S + c$.

3. Ist S ein Perronsches System und $c > 0$, so folgt aus Fakta 3.1.15, dass auch $cS := \{cu : u \in S\}$ ein Perronsches System ist, wobei $P_{cS} = cP_S$.

4. Sind S_1, S_2 zwei Perronsches Systeme, so folgt aus Fakta 3.1.15, dass auch $S_1 + S_2 := \{u + w : u \in S_1, w \in S_2\}$ ein solches ist, wobei wegen dem Lemma vom iterierten Supremum $P_{S_1+S_2}(x) = P_{S_1}(x) + P_{S_2}(x)$, $x \in D$. Hier ist der unbestimmte Ausdruck $-\infty + \infty = +\infty + (-\infty)$ mit $-\infty$ auszuwerten.

5. Sind S_1, S_2 zwei Perronsches Systeme mit $S_1 \subseteq S_2$, so folgt $P_{S_1} \leq P_{S_2}$.

6. Ist S ein Perronsches System und bezeichnet

$$[S] := \{v : v : D \to [-\infty, +\infty) \text{ subharmonisch mit } \exists u \in S \text{ mit } v \leq u\},$$

   so ist auch $[S]$ ein Perronsches System mit $P_{[S]} = P_S$.

7. Ist S ein System von subharmonischen Funktionen auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^p$, das (i) aus Definition 3.2.1 erfüllt und die Eigenschaft hat, dass es mit $u \in S$ und $a \in D$, $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$, ein $v \in S$ gibt, sodass $u_{a,r} \leq v$, so zeigt man leicht, dass dann

$$[S] := \{v : v : D \to [-\infty, +\infty) \text{ subharmonisch mit } \exists u \in S \text{ mit } v \leq u\},$$

   ein Perronsches System ist, das auch $P_{[S]} = P_S$ erfüllt, wobei P_S wie in (3.8) definiert ist.

3.2.3 Lemma. *Ist D ein Gebiet und S ein Perronsches System, so gilt $P_S \equiv -\infty$, wenn $S = \{-\infty\}$. Anderenfalls ist die Funktion P_S auf D entweder identisch gleich $+\infty$ oder harmonisch auf D.*

Beweis. Falls $S = \{-\infty\}$, so gilt offensichtlich $P_S \equiv -\infty$. Anderenfalls ist $S \setminus \{-\infty\}$ auch ein Perronsches System mit $P_S = P_S \setminus \{-\infty\}$. Sei also nun $-\infty \notin S$.

Ist $a \in D$, $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq D$, so folgt aus $u \in S$ sicherlich $u_{a,r} \in S$, wobei $u \leq u_{a,r} \in S$, vgl. Lemma 3.1.14. Also gilt auch

$$P_S(x) = \sup\{u_{a,r}(x) : u \in S\}, \quad x \in D.$$

Andererseits ist S versehen mit $\leq$ eine gerichtete Menge, vgl. Definition 3.2.1, (i), und $(u_{a,r})_{u\in S}$ ist ein monoton wachsendes Netz, vgl. Lemma 3.1.14. Somit gilt

$$P_S(x) = \lim_{u\in S} u_{a,r}(x), \; x \in D.$$

Betrachten wir diesen Sachverhalt nur für $x \in U_r(a)$. $(u_{a,r}|_{U_r(a)})_{u\in S}$ ist ja ein monoton wachsendes Netz bestehend aus harmonischen Funktionen, vgl. Fakta 3.1.15, 5. Aus dem Prinzip von Harnack, Satz 2.4.5, folgt, dass $P_S|_{U_r(a)}$ entweder $\equiv +\infty$ oder harmonisch ist.

Betrachtet man die Menge A aller $a \in D$ mit $P_S(a) = +\infty$, so folgt aus obiger Überlegung, dass A und auch $D \setminus A$ offen ist. Also muss entweder $P_S \equiv +\infty$ oder P_S harmonisch auf D sein.

❑

Lässt man in Lemma 3.2.3 die Voraussetzung fallen, dass D zusammenhängend ist, so kann man Lemma 3.2.3 zumindest auf den maximalen Gebieten $G \subseteq D$ anwenden und sieht, dass $P_S|_G$ für alle solchen $G \subseteq D$ entweder $-\infty$, $+\infty$ oder harmonisch ist.

3.2.4 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und nichtleer und $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge Perronscher Systeme darauf. Gilt $P_{S_1} < +\infty$ auf ganz D, so konvergiert $(P_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[S_j]}$.*

Beweis. Da man jede offene Teilmenge als disjunkte Vereinigung von Gebieten schreiben kann, und alle Perronschen Systeme darauf einschränken kann, können wir oBdA. D als Gebiet annehmen.

Aus Fakta 3.2.2, 6, wissen wir, dass $P_{S_n} = P_{[S_n]}$. Also können wir auch $S_n = [S_n]$, $n \in \mathbb{N}$, annehmen. Mit Fakta 3.2.2, 5, schließen wir dann zunächst auf

$$P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j} \leq P_{S_{n+1}} \leq P_{S_n} < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 3.2.3 sind die hier auftretenden Funktionen $\equiv -\infty$ oder harmonisch. In jedem Fall konvergiert die Funktionenfolge $(P_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wegen der Monotonie punktweise gegen die $[-\infty, +\infty)$-wertige Funktion $h := \lim_{n\to\infty} P_{S_n}$. Nach Satz 2.4.5 ist h wieder harmonisch oder $\equiv -\infty$, wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig stattfindet, und

$$P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j} \leq h \leq P_{S_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ist $h \equiv -\infty$, so auch die linke Seite. Ist $h \not\equiv -\infty$, so hat h Werte in $\mathbb{R}$ und ist harmonisch. In diesem Fall haben auch alle P_{S_n} Werte in $\mathbb{R}$ und sind harmonisch.

Sei $y \in D$ und $\epsilon > 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n \in S_n$, sodass

$$P_{S_n}(y) - \frac{\epsilon}{2^n} < u_n(y) \; (\leq P_{S_n}(y)).$$

Wir setzen

$$u := h + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - P_{S_n}),$$

und stellen wegen $u_n \leq P_{S_n}$ fest, dass u Summe einer harmonischen Funktion und eines Grenzwertes einer monoton fallenden Folge subharmonischer Funktionen ist. Nach Fakta 3.1.8 ist u subharmonisch. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$u \leq h + u_n - P_{S_n} \leq u_n,$$

da $h - P_{S_n} \leq 0$. Wegen $S_n = [S_n]$ folgt $u \in S_n$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, erhalten wir $u \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j$, und damit

$$u \leq P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j}.$$

Andererseits ist

$$h(y) - \epsilon \leq h(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(y) - P_{S_n}(y)) = u(y).$$

Insbesondere folgt $h(y) - \epsilon \leq P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j}(y) \leq h(y)$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $h(y) = P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j}(y)$ und da auch y beliebig war, sogar

$$h \equiv P_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} S_j}.$$

❑

Kommen wir zurück zu unserem speziellen Perronschen System S_f, die offensichtlich $[S_f] = S_f$ erfüllen. Zudem setzen wir $P_D[f] := P_{S_f}$.

3.2.5 Lemma. *Für $f, g : \partial^\infty D \to [-\infty, +\infty]$ gelten:*

- $$\inf_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi) \le P_D[f] \le \sup_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi). \tag{3.9}$$

  Insbesondere ist $P_D[f]$ harmonisch, falls f beschränkt ist.

- *Ist $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, so folgt $P_D[f] \equiv c$.*
- *Für $c > 0$ folgt $P_D[cf] = cP_D[f]$.*
- *Für $c \in \mathbb{R}$ folgt $P_D[f + c] = P_D[f] + c$.*
- *Aus $f \le g$ folgt $P_D[f] \le P_D[g]$.*
- *$P_D[f] + P_D[g] \le P_D[f + g]$, wobei hier auf beiden Seiten der unbestimmte Ausdruck $-\infty + \infty = +\infty + (-\infty)$ mit $-\infty$ auszuwerten ist.*
- *Es gilt $P_D[f] \le -P_D[-f]$.*
- *Haben f, g Werte in $\mathbb{R}$ und sind sie beschränkt, so sind auch $P_D[f]$ und $P_D[g]$ beschränkt und harmonisch mit*

  $$\|P_D[f] - P_D[g]\|_\infty \le \|f - g\|_\infty, \tag{3.10}$$

  insbesondere $\|P_D[f]\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

Beweis.

- $\inf_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi) \le P_D[f]$ ist im Fall $f \equiv +\infty$ klar, weil dann S_f alle Konstanten Funktionen enthält. Sonst folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die konstante Funktion $x \mapsto \inf_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi)$ $(\in [-\infty, +\infty))$ in S_f liegt.

  Die zweite Ungleichung ist trivial, wenn $\sup_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi) = +\infty$. Anderenfalls folgt für jedes $u \in S_f$ aus Satz 2.5.11, dass $u \le \sup_{\xi\in\partial^\infty D} f(\xi)$ und damit die zweite Ungleichung.

- Folgt sofort aus dem letzten Punkt.
- Man sieht leicht, dass $S_{cf} = cS_f$. Mit Fakta 3.2.2 folgt $P_D[cf] = cP_D[f]$.
- Man sieht leicht, dass $S_{f+c} = c + S_f$. Mit Fakta 3.2.2 folgt $P_D[f+c] = P_D[f] + c$.
- Aus $f \le g$ folgt $S_f \subseteq S_g$ und mit Fakta 3.2.2, dass $P_D[f] \le P_D[g]$.
- Für $u \in S_f$ und $v \in S_g$ folgt wegen der Beschränktheit von u und v nach oben

  $$\limsup_{x\to\xi} u(x) + v(x) \le \limsup_{x\to\xi} u(x) + \limsup_{x\to\xi} v(x) \le f(\xi) + g(\xi), \quad \xi \in \partial^\infty D,$$

  wobei zu beachten ist, dass diese Ungleichung nur gilt, wenn man für $f(\xi) + g(\xi)$ die eingangs erwähnten Rechenregeln beachtet. Es folgt $u + v \in S_{f+g}$ und damit $S_f + S_g \subseteq S_{f+g}$. Wegen Fakta 3.2.2 folgt $P_D[f] + P_D[g] = P_{S_f+S_g} \le P_D[f + g]$.

⇝ Aus dem letzten Punkt folgt $P_D[f] + P_D[-f] \leq P_D['f - f'] \leq P_D[0] = 0$, wobei $'f - f'$ nach der Regel $+\infty - \infty = -\infty + \infty = -\infty$ zu berechnen ist, und somit ≤ 0 ist. Egal ob die Summenden auf der linken Seite von $P_D[f](x) + P_D[-f](x) \leq 0$ endlich oder $\pm\infty$ sind, in jedem Fall folgt $P_D[f](x) \leq -P_D[-f](x)$.

⇝ Wegen (3.9) sind $P_D[f]$ und $P_D[g]$ beschränkt und wegen Lemma 3.2.3 harmonisch mit $\|P_D[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Aus $f \leq \|f - g\|_\infty + g$ und $P_D[c] = c$ folgt mit der Monotonieeigenschaft, dass

$$P_D[f] \leq \|f - g\|_\infty + P_D[g].$$

Genauso gilt $P_D[g] \leq \|f - g\|_\infty + P_D[f]$ und damit $\pm(P_D[f] - P_D[g]) \leq \|f - g\|_\infty$.

❑

3.2.6 Bemerkung. Bei $P_D[f] + P_D[g] \leq P_D[f + g]$ bzw. als Folge $P_D[f] \leq -P_D[-f]$ geht als einziges ein, dass die $u \in S_f$ beschränkt nach oben sind.

Wenn man statt S_f das Perronsche System

$$\tilde{S}_f := \{u : u : D \to [-\infty, +\infty) \text{ subharmonisch mit } \forall \xi \in \partial^\infty D \Rightarrow \limsup_{x \to \xi} u(x) \leq f(\xi)\}.$$

betrachtet, so gelten auch alle Aussagen aus Lemma 3.2.5 bis auf die erwähnten beiden. $P_D[f] + P_D[g] \leq P_D[f + g]$ gilt in diesem Fall mit der Einschränkung, dass $f + g$ nicht von der Form $+\infty - \infty$ ist, und $P_D[f] \leq -P_D[-f]$ gilt, wenn f reellwertig ist.

3.2.7 Proposition. *Ist $A := \{\xi \in \partial^\infty D : f(\xi) \neq g(\xi)\}$ klein in dem Sinn, dass $\infty \notin A$ und $A \subseteq w^{-1}\{-\infty\}$ für eine subharmonische Funktion $w : G \to [-\infty, +\infty)$ mit $G \supseteq \overline{D}$ und $w^{-1}\{-\infty\} \subseteq G \setminus D$, sodass $w|_{\partial^\infty D} \leq 0$, so gilt $P_D[f] = P_D[g]$.*

Beweis. Nach Satz 2.5.11 gilt $w|_{\overline{D}} \leq 0$. Für $u \in S_f$ und $\epsilon > 0$ folgt aus $u + \epsilon w \leq u$, dass

$$\limsup_{x \to \xi} u(x) + \epsilon w(x) \leq g(\xi)$$

für alle $\xi \in \partial^\infty D \setminus A$, da dort $f(\xi) = g(\xi)$. Für $\xi \in A$ gilt

$$\limsup_{x \to \xi}(u(x) + \epsilon w(x)) \leq \limsup_{x \to \xi} u(x) + \limsup_{x \to \xi} \epsilon w(x) \leq f(\xi) + (-\infty) = -\infty.$$

Also folgt $u + \epsilon w \in S_g$ und damit $u + \epsilon w \leq P_D[g]$. Da $w(x) > -\infty$ für $x \in D$ und da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $u \leq P_D[g]$. Da auch $u \in S_f$ beliebig war, folgt $P_D[f] \leq P_D[g]$ und aus Symmetriegründen die Gleichheit.

❑

3.2.8 Beispiel. Sei $D = U_1(0) \setminus \{0\}$ und $f, g : \partial D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f \equiv 1$ und $g(x) = 1,\ x \in S^{p-1}$ und $g(0) = 0$. Nun unterscheiden sich die Funktionen f und g auf der Menge $A = \{0\}$. Diese Menge ist aber $w^{-1}\{-\infty\}$ der subharmonischen Funktion $w : \mathbb{R}^p \to [-\infty, +\infty)$ definiert durch $w(0) = -\infty$ und für $x \neq 0$ durch $w(x) = \ln\|x\|$ im Fall $p = 2$ und $w(x) = \frac{1}{2-p} \cdot (\|x\|^{2-p} - 1)$ im Fall $p > 2$.

Da auch $w \leq 0$ auf $K_1(0)$ folgt aus Proposition 3.2.7, dass $P_D[g] = P_D[f] \equiv 1$.

3.2.9 Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : \partial^\infty D \to [-\infty, +\infty]$ heißt *resolutiv*, wenn $P_D[f] = -P_D[-f]$. Mit $\mathcal{R}_D$ wollen wir die Menge aller reellwertigen resolutiven Funktionen am Rand von D bezeichnen, für die $P_D[f] = -P_D[-f]$ reellwertig und somit harmonisch ist.

Wie das nächste Ergebnis zeigt, ist diese Begriffsbildung der richtige Zugang zum verallgemeinerten Dirichletschen Problem.

3.2.10 Proposition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Weiters sei $f : \partial^\infty D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Falls $h : D \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, sodass $\lim_{x\to\xi} h(x) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \partial^\infty D$, so ist f resolutiv mit $h = P_D[f]$.*

Beweis. Nach dem Maximumsprinzip ist h beschränkt. Somit ist $h \in S_f$ und $-h \in S_{-f}$, was aber $h \leq P_D[f]$ und $-h \leq P_D[-f]$ bedingt. Es folgt $-P_D[-f] \leq h \leq P_D[f]$. Da aber immer $P_D[f] \leq -P_D[-f]$, muss f resolutiv sein mit $h = P_D[f]$.

❑

3.2.11 Beispiel. Für $D = U_1(0)$ folgt aus Satz 2.3.3 und Proposition 3.2.10, dass alle $f \in C(S^{p-1})$ resolutiv sind, wobei $P_D[f]$ das Poisson Integral $P[f]$ ist.

Als Vorbemerkung für das Folgende sei an Proposition 2.4.1 erinnert. Darin haben wir gesehen, dass bei lokal gleichmäßiger Konvergenz von Netzen harmonischer Funktionen die Grenzfunktion auch harmonisch ist. Insbesondere ist die Menge $h^\infty(D)$ aller reellwertigen, harmonischen Funktionen, die auf der offenen Menge D beschränkt sind, ein abgeschlossener Teilraum vom Banachraum aller reellwertigen, auf D beschränkten Funktionen $\mathcal{B}(D)$ versehen mit $\|.\|_\infty$. Somit ist $h^\infty(D)$ mit $\|.\|_\infty$ auch ein Banachraum.

3.2.12 Satz. *$\mathcal{R}_D$ ist ein Vektorraum, der alle Konstanten enthält.*

$\mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$ versehen mit $\|.\|_\infty$ ist ein abgeschlossener Unterraum des Banachraumes $\mathcal{B}(\partial^\infty D)$ aller beschränkten, reellwertigen Funktionen auf $\partial^\infty D$. Insbesondere ist er selbst ein Banachraum.

Weiters ist die Abbildung $f \mapsto P_D[f]$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{R}_D$ in den Vektorraum aller harmonischen Funktionen auf D. Die Einschränkung auf $\mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$ ist eine beschränkte Abbildung mit Abbildungsnorm 1 nach $h^\infty(D)$ - der Banachraum aller auf D harmonischen und beschränkten Funktionen versehen mit $\|.\|_\infty$.

Beweis. Zunächst wissen wir aus Lemma 3.2.5, dass für jedes konstante $d \in \mathbb{R}$ immer $P_D[d] = d$. Daraus folgt unmittelbar $d \in \mathcal{R}_D$. Als Folge gilt auch $P_D[cf] = cP_D[f]$ für $c = 0$ und $f \in \mathcal{R}_D$.

Ist $f \in \mathcal{R}_D$, so gilt $P_D[(-f)] = -P_D[f] = -P_D[-(-f)]$, womit $(-f) \in \mathcal{R}_D$ und $P_D[cf] = cP_D[f]$ für $c = -1$.

Ist nun $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, so folgt aus Lemma 3.2.5, dass $P_D[cf] = cP_D[f]$ und $-P_D[-cf] = -cP_D[-f] = cP_D[f] = P_D[cf]$. Also ist $cf \in \mathcal{R}_D$ mit $P_D[cf] = cP_D[f]$.

Sind $f, g \in \mathcal{R}_D$, so folgt aus Lemma 3.2.5 einerseits $P_D[f]+P_D[g] \leq P_D[f+g]$ und andererseits. $P_D[-f]+P_D[-g] \leq P_D[-f-g]$ bzw. $-P_D[-f]-P_D[-g] \geq -P_D[-f-g]$. Wegen $f, g \in \mathcal{R}_D$ und weil immer $P_D[f+g] \leq -P_D[-f-g]$ folgt somit

$$P_D[f] + P_D[g] \leq P_D[f+g] \leq -P_D[-f-g] \leq -P_D[-f] - P_D[-g] = P_D[f] + P_D[g].$$

Also stimmen alle Funktionen überein. Insbesondere gilt $f + g \in \mathcal{R}_D$ und $P_D[f] + P_D[g] = P_D[f+g]$.

Also ist $\mathcal{R}_D$ ein Vektorraum, der alle Konstanten enthält.

Unmittelbar aus (3.10) folgt für $f \in \mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$, dass $P_D[f]$ beschränkt und harmonisch und daher in $h^\infty(D)$ ist, wobei $\|P_D[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Somit ist auch die Abbildungnorm von $f \mapsto P_D[f]$ kleiner oder gleich eins. Wegen $P_D[1] = 1$ ist sie sogar gleich eins.

Für den Beweis der Abgeschlossenheit sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{B}(\partial^\infty D)\cap\mathcal{R}_D$, die in $\mathcal{B}(\partial^\infty D)$ gegen ein f konvergiert. Aus (3.10) folgt aber, dass

$$-P_D[-f] = -\lim_{n\to\infty} P_D[-f_n] = -\lim_{n\to\infty} -P_D[f_n] = \lim_{n\to\infty} P_D[f_n] = P_D[f],$$

womit auch $f \in \mathcal{R}_D$

❑

Ähnlich wie Proposition 3.2.10 gilt

3.2.13 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Weiters nehmen wir an, dass es eine subharmonische Funktion $u : D \to [-\infty, +\infty)$ gibt, sodass für alle $\xi \in \partial^\infty D$ der Grenzwert*

$$f(\xi) := \lim_{x\to\xi} u(x)$$

in $\mathbb{R}$ existiert und sodass die Funktion $f : \partial^\infty D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann folgt $f \in \mathcal{B}(\partial^\infty D)\cap\mathcal{R}_D$.

Beweis. Wegen (3.9) sind mit f und $-f$ auch $P_D[f]$ und $P_D[-f]$ beschränkt und damit letztere zwei harmonisch. Aus der Voraussetzung folgt mit dem Maximumsprinzip Satz 2.5.11 $u \in S_f$ und daher $u \leq P_D[f]$. Für $\xi \in \partial^\infty D$ folgt daher

$$\limsup_{x\to\xi} -P_D[f](x) \leq \limsup_{x\to\xi} -u(x) = \lim_{x\to\xi} -u(x) = -f(\xi),$$

womit $-P_D[f] \in S_{-f}$, und damit $-P_D[f] \leq P_D[-f]$.

Zusammen mit der allgemein gültigen Ungleichung $P_D[f] \leq -P_D[-f]$ folgt $f \in \mathcal{R}_D$.

❑

3.2.14 Satz. *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$ beschränkt, so sind alle stetigen Funktionen auf $\partial^\infty D = \partial D$ resolutiv, dh. $C(\partial^\infty D) \subseteq \mathcal{B}(\partial^\infty D)\cap\mathcal{R}_D$.*

Beweis.

⇝ Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^p)$. Auf der kompakten Menge $\overline{D}$ hat die stetige Funktion $\triangle g$ ein Minimum. Also gilt $\triangle g \geq -C$ für ein $C \in \mathbb{R},\ C > 0$.

  Die Funktion $v(x) := C\|x\|^2$ ist C^2 und erfüllt $\triangle v = C2p$ und ist somit subharmonisch auf $\mathbb{R}^p$. Die Funktion $u := v + g$ ist auch C^2 erfüllt $\triangle u = C2p + \triangle g \geq C2p - C \geq 0$. Also sind beide Funktionen subharmonisch, wobei

$$g = u - v\,.$$

⇝ Wegen Lemma 3.2.13 sind $u|_{\partial D}, v|_{\partial D} \in \mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$ und mit Satz 3.2.12 auch $g|_{\partial D} \in \mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$; also $C^2(\mathbb{R}^p)|_{\partial D} \subseteq \mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$.

  Der Raum aller Einschränkung von $C^2(\mathbb{R}^p)$ Funktionen auf ∂D ist offensichtlich eine Punkte-trennende Algebra und nach Stone-Weierstrass daher dicht in $C(\partial D)$ bzgl. $\|.\|_\infty$. Da $\mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$ wegen Satz 3.2.12 abgeschlossen in $\mathcal{B}(\partial D)$ ist folgt aus $C^2(\mathbb{R}^p)|_{\partial D} \subseteq \mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$, dass auch $C(\partial D) = \overline{C^2(\mathbb{R}^p)|_{\partial D}} \subseteq \mathcal{B}(\partial D)\cap\mathcal{R}_D$.

❑

3.3 Harmonische Maße

Für beschränktes und offenes D wissen wir aus Satz 3.2.14 und Satz 3.2.12, dass die Abbildung $f \mapsto P_D[f]$ den Raum $C(\partial D)$ linear und kontraktiv (Abbildungsnorm ist ≤ 1) nach $h^\infty(D)$ hinein abbildet. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz erhalten wir daraus:

3.3.1 Proposition. *Sei D beschränkt und offen. Dann existiert für jedes $x \in D$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_x : \mathfrak{B}(\partial D) \to [0, 1]$, sodass*

$$P_D[f](x) = \int_{\partial D} f \, d\mu_x \tag{3.11}$$

für alle $f \in C(\partial D)$. Die Maße $\mu_x, x \in D$ heißen die harmonischen Maße *von D.*

Beweis. Als Zusammensetzung der beschränkten linearen Abbildung $f \mapsto P_D[f]$ und der Punktauswertung ist $f \mapsto P_D[f](x)$ beschränkt und linear auf $C(\partial D)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein komplexes Maß $\mu_x \in M(\partial D)$, sodass (3.11) gilt. Nach (3.9) gilt aber $P_D[f](x) \geq 0$ für alle $f \geq 0$; also ist μ_x nichtnegativ, wobei (siehe Lemma 3.2.5)

$$\mu_x(\partial D) = \int_{\partial D} \mathbb{1} \, d\mu_x = P_D[\mathbb{1}](x) = 1.$$

Also ist μ_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

❑

3.3.2 Lemma. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Funktionen von ∂D nach $[-\infty, +\infty)$ mit nach oben beschränkten f_1. Ist f die Grenzfunktion dieser Folge, so folgt $P_D[f] = \lim_{n\to\infty} P_D[f_n]$ lokal gleichmäßig auf D.*

Sind dabei die f_n alle resolutiv, so ist auch f resolutiv, dh. $P_D[f] = \lim_{n\to\infty} P_D[f_n] = -P_D[-f]$ (Diese Funktion hat Werte in $[-\infty, +\infty)$.).

Beweis. Offensichtlich gilt $u \in S_f$ genau dann, wenn $u \in S_{f_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $S_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_{f_n}$. Die Behauptung folgt nun wegen $[S_{f_n}] = S_{f_n}$ aus Lemma 3.2.4, wenn man noch beachtet, dass $P_D[f_1] \leq \sup_{\xi\in\partial^\infty D} f_1(\xi) < +\infty$.

Seien nun zusätzlich alle f_n resolutiv. $\lim_{n\to\infty} P_D[-f_n]$ konvergiert als monoton wachsende Folge sicher punktweise, wobei wegen der Monotonie $\lim_{n\to\infty} P_D[-f_n] \leq P_D[-f]$. Wegen $\lim_{n\to\infty} P_D[f_n] = P_D[f]$ und der Voraussetzung folgt

$$-P_D[-f] \leq \lim_{n\to\infty} -P_D[-f_n] = \lim_{n\to\infty} P_D[f_n] = P_D[f].$$

Da immer $P_D[f] \leq -P_D[-f]$, folgt $-P_D[-f] = P_D[f]$.

❑

Wir wollen nun (3.11) auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen. Ist etwa $f : \partial D \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig, so gibt es nach Lemma 3.1.1 eine monoton fallende Folge (f_n) bestehend aus auf ∂D stetigen nach oben beschränkten, reellwertigen Funktionen, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ punktweise. Nach dem Satz von der monotonen

Konvergenz, $C(\partial D) \subseteq \mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$ und Lemma 3.3.2 folgt

$$\int_{\partial D} f\, d\mu_x = \lim_{n\to\infty} P_D[f_n](x) = P_D[f](x) = -P_D[-f](x).$$

Also gilt (3.11) für alle von oben halbstetigen $f : \partial D \to [-\infty, +\infty)$, wobei diese f's wieder resolutiv sind. Ist für $f : \partial D \to (-\infty, +\infty]$ die Funktion $-f$ von oben halbstetig, dh. f ist von unten halbstetig, so gilt offensichtlich dassselbe.

3.3.3 Satz. *Mit der Notation aus Proposition 3.3.1 gilt: Jede nach oben oder nach unten beschränkte reellwertige Borel-meßbare Funktion f ist resolutiv, wobei (diese Gleichheit gilt in* $[-\infty, +\infty]$*)*

$$\int_{\partial D} f\, d\mu_x = P_D[f](x) = -P_D[-f](x),\ \ x \in D.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass wenn (f_n) eine monoton wachsende Folge von $(-\infty, +\infty]$-wertigen, nach unten beschränkten, Borel-meßbaren Funktionen ist, sodass alle f_n die Aussage des Satzes erfüllen, dann auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ die Aussage des Satzes erfüllt, wie unmittelbar aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 3.3.2 angewandt auf $-f_n$ folgt.

Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller $E \in \mathfrak{B}(\partial D)$, sodass für $f = \mathbb{1}_E$ die Aussage des Satzes stimmt. Da charakteristische Funktionen alle beschränkt sind, gilt $\mathbb{1}_E \in \mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$ für alle $E \in \mathcal{D}$.

Da für ein abgeschlossenes (und daher kompaktes) $A \subseteq \partial D$ die Funktion $\mathbb{1}_A$ von oben halbstetig, vgl. Beispiel 2.5.5, ist, folgt $A \in \mathcal{D}$. Also gilt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{D}$, wobei $\mathfrak{F}$ alle abgeschlossenen Teilmengen von ∂D bezeichnet.

Ist $E \in \mathcal{D}$, so gilt $\mathbb{1}_{E^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_E$ auf ∂D. Da $\mathcal{B}(\partial^\infty D) \cap \mathcal{R}_D$ ein Vektorraum ist, ist $\mathbb{1}_{E^c}$ mit Satz 3.2.12 resolutiv, sodass $P_D[\mathbb{1}_{E^c}] = P_D[\mathbb{1}] - P_D[\mathbb{1}_E]$. Zudem folgt

$$\int_{\partial D} \mathbb{1}_{E^c}\, d\mu_x = \mu_x(\partial D) - \int_{\partial D} \mathbb{1}_E\, d\mu_x = 1 - P_D[\mathbb{1}_E](x) = P_D[\mathbb{1}_{E^c}].$$

Sind nun $E_n \in \mathcal{D}$ disjunkt, so folgt aus der Eingangs gemachten Behauptung, dass auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}$.

Somit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem, welches $\mathfrak{F}$ umfasst. Also umfasst $\mathcal{D}$ auch das kleinste $\mathfrak{F}$ umfassende Dynkinsystem $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. Da $\mathfrak{F}$ Durchschnittsstabil ist, gilt selbiges auch für $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$, womit $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ eine σ-Algebra ist. Da die Borelmengen von $\mathfrak{F}$ erzeugt werden, folgt $\mathfrak{B}(\partial D) \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{B}(\partial D)$.

Da Integrieren linear ist, folgt aus Satz 3.2.12, dass die Aussage des Satzes für alle Borel-meßbaren Treppenfunktion gilt. Da jede nach unten beschränkte, reellwertige und Borel-meßbare Funktion als, Grenzwert einer monoton wachsenden Folge (f_n) bestehend aus Borel-meßbaren, nach unten beschränkten Treppenfunktionen geschrieben werden kann, folgt schließlich die Aussage des Satzes. Für nach oben beschränkte Funktionen f betrachte man $-f$.

❑

3.3.4 Proposition. *Mit der Notation aus Proposition 3.3.1 sei D zusammenhängend. Für $x, y \in D$ gilt dann $\mu_x \ll \mu_y$. Also haben die Maße μ_x, $x \in D$, die selben Nullmengen, die wir als $\mu_.$-Nullmengen bezeichnen wollen.*

Beweis. Aus $E \in \mathfrak{B}(\partial D)$ mit $\mu_y(E) = 0$ folgt für die harmonische und nichtnegative Funktion $P_D[\mathbb{1}_E]$, dass (vgl. Satz 3.3.3)

$$P_D[\mathbb{1}_E](y) = \int\limits_{\partial D} \mathbb{1}_E \, d\mu_y = 0.$$

Nach dem Maximumsprinzip folgt $P_D[\mathbb{1}_E] \equiv 0$ und somit

$$\mu_x(E) = \int\limits_{\partial D} \mathbb{1}_E \, d\mu_x = P_D[\mathbb{1}_E](x) = 0.$$

❑

In der Situation von Proposition 3.3.4 wollen wir mit $d_{x;y} : \partial D \to [0, +\infty]$ die Dichtefunktion, dh. die Radon-Nikodym Ableitung, von μ_x bzgl. dem Maß μ_y bezeichnen.

Es sei noch bemerkt, dass die Dichten $d_{x;y}$ bis auf $\mu_.$-Nullmengen eindeutig sind.

Wegen der Endlichkeit von μ_x und wegen Proposition 3.3.4 können $\{t \in \partial D : d_{x;y}(t) = +\infty\}$ und $\{t \in \partial D : d_{x;y}(t) = 0\}$ nur μ_y-Nullmengen sein. Also können wir sogar $d_{x;y} : \partial D \to (0, +\infty)$ annehmen. Da Dichten bis auf Nullmengen eindeutig sind, gilt auch

$$d_{x;y} \cdot d_{y;x} = 1, \ \ \mu_. - \text{ fast überall auf } \partial D. \tag{3.12}$$

3.3.5 Proposition. *Mit der Notation aus Proposition 3.3.1 sei D zusammenhängend. Dann gilt*

- ⇝ *Für $p \in [1, +\infty]$ sind die Räume $L^p(\partial D, \mathfrak{B}(\partial D), \mu_x, \mathbb{C})$ als Vektorräume unabhängig von $x \in D$. Die Normen in Abhängigkeit von x sind untereinander äquivalent. Im Fall $p = +\infty$ gilt $\|.\|_{\infty,\mu_x} = \|.\|_{\infty,\mu_y}$ für alle kompakten $K \subseteq D$ für $p < +\infty$ gibt es eine Konstante $C \geq 1$ abhängig von K, sodass für $x, y \in K$*

$$\|.\|_{p,\mu_x} \leq C^{\frac{1}{p}} \|.\|_{p,\mu_y}, \quad x, y \in D$$

- ⇝ *Die Dichten $d_{x;y}$ kann man so wählen, dass $\frac{1}{C} \leq d_{x;y} \leq C$ für alle $x, y \in K$ mit der selben Konstante C wie oben.*

- ⇝ *Die Abbildung $x \mapsto \mu_x$ von D nach $M(\partial D)$ ist stetig, wenn man $M(\partial D)$ mit der w^*-Topologie versieht.*

Beweis. Da die Nullmengen bzgl. der μ_x unabhängig von x sind, ist das wesentliche Supremum für jede messbare Funktion $f : \partial D \to \mathbb{C}$

$$\|f\|_{\infty,\mu_x} = \inf\{\eta > 0 : \mu_x\{t \in \partial D : |f(t)| > \eta\} = 0\}$$

auch unabhängig von x. Insbesodere gilt

$$L^\infty(\partial D, \mathfrak{B}(\partial D), \mu_x, \mathbb{C}) = L^\infty(\partial D, \mathfrak{B}(\partial D), \mu_y, \mathbb{C}).$$

Sei nun $p < +\infty$. Ein $f : \partial D \to \mathbb{C}$ liegt in $L^p(\partial D, \mathfrak{B}(\partial D), \mu_x, \mathbb{C})$ genau dann, wenn $\int |f|^p \, d\mu_x < +\infty$. Da $|f|^p$ Borel-meßbar und nach unten beschränkt ist, ist das wegen Satz 3.3.3 und Lemma 3.2.3 dazu äquivalent, dass

$$x \mapsto P_D[|f|^p](x) = \int |f|^p \, d\mu_x,$$

eine reellwertige harmonische und offensichtlich eine nichtnegative Funktion auf D ist. Nach (2.18) in Korollar 2.4.3 gilt dann für alle $x, y \in K$ mit einer geeigneten Konstanten $C \geq 1$

$$\int |f|^p \, d\mu_x \leq C \int |f|^p \, d\mu_y.$$

Setzen wir die Dichten ein, so folgt im Fall $p = 1$

$$\int (C - d_{x;y})|f| \, d\mu_y \geq 0$$

für alle integrierbaren f, was aber $d_{x;y} \leq C$ fast überall nach sich zieht. Aus (3.12) folgt schließlich auch $\frac{1}{C} \leq d_{x;y}$ fast überall.

Die letzte Aussage gilt, da eine Abbildung $\psi : D \to M(\partial D)$ genau dann w^*-stetig ist, wenn die Abbildungen $x \mapsto \int f \, d\psi(x)$ für alle $f \in C(\partial D)$ stetig sind. Bei uns ist das aber gerade

$$x \mapsto \int f \, d\mu_x = P_D[f](x),$$

was laut Satz 3.2.14 sogar harmonisch ist.

❑

3.4 Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

In diesem Kapitel sei D eine offene nichtleere und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^p$.

3.4.1 Lemma. *Sei $u : D \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig so, dass die auf ∂D definierte Funktion*

$$f(\xi) := \limsup_{x \to \xi} u(x), \quad \xi \in \partial D,$$

nur Werte in $[-\infty, +\infty)$ annimmt. Dann ist die Funktion $w := u \cup f : \overline{D} \to [-\infty, +\infty)$ auch von oben halbstetig.

Beweis. Da von oben halbstetig zu sein eine lokale Eigenschaft ist, genügt es, $\limsup_{x \to \xi} w(x) \leq f(\xi)$ für alle $\xi \in \partial D$ zu zeigen.

Sei $\eta > f(\xi)$ beliebig. Laut Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung U_ξ von ξ, sodass $u(x) \leq \eta, \ x \in U_\xi$. Für ein $\zeta \in U_\xi \cap \partial D$ ist U_ξ auch eine offene Umgebung von ζ und damit

$$f(\zeta) := \limsup_{x \to \zeta} u(x) \leq \sup\{u(x) : x \in U_\xi \cap D\} \leq \eta.$$

Also gilt $w(x) \leq \eta$ für alle $x \in U_\xi \cap (D \cup \partial D) = U_\xi \cap \overline{D}$.

❑

3.4.2 Definition. Ein Punkt $\xi \in \partial D$ heißt *regulär*, falls für jedes $f \in C(\partial D)$

$$\lim_{x\to\xi,\ x\in D} P_D[f](x) = f(\xi).$$

Offensichtlich ist dann die Fortsetzung $f \cup P_D[f] : \overline{D} \to \mathbb{R}$ von $P_D[f]$ auch bei ξ stetig.

3.4.3 Beispiel. Wie aus Beispiel 3.2.8 unmittelbar folgt, ist für $D = U_1(0) \setminus \{0\}$ der Randpunkt 0 nicht regulär.

3.4.4 Bemerkung. Sei $\xi \in \partial D$. Die Funktion $f(\eta) := -\|\xi - \eta\|$ ist stetig am Rand. Die dazugehörige Funktion $P_D[f]$ ist harmonisch auf D.

Nach Beispiel 3.1.11 ist $u : x \mapsto \|x - \xi\|$ auf $\mathbb{R}^p$ subharmonisch, womit $u \in S_{-f}$; also $u \le P_D[-f] = -P_D[f]$ bzw. $P_D[f] \le -u|_D$. Setzen wir

$$g(\eta) := \limsup_{y\to\eta,\ y\in D} P_D[f](y), \quad \eta \in \partial D,$$

so ist nach Lemma 3.4.1 die Funktion $g \cup P_D[f]; \overline{D} \to \mathbb{R}$ von oben halbstetig, für die auch $g \cup P_D[f] \le -u|_{\overline{D}}$ gilt.

Nun ist auch die Funktion $h := f \cup P_D[f] : \overline{D} \to \mathbb{R}$ von oben halbstetig, da die Funktion $m : \overline{D} \to \mathbb{R}$ definiert durch $m|_D = -\|f\|_\infty$ und $m|_{\partial D} = f$ offensichtlich halbstetig von oben ist und $h = \max(m, g \cup P_D[f])$. Außerdem gilt $h \le -u|_{\overline{D}}$.

Daraus folgt für alle $\delta > 0$

$$\sup_{y\in\overline{D}\setminus U_\delta(\xi)} h(y) \le -\delta < 0.$$

Insbesondere gilt $h|_{\overline{D}\setminus\{\xi\}} < 0$.

Ist nun ξ regulär, so gilt per definitionem

$$\lim_{x\to\xi,\ x\in D} h(x) = f(\xi) = 0.$$

Gemäß der folgenden Definition 3.4.5 ist h eine starke Barriere.

3.4.5 Definition. Eine von oben halbstetige Funktion $u : \overline{D} \to [-\infty, +\infty)$ heißt *starke Barriere* für D bei ξ, wenn

- ⇝ $u|_D$ ist subharmonisch,
- ⇝ $u|_{\overline{D}\setminus\{\xi\}} < 0$,
- ⇝ $\lim_{x\to\xi,\ x\in D} u(x) = 0$.

Aus $u|_{\overline{D}\setminus\{\xi\}} < 0$ folgt wegen der Halbstetigkeit von oben, dass für $\delta > 0$

$$\rho(\delta) := \sup_{x\in\overline{D}\setminus U_\delta(\xi)} u(x) = \max_{x\in\overline{D}\setminus U_\delta(\xi)} u(x) < 0. \tag{3.13}$$

3.4.6 Lemma. *Ist $f : \partial D \to (-\infty, +\infty]$ nach unten beschränkt, und gibt es eine starke Barriere für D bei ξ, so folgt*

$$\liminf_{y\to\xi,\ y\in D} P_D[f](y) \ge \liminf_{\eta\to\xi,\ \eta\in\partial D} f(\eta) =: \beta.$$

Ist f sogar beschränkt, so gilt sogar

$$\liminf_{\eta\to\xi,\ \eta\in\partial D} f(\eta) \le \liminf_{y\to\xi,\ y\in D} P_D[f](y) \le \limsup_{y\to\xi,\ y\in D} -P_D[-f](y) \le \limsup_{\eta\to\xi,\ \eta\in\partial D} f(\eta).$$

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\beta - \epsilon < f(\eta), \quad \eta \in U_\delta(\xi) \cap \partial D. \tag{3.14}$$

Ist u die starke Barriere und $\rho(\delta) < 0$ wie in (3.13), so folgt aus der Beschränktheit von f nach unten, dass für hinreichend großes $C > 0$

$$Cu(\eta) + \beta - \epsilon \leq C\rho(\delta) + \beta - \epsilon < f(\eta)$$

für $\eta \in \partial D \setminus U_\delta(\xi)$. Wegen $u \leq 0$ und (3.14) gilt

$$Cu(\eta) + \beta - \epsilon \leq f(\eta)$$

für alle $\eta \in \partial D$, womit $Cu|_D + \beta - \epsilon \in S_f$ und weiter $Cu|_D + \beta - \epsilon \leq P_D[f]$. Damit folgt

$$\liminf_{y \to \xi,\, y \in D} P_D[f](y) \geq \liminf_{y \to \xi,\, y \in D} Cu|_D + \beta - \epsilon = \beta - \epsilon.$$

Nun war $\epsilon > 0$ beliebig. Die letzte Ungleichung folgt aus dem Bewiesenen angewandt auf f und $-f$ zusammen mit $P_D[f] \leq -P_D[-f]$.

❑

3.4.7 Satz. *Ein Punkt $\xi \in \partial D$ ist genau dann regulär, wenn es eine starke Barriere für D bei ξ gibt.*

Beweis. Ist ξ regulär, so haben wir in Bemerkung 3.4.4 gesehen, dass es dann eine starke Barriere für D bei ξ gibt.

Gibt es umgekehrt bei ξ eine starke Barriere für D und ist $f \in C(\partial D)$, so folgt aus Lemma 3.4.6 zusammen mit $P_D[f] = -P_D[-f]$

$$f(\xi) = \liminf_{\eta \to \xi,\, \eta \in \partial D} f(\eta) \leq \liminf_{y \to \xi,\, y \in D} P_D[f](y) \leq \limsup_{y \to \xi,\, y \in D} P_D[f](y) \leq \limsup_{\eta \to \xi,\, \eta \in \partial D} f(\eta) = f(\xi).$$

❑

Wir sehen, dass sich das Dirichletsche Problem für sogenannte reguläre offene und beschränkte $D \subseteq \mathbb{R}^p$ lösen lässt.

3.4.8 Korollar. *Genau dann gibt es für jedes $f \in C(\partial D)$ eine stetige Fortsetzung $h \in C(\overline{D})$ mit harmonischem $h|_D$, wenn es bei allen ξ eine starke Barriere für D gibt.*

Die Funktion h ist dabei eindeutig.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumsprinzip.

❑

3.4.9 Lemma. *Ist $\xi \in \partial D$ derart, dass $\{\xi\} = \overline{D} \cap K_r(a)$ für ein $a \in \mathbb{R}^p$ und ein $r > 0$, so gibt es bei ξ eine starke Barriere für D.*

Beweis. Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} \ln r - \ln \|x - a\| & , p = 2 \\ \|x - a\|^{2-p} - r^{2-p} & , p > 2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^p \setminus \{a\},$$

ist auf $\mathbb{R}^p \setminus \{a\} \supseteq \overline{D}$ harmonisch, ist auf $\mathbb{R}^p \setminus K_r(a) \supseteq \overline{D} \setminus \{\xi\}$ strikt kleiner Null, und nimmt bei ξ den Wert Null an.

❑

3.4.10 Bemerkung. Aus dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach folgt, dass es zu konvexen offenen D und $\xi \in \partial D$ ein lineares Funktional ϕ auf $\mathbb{R}^p$ gibt, sodass

$$\phi(\xi) \geq \phi(x), \ x \in D.$$

Ist $y \in \mathbb{R}^p$ mit $\phi(x) = (x, y), \ x \in \mathbb{R}^p$, so folgt $K_{\|y\|}(\xi + y) \cap \{x : \phi(x) = \phi(\xi)\} = \{\xi\}$ und daher $K_{\|y\|}(\xi + y) \cap \overline{D} = \{\xi\}$. Also ist die Bedingung aus Lemma 3.4.9 erfüllt.

Wir wollen nun auch für allgemeinere D starke Barrieren identifizieren. Zunächst bezeichnen wir für $\alpha > 0$ mit Γ_α den Kegel

$$\Gamma_\alpha := \{x = (x_j)_{j=1}^p \in \mathbb{R}^p : \|x - x_1 e_1\| < \alpha \cdot x_1\},$$

für den offensichtlich

$$\overline{\Gamma_\alpha} = \{x = (x_j)_{j=1}^p \in \mathbb{R}^p : \|x - x_1 e_1\| \leq \alpha \cdot x_1\}$$

gilt. Wir bemerken auch, dass für $\rho > 0$ immer $U_{\alpha\rho}(\rho \sqrt{\alpha^2 + 1}\, e_1) \subseteq \Gamma_\alpha$ und

$$K_{\alpha\rho}(\rho \sqrt{\alpha^2 + 1} e_1) \cap \partial\Gamma_\alpha = \{(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}, \beta_2, \ldots, \beta_p)^T \in \mathbb{R}^p : \beta_2^2 + \cdots + \beta_p^2 = \frac{\alpha^2\rho^2}{1 + \alpha^2}\}.$$

Man beachte, dass jedes $\xi \in \partial\Gamma_\alpha \setminus \{0\}$ für geeignetes $\rho > 0$ in der Menge auf der rechten Seite liegt. Dann liegt $K_{\frac{\|\xi - \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1\|}{2}}(\frac{\xi + \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1}{2})$ ganz in $K_{\alpha\rho}(\rho \sqrt{\alpha^2 + 1}\, e_1)$, wobei

$$K_{\frac{\|\xi - \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1\|}{2}}(\frac{\xi + \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1}{2}) \cap \partial K_{\alpha\rho}(\rho \sqrt{\alpha^2 + 1}\, e_1) = \{\xi\}.$$

Somit gilt

$$K_{\frac{\|\xi - \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1\|}{2}}(\frac{\xi + \rho\sqrt{\alpha^2+1}\, e_1}{2}) \cap \partial\Gamma_\alpha = \{\xi\}.$$

3.4.11 Lemma. *Sei $D = U_1(0) \setminus \overline{\Gamma_\alpha}$ und $f(x) = -\|x\|$. Dann ist $h := f \cup P_D[f] : \overline{D}(= K_1(0) \setminus \Gamma_\alpha) \to \mathbb{R}$ eine starke Barriere bei 0 für D.*

Beweis. Einen großen Teil der Arbeit haben wir schon in Bemerkung 3.4.4 verrichtet. Es bleibt $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ zu zeigen.

Dazu sei zunächst bemerkt, dass aus Bemerkung 3.4.10 und aus obiger Überlegung folgt, dass die Bedingung aus Lemma 3.4.9 für alle $\xi \in \partial D \setminus \{0\}$ erfüllt ist. Somit ist h sicherlich stetig auf $\overline{D} \setminus \{0\}$ und insbesondere nicht konstant.

Zudem gilt offensichtlich $-1 \leq h \leq 0$. Also reicht es, $\liminf_{x\to 0} h(x) = 0$ zu zeigen. Für ein festes $r \in (0, 1)$ ist h auf $\overline{rD} \setminus U_{\frac{r}{2}}\{0\}$ sicherlich auch stetig und hat dort ein Minimum. Dieses kann aber nicht -1 sein, da auf $\overline{rD} \cap \partial D$ sicherlich $f \geq -r$ und $P_D[f]$ auf $\overline{rD} \cap D$ nach dem Maximumprinzip das Minimum nicht annehmen kann. Also gilt $h \geq -c$ für ein $c \in (0, 1)$. Die Funktion

$$g(x) := -h(x) + \max(c, r) h(\frac{x}{r}), x \in \overline{rD} \setminus \{0\}$$

ist auch stetig, beschränkt und erfüllt $g(x) = \|x\| - \max(c, r)\|\frac{x}{r}\| \leq 0$ für $x \in \overline{rD} \cap \partial D \setminus \{0\}$ und $g(x) \leq c - \max(c, r) \leq 0$ für $x \in \overline{rD} \setminus U_r(0)$.

Für $\xi \in \partial(rD) \setminus \{0\}$ gilt daher

$$\limsup_{x\to\xi} g(x) \leq 0,$$

und für $\xi = 0$ und $\epsilon > 0$ gilt wegen der Beschränktheit von g für $\|x\|$ hinreichend klein

$$g(x) \leq \epsilon \begin{cases} (-\ln\|x\|) & , \; p = 2 \\ \|x\|^{2-p} & , \; p > 2 \end{cases}.$$

Nach Satz 2.5.11 ist $g \leq 0$ auf rD, und damit

$$\limsup_{x\to 0} -h(x) \leq \limsup_{x\to 0} g(x) + \max(c,r) \limsup_{x\to 0} -h(\frac{x}{r}) \leq \max(c,r) \limsup_{x\to 0} -h(x).$$

Nun kann diese Ungleichung nur gelten, wenn $\limsup_{x\to 0} -h(x) = 0$.

❑

Im folgenden sei $\Gamma_\alpha^h := \Gamma_\alpha \cap U_h(0)$, für den man leicht zeigt, dass $\overline{\Gamma_\alpha^h} = \overline{\Gamma_\alpha} \cap K_h(0)$.

3.4.12 Korollar. *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, beschränkt. Ist $\xi \in \partial D$ so, dass für gewisse $\alpha > 0$, $h > 0$ und orthogonales $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ der abgschnittene Kegel $\xi + T(\overline{\Gamma_\alpha^h})$ die Bedingung*

$$(\xi + T(\overline{\Gamma_\alpha^h})) \cap \overline{D} = \{\xi\}$$

erfüllt, so gibt es bei ξ eine starke Barriere für D.

Beweis. Man überprüft leicht, dass starke Barrieren unter Variablentransformationen der Form $x \to \xi + hTx$ erhalten bleiben. Somit können wir $\xi = 0, h = 1, T = I$ annehmen, was $D \cap U_1(0) \subseteq U_1(0) \setminus \overline{\Gamma_\alpha}$ bedingt.

Aus Lemma 3.4.11 wissen wir, dass eine starke Barriere $u : K_1(0) \setminus \Gamma_\alpha \to [-1, 0]$ bei 0 für $U_1(0) \setminus \overline{\Gamma_\alpha}$ gibt. Wegen Lemma 3.4.11 gilt auch $u|_{S^{p-1}\setminus\Gamma_\alpha} \equiv -1$. Setzen wir u auf $U_1(0)^c$ durch -1 konstant fort, so bleibt u von oben halbstetig (vgl. Lemma 3.1.13). Zudem prüft man mit Satz 3.1.7 leicht nach, dass $u|_{(K_1(0)\setminus\overline{\Gamma_\alpha})\cup K_1(0)^c}$ subharmonisch ist.

Offensichtlich gilt $\overline{D} \subseteq (K_1(0) \setminus \Gamma_\alpha) \cup U_1(0)^c$, womit $u|_{\overline{D}}$ eine Barriere für D bei ξ ist.

❑

Korollar 3.4.12 legt nahe, dass die Existenz einer starken Barriere eine lokale Eigenschaft ist. Das ist in der Tat der Fall, wie auch aus folgendem Resultat folgt.

3.4.13 Satz. *Ist $\xi \in \partial D$ und existiert eine* schwache, lokale Barriere *bei ξ für D, dh. es gibt eine offene Umgebung U von ξ und eine Funktion $w : U \cap D \to [-\infty, +\infty)$, sodass*

- *w ist subharmonisch,*
- *$w < 0$,*
- $\lim_{x\to\xi,\, x\in D\cap U} w(x) = 0$,

so gibt es eine starke Barriere von D bei ξ.

Beweis. Sei $h := f \cup P_D[f] : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\|x - \xi\|$. Nach Bemerkung 3.4.4 genügt es $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ zu zeigen. Wegen $0 \leq P_D[-f] = -P_D[f] \leq \|f\|_\infty$ genügt es $\limsup_{x\to 0} P_D[-f] \leq 0$ nachzuweisen.

Dazu sei $\delta_n, n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge, sodass $K_{\delta_n}(\xi) \subseteq U$ und

$$(\xi + \delta_n S^{p-1}) \cap D \neq \emptyset.$$

Weiters sei $F_n \subseteq S^{p-1} \cap \frac{1}{\delta_n}(D - \xi) := O_n$ kompakt und so, dass

$$\sigma(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\delta_n}{\|f\|_\infty}.$$

Das Poissonintegral $P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}] : K_1(0) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}(y)\, d\sigma(y), \quad x \in U_1(0),$$

und $P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](x) = \mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}(x),\ x \in S^{p-1}$ ist stetig bei allen $x \in O_n \setminus F_n$ (vgl. Lemma 2.3.2), und da $P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}] = 1 - P[\mathbb{1}_{S^{p-1} \setminus (O_n \setminus F_n)}]$ mit abgeschlossenen $S^{p-1} \setminus (O_n \setminus F_n)$ und daher nach oben halbstetigen $\mathbb{1}_{S^{p-1} \setminus (O_n \setminus F_n)}$ (vgl. Lemma 3.1.3),

$$\liminf_{y \to x} P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](y) \geq 0, \ x \in S^{p-1} \setminus (O_n \setminus F_n). \tag{3.15}$$

Sei nun $u \in S_{-f}$. Die Funktion

$$s(x) = u(x) - \delta_n + \frac{\|f\|_\infty}{-\max_{\eta \in \xi + \delta_n F_n} w(\eta)} \cdot w(x) - \|f\|_\infty \cdot P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](\frac{1}{\delta_n}(x - \xi)),\ x \in U_{\delta_n}(\xi) \cap D,$$

ist subharmonisch. Der Rand des Definitionsbereiches erfüllt

$$\partial(U_{\delta_n}(\xi) \cap D) = \left(\overline{U_{\delta_n}(\xi) \cap D} \setminus U_{\delta_n}(\xi)\right) \cup \left(\overline{U_{\delta_n}(\xi) \cap D} \setminus D\right) \subseteq$$
$$(\overline{D} \cap (\xi + \delta_n S^{p-1})) \cup (K_{\delta_n}(\xi) \cap \partial D) = (D \cap (\xi + \delta_n S^{p-1})) \cup (K_{\delta_n}(\xi) \cap \partial D).$$

Gilt für $\zeta \in \partial(U_{\delta_n}(\xi) \cap D)$ auch $\zeta \in K_{\delta_n}(\xi) \cap \partial D$, so folgt aus $u \in S_{-f}$ und $w \leq 0$ sowie $P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}] \geq 0$

$$\limsup_{z \to \zeta} s(z) \leq -f(\zeta) - \delta_n = \|\zeta - \xi\| - \delta_n \leq 0.$$

Gilt für $\zeta \in \partial(U_{\delta_n}(\xi) \cap D)$, dass $\zeta \in D \cap (\xi + \delta_n S^{p-1})$, so unterscheiden wir $\zeta \in \xi + \delta_n F_n$ und $\zeta \notin \xi + \delta_n F_n$. Im ersten Fall gilt wegen $u \leq P_D[-f] \leq \|f\|_\infty$, der Halbstetigkeit von w und (3.15)

$$\limsup_{z \to \zeta} s(z) \leq \|f\|_\infty - \delta_n + \frac{\|f\|_\infty}{-\max_{\eta \in \xi + \delta_n F_n} w(\eta)} \cdot w(\zeta) \leq \|f\|_\infty - \delta_n - \|f\|_\infty \leq 0,$$

und im zweiten Fall ($\zeta \in \xi + \delta_n O_n \setminus F_n$) gilt wegen $u \leq P_D[-f] \leq \|f\|_\infty$, $w \leq 0$ und der Stetigkeit von $P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](\frac{1}{\delta_n}(x - \xi))$ bei $x = \zeta$

$$\limsup_{z \to \zeta} s(z) \leq \|f\|_\infty - \delta_n + \|f\|_\infty \leq 0.$$

Nach Satz 2.5.11 folgt $s(x) \leq 0$ für $x \in U_{\delta_n}(\xi) \cap D$ und damit

$$u(x) \leq \delta_n - \frac{\|f\|_\infty}{-\max_{\eta \in \xi + \delta_n F_n} w(\eta)} \cdot w(x) + \|f\|_\infty \cdot P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](\frac{1}{\delta_n}(x - \xi)).$$

Da $u \in S_{-f}$ beliebig war, muss sogar

$$P_D[-f] \leq \delta_n - \frac{\|f\|_\infty}{-\max_{\eta \in \xi + \delta_n F_n} w(\eta)} \cdot w(x) + \|f\|_\infty \cdot P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](\frac{1}{\delta_n}(x - \xi)).$$

Für $x \to \xi,\ x \in U_{\delta_n}(\xi) \cap D$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$\delta_n + \|f\|_\infty \cdot P[\mathbb{1}_{O_n \setminus F_n}](0) = \delta_n + \|f\|_\infty \cdot \sigma(O_n \setminus F_n) \leq \delta_n + \|f\|_\infty \cdot \frac{\delta_n}{\|f\|_\infty} = 2\delta_n.$$

Damit folgt $\limsup_{x \to \xi,\ x \in D} P_D[-f] \leq 2\delta_n$. Für $n \to \infty$ erhalten wir $\limsup_{x \to \xi,\ x \in D} P_D[-f] \leq 0$.

❑

3.5 Lokale Perronsche Systeme

Wir wollen das Konzept von Perronsche Systeme etwas ausdehnen.

3.5.1 Definition. Eine nichtleere Menge S von subharmonischen Funktionen auf einer offenen, nichtleeren Menge $D \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt *lokales Perronsches System*, falls es zu jedem $x \in D$ ein offenes O_x mit $x \in O_x \subseteq D$ gibt, sodass $[S|_{O_x}]$ ein Perronsches System auf O_x ist, wobei $S|_{O_x} := \{v|_{O_x} : v \in S\}$ und

$$[S|_{O_x}] := \{v : v : O_x \to [-\infty, +\infty) \text{ subharmonisch mit } \exists u \in S \text{ mit } v \leq u|_{O_x}\},$$

.

3.5.2 Bemerkung. Man prüft unmittelbar nach, dass S genau dann ein lokales Perronsches System ist, wenn es zu jedem $x \in D$ ein offenes O_x mit $x \in O_x \subseteq D$ gibt, sodass

(*i*) Zu $u_1, u_2 \in S$ und $x \in D$ gibt es ein $u_3 \in S$ mit $u_1|_{O_x} \leq u_3|_{O_x}$ und $u_2|_{O_x} \leq u_3|_{O_x}$.

(*ii*) Ist $u \in S,\ x \in D$ und $a \in D,\ r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq O_x$, so gibt es ein $w \in S$ mit $u_{a,r}|_{O_x} \leq w|_{O_x}$.

Für ein derartiges System definieren wir auch die Perronsche Funktion durch

$$P_S(x) := \sup\{u(x) : u \in S\} \in [-\infty, +\infty], \quad x \in D.$$

Analog zu Lemma 3.2.3 gilt

3.5.3 Lemma. *Ist D ein Gebiet und S ein lokales Perronsches System, so gilt $P_S \equiv -\infty$, wenn $S = \{-\infty\}$. Anderenfalls ist die Funktion P_S auf D entweder identisch gleich $+\infty$ oder harmonisch auf D.*

Beweis. Falls $S = \{-\infty\}$, so gilt offensichtlich $P_S \equiv -\infty$. Anderenfalls ist $S \setminus \{-\infty\}$ nichtleer. Jedes $u \in S \setminus \{-\infty\}$ nimmt nach Satz 3.1.12 den Wert $-\infty$ nur auf einer Nullmenge an. Insbesondere enthält auch $(S \setminus \{-\infty\})|_{O_x}$ für kein $x \in D$ die Funktion identisch gleich $-\infty$ auf O_x.

Für $x \in D$ gilt offensichtlich $P_S|_{O_x} = P_{S|_{O_x}} = P_{[S|_{O_x}]}$. Somit ist gemäß Lemma 3.2.3 diese Funktion auf O_x entweder $\equiv +\infty$ oder harmonisch.

Betrachtet man die Menge A aller $x \in D$ mit $P_S|_{O_x} \equiv +\infty$, so folgt aus obiger Überlegung, dass A und auch $D \setminus A$ offen ist. Also muss entweder $P_S \equiv +\infty$ oder P_S harmonisch auf D sein.

❑

3.6 Harmonische Majoranten

3.6.1 Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $u : D \to [-\infty, +\infty)$ subharmonisch. Ein harmonisches $h : D \to \mathbb{R}$ heißt *harmonische Majorante*, wenn $u \leq h$ auf D.

Eine Majorante h von u heißt *kleinste harmonische Majorante*, wenn $h \leq \tilde{h}$ für alle harmonischen Majoranten $\tilde{h}$ von u.

Wie man am Beispiel der konvexen Funktion $\frac{1}{1-x^2}$ am Intervall $x \in (-1, 1)$ erahnen kann, gibt es subharmonische Funktionen, die keine harmonische Majorante haben.

Offensichtlich lässt sich das Problem der Existenz von Majoranten auf den Zusammenhangskomponenten von D getrennt betrachten. Also nehmen wir D als Gebiet an.

Um Majorenten zu konstruieren, nehmen wir uns eine Familie $U_l = U_{r_l}(a_l),\ l \in L$ von offenen Kugeln $U_{r_l}(a_l)$ mit

$\rightsquigarrow$ $K_{r_l}(a_l) \subseteq D,\ \ l \in L$,

$\rightsquigarrow$ $\bigcup_{l \in L} U_l = D$.

Für jedes geordnete m-Tupel $\lambda = (l_1, \ldots, l_m) \in L^m$ sei $u_\lambda : D \to [-\infty, +\infty)$ definiert durch (vgl. Lemma 3.1.14)

$$u_\lambda := (\ldots((u_{a_{l_1}, r_{l_1}})_{a_{l_2}, r_{l_2}})\ldots)_{a_{l_m}, r_{l_m}}.$$

Nun sei

$$S_u := \{u_\lambda : \lambda \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L^m\}.$$

3.6.2 Satz. *Sei $u \not\equiv -\infty$. S_u ist ein lokales Perronsches System, dessen Perronsche Funktion genau dann endlich, dh. harmonisch ist, wenn u eine harmonische Majorante hat. In diesem Fall ist P_{S_u} die kleinste harmonische Majorante.*

Beweis. Nach Lemma 3.1.14 sind alle u_λ subharmonisch und $\not\equiv -\infty$ (vgl. Fakta 3.1.15, 5), wobei immer $u \leq u_\lambda$ und $v_\lambda \geq u_\lambda$ für jede weitere subharmonische Funktion $v \geq u$.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L^m$, so gilt offensichtlich

$$(u_{\lambda_1})_{\lambda_2} = u_{\lambda_3},$$

wobei $\lambda_3 = (l_1, \ldots, l_r, l_{r+1}, \ldots, l_{r+s})$ mit $\lambda_1 = (l_1, \ldots, l_r)$ und $\lambda_2 = (l_{r+1}, \ldots, l_{r+s})$. Aus der eingangs gemachten Bemerkung folgt $u_{\lambda_1} \leq u_{\lambda_3}$ und wegen $u \leq u_{\lambda_1}$ gilt auch $u_{\lambda_2} \leq u_{\lambda_3}$.

Für $x \in D$ sei $O_x := U_l = U_{r_l}(a_l)$ für ein geeignetes $l \in L$ mit $x \in U_l$. Sei nun $K_r(a) \subseteq U_l$ und $\lambda = (l_1, \ldots, l_r) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L^m$. Wir setzen $\tilde{\lambda} = (l_1, \ldots, l_r, l)$ und bemerken, dass wegen

$$u_{\tilde{\lambda}} = (u_\lambda)_{a_l, r_l}$$

diese Funktion harmonisch auf $U_l \supseteq K_r(a)$ ist. Nach Satz 2.2.4 folgt

$$(u_\lambda)_{a,r} \leq (u_{\tilde{\lambda}})_{a,r} = u_{\tilde{\lambda}}.$$

wegen Bemerkung 3.5.2 ist S_u ein lokales Perronsches System, und nach Lemma 3.5.3 ist P_{S_u} entweder $\equiv +\infty$ oder harmonisch.

Im zweiten Fall hat offensichtlich u die Funktion P_{S_u} als harmonische Majorante. Ist umgekehrt h eine harmonische Majorante von u, so folgt aus Satz 2.2.4, dass $u_{a,r} \leq h_{a,r} = h$ und durch vollständige Induktion

$$u_\lambda \leq h, \quad \lambda \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L^m.$$

Somit folgt $P_{S_u} \leq h$. Also ist P_{S_u} die kleinste harmonische Majorante von u.

❑

3.6.3 Korollar. *Für $D = U_1(0)$ hat ein subharmonisches $u \not\equiv -\infty$ genau dann eine harmonische Majorante, wenn*

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_{S^{p-1}} u(ry)\, d\sigma(y) < +\infty. \tag{3.16}$$

In dem Fall ist

$$x \mapsto \sup\{u_{0,r}(x) : r \in (0,1)\}, \ x \in U_1(0),$$

die kleinste harmonische Majorante von u.

Beweis. Sei $L = (0,1)$ und $a_l = 0$ und $r_r = r$ für alle $r = l \in L$. Offensichtlich sind die Bedingungen (3.6) erfüllt. Nun gilt wegen Satz 2.2.4

$$(u_{0,s})_{0,r} = u_{0,\max(r,s)}$$

für $r < s$ und wegen $u_{0,s}(x) = u(x)$ für $\|x\| \geq s$ auch für $r \geq s$. Für $\lambda = (l_1, \ldots, l_m)$ folgt

$$u_\lambda = u_{0,\max_{j=1,\ldots,m} l_j},$$

und damit

$$P_{S_u}(x) = \sup\{u_{0,r}(x) : r \in (0,1)\}, \ x \in U_1(0).$$

Für $x = 0$ steht hier genau (3.16). Nach Satz 3.6.2 ist $P_{S_u}(0)$ genau dann endlich, wenn P_{S_u} die kleinste harmonische Majorante ist.

❑

Man beachte, dass nach Satz 3.1.12 der Ausdruck in (3.16) wachsend von r abhängt.

3.6.4 Korollar. *Für $D = U_1(0)$ hat ein subharmonisches $u \not\equiv -\infty$ genau dann eine nichtnegative harmonische Majorante auf D, wenn*

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_{S^{p-1}} \max(u(ry), 0)\, d\sigma(y) < +\infty. \tag{3.17}$$

Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_{S^{p-1}} |u(ry)|\, d\sigma(y) < +\infty. \tag{3.18}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $u \leq h$ für ein nichtnegatives harmonisches h, wenn $\max(u,0) \leq h$ für ein harmonisches h. Da $\max(u,0)$ subharmonisch ist, folgt der erste Teil aus Korollar 3.6.3.

Andererseits gilt $|u| = 2\max(u,0) - u$ und somit für $r \in (0,1)$

$$\int\limits_{S^{p-1}} \max(u(ry),0)\,d\sigma(y) \leq \int\limits_{S^{p-1}} |u(ry)|\,d\sigma(y) = 2\int\limits_{S^{p-1}} \max(u(ry),0)\,d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}} u(ry)\,d\sigma(y).$$

Nach Satz 3.1.12 ist $r \mapsto \int_{S^{p-1}} u(ry)\,d\sigma(y)$ monoton wachsend. Also sind (3.17) und (3.18) äquivalent.

❑

Kapitel 4

Kugelfunktionen

4.1 Polynome

Um partielle Ableitungen bzw. Polynome in mehreren Variablen besser anschreiben zu können führen wir zum $\mathbb{R}^p$ gehörige Multiindizes ein. Außerdem verwenden wir die Bezeichnung $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.1.1 Definition. Ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ heißt *Multiindex*. Der *Grad* eines Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ist definiert als

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_p.$$

Weiters setzen wir ($x \in \mathbb{R}^p$)

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_p!, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_p^{\alpha_p} \ (\in \mathbb{R}),$$

Außerdem setzen wir ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$)

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j \ \forall j \in \{1, \dots, p\}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom* vom Grad höchstens m, wenn

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p, \ |\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Ein Polynom $f(x)$ heißt *homogen* vom Grad m, wenn

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p, \ |\alpha| = m} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

Ist $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ein Multiindex $f : O \to \mathbb{R}$ zumindest in $C^{|\alpha|}(G)$, so setzt man ($x \in G$)

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(x).$$

Es sei daran erinnert, dass wegen dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unerheblich ist. Insbesondere gibt es für $f \in C^m(G)$ und $l_1, \dots, l_m \in \{1, \dots, p\}$ immer einen Multiindex α mit $m = |\alpha|$, sodass

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} = D^\alpha f(x).$$

4.1.2 Fakta.

1. Ist $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ |\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha$ ein Polynom vom Grad $\leq m$, so gilt für $x \in \mathbb{R}^p$ und $t \in \mathbb{R}$
$$f(tx) = \sum_{k=0}^{m} t^k \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ |\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{m} t^k p_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^p. \tag{4.1}$$
Dabei ist p_k ein homogenes Polynom vom Grad k.

2. Ist f ein homogenes Polynom vom Grad m, so sieht man sofort, dass $f(tx) = t^m f(x)$, wenn $x \in \mathbb{R}^p$ und $t \in \mathbb{R}$. Da es zu jedem $x \in \mathbb{R}^p$ ein $y \in S^{p-1}$ und ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = ty$ gibt, sind insbesondere homogene Polynome durch ihre Werte auf S^{p-1} festgelegt.

   Erfüllt f umgekehrt $f(tx) = t^m f(x)$, so folgt aus (4.1) und der Tatsache, dass die Koeffizienten von Polynomem in $t \in \mathbb{R}$ eindeutig durch ihre Funktionswerte bestimmt sind, dass $p_k = 0$ für $k \neq m$. Insbesondere ist dann $f = p_m$ ein homogenes Polynom vom Grad m.

3. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ ist die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ immer C^∞, wobei für $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ immer $D^\beta x^\alpha = 0$, wenn $\beta \not\leq \alpha$, also insbesondere für $|\beta| > |\alpha|$.

4. Ist $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$ mit $\beta \leq \alpha$, so gilt
$$D^\beta x^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta},$$
wobei $\alpha - \beta \in \mathbb{N}_0^p$ komponentenweise berechnet wird.

5. Insbesondere gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$ immer
$$D^\beta x^\alpha\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & , \alpha \neq \beta \\ \alpha! & , \alpha = \beta \end{cases}.$$

6. Für ein Polynom $f(x)$ vom Grad $\leq m$ gilt daher immer $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0)$, dh.
$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ |\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^p.$$
Insbesondere bestimmt $f|_G$ für jede noch so kleine Umgebung G von 0 die Koeffizienten von f und damit das Polynom f schon auf ganz $\mathbb{R}^p$.

7. Da mit f auch $x \mapsto f(x + a)$ für jedes feste $a \in \mathbb{R}^p$ ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist, folgt unmittelbar, dass auch
$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ |\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

4.2 Zerlegung von Polynomen

4.2.1 Satz. *Sei $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_p]$ ein Polynom vom Grad m. Dann gilt*

$$P[f|_{S^{p-1}}] = (1 - \|x\|^2)g + f,$$

wobei g ein Polynom vom Grad $\leq m-2$ ist.

Beweis. Gilt $m = 0$ oder $m = 1$, dann ist f bereits harmonisch. Damit ist $P[f|_{S^{p-1}}] = f$ und somit $g = 0$. Sei also o.B.d.A. $m \geq 2$.
Für jedes g ist $(1 - \|x\|^2)g = 0$ für $x \in S^{p-1}$. Daher müssen wir nur zeigen, dass es ein Polynom vom Grad $\leq m-2$ gibt, sodass

$$\Delta\Big((1 - \|x\|^2)g\Big) = -\Delta f.$$

Sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq m-2$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T(g) := \Delta\Big((1 - \|x\|^2)g\Big).$$

Für $g \in V$ hat $(1 - \|x\|^2)g$ Grad $\leq m$ und damit $T(g)$ Grad $\leq m-2$. Wir können also T als Abbildung von V nach V auffassen.
Wenn $T(g) = 0$ ist, dann ist $(1 - \|x\|^2)g$ harmonisch. Da $(1 - \|x\|^2)g$ auf S^{p-1} gleich Null ist, folgt aus dem Maximumsprinzip (Korollar 2.4.4), dass $(1 - \|x\|^2)g$ überall gleich Null ist. Also ist auch g identisch Null und somit T injektiv.
Da V endlichdimensional ist, ist T auch surjektiv. Weil $-\Delta f \in V$ ist, gibt es ein g mit $T(g) = -\Delta f$.

❑

4.2.2 Korollar. *Kein polynomielles Vielfaches von $\|x\|^2$ ist harmonisch, außer das Nullpolynom.*

Beweis. Sei $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_p]$, $f \neq 0$ ein Polynom vom Grad m. Angenommen $\|x\|^2 f$ ist harmonisch. Da $f|_{S^{p-1}} = (\|x\|^2 f)|_{S^{p-1}}$, folgt $P[f|_{S^{p-1}}] = \|x\|^2 f$. $\|x\|^2 f$ hat Grad $m+2$, aber $P[f|_{S^{p-1}}]$ hat nach Satz 4.2.1 höchstens Grad m. Ein Widerspruch.

❑

4.2.3 Definition. Wir bezeichnen den Vektorraum aller homogenen Polynome auf $\mathbb{R}^p$ vom Grad m mit $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$. Wir bezeichnen den Vektorraum aller harmonischen homogenen Polynome auf $\mathbb{R}^p$ vom Grad m mit $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$.

4.2.4 Bemerkung. Klarerweise gilt ($\bigoplus$ bezeichnet hier die direkte Summe)

$$\{f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_p] : \operatorname{grad}(f) \leq m\} = \bigoplus_{k=0}^{m} \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^p).$$

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x)$ mit $p_k \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^p)$. Sind alle p_k harmonisch, dann ist offensichtlich auch f harmonisch. Ist umgekehrt f harmonisch, dann gilt

$$0 = \Delta f(x) = \sum_{k=0}^{m} \Delta p_k(x).$$

Für $k \in \{0, 1\}$ gilt immer $\Delta p_k = 0$ und für $k \geq 2$ gilt $\Delta p_k \in \mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^p)$ (vgl. auch Fakta 4.1.2). Wegen dem ersten Teil der Bemerkung muss $\Delta p_k = 0$ gelten für $k = 2, \ldots, m$. Wir haben also

$$\{f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_p] : \mathrm{grad}(f) \leq m \wedge f \text{ harmonisch}\} = \bigoplus_{k=0}^{m} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^p)$$

gezeigt.

4.2.5 Proposition. *Sei $m \geq 2$, dann gilt*

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) \oplus \|x\|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p).$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$. Wegen Satz 4.2.1 gibt es ein Polynom g vom Grad $\leq m-2$ mit

$$f = P[f|_{S^{p-1}}] + \|x\|^2 g - g.$$

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung den homogenen Anteil vom Grad m abliest (siehe Bemerkung 4.2.4), erhält man

$$f = p_m + \|x\|^2 g_{m-2},$$

wobei $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ der homogene Anteil vom Grad m von $P[f|_{S^{p-1}}]$ ist und $g_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p)$ der homogene Anteil vom Grad $m-2$ von g ist. Also gilt

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) + \|x\|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p).$$

Wir müssen noch zeigen, dass die Summe direkt ist. Sei also $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ und $g_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p)$, sodass $p_m + \|x\|^2 g_{m-2} = 0$. Dann ist aber $\|x\|^2 \cdot (-g_{m-2}) = p_m$ harmonisch. Nach Korollar 4.2.2 ist p_m identisch Null und somit auch g_{m-2}.

❑

4.2.6 Bemerkung. Die Projektion von $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$ auf $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ mittels der Zerlegung aus Proposition 4.2.5 wird die *kanonische Projektion von $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$ auf $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$* genannt.

4.2.7 Satz. *Es gilt*

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \|x\|^{2j}\, \mathcal{H}_{m-2j}(\mathbb{R}^p).$$

Beweis. Wir machen eine Induktion nach m. Für $m = 0$ oder $m = 1$, gilt offensichtlich $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$. Sei also $m \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) &= \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) \oplus \|x\|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p) \\
&= \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) \oplus \|x\|^2 \left(\bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \|x\|^{2j}\, \mathcal{H}_{m-2-2j}(\mathbb{R}^p) \right) \\
&= \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) \oplus \bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} \|x\|^{2(j+1)}\, \mathcal{H}_{m-2(j+1)}(\mathbb{R}^p) \\
&= \bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} \|x\|^{2j}\, \mathcal{H}_{m-2j}(\mathbb{R}^p)
\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt dabei wegen Proposition 4.2.5 und die zweite wegen der Induktionsvoraussetzung.

❑

4.2.8 Bemerkung. Sei $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$. Nach Satz 4.2.7 gibt es $p_j \in \mathcal{H}_j(\mathbb{R}^p)$, sodass gilt

$$f = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \|x\|^{2j} p_{m-2j}.$$

Dann folgt

$$P[f|_{S^{p-1}}] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_{m-2j},$$

da die Funktion harmonisch ist und laut obiger Gleichung mit f auf S^{p-1} übereinstimmt.

4.2.9 Proposition. *Es gilt*

$$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \binom{p+m-1}{p-1}.$$

Beweis. Wir verwenden für den Beweis eine Methode aus der Diskreten Mathematik. Die Menge der Monome x^α, wobei α alle Multiindizes der Größe m durchläuft, bildet eine Basis von $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$. Wir müssen also die Mächtigkeit von $\{\alpha : |\alpha| = m\}$ bestimmen. Der m-te Koeffizient von $(\frac{1}{1-z})^p$ berechnet sich einerseits durch

$$\begin{aligned}
[z^m] \left(\frac{1}{1-z}\right)^p &= \sum_{k_1+\ldots+k_p=m} [z^{k_1}]\, \frac{1}{1-z} \cdot \ldots \cdot [z^{k_p}]\, \frac{1}{1-z} \\
&= \sum_{k_1+\ldots+k_p=m} 1 \\
&= |\{(k_1, \ldots, k_p) : k_1 + \ldots + k_p = m\}|.
\end{aligned}$$

Das ist genau unsere gesuchte Größe. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
[z^m] \left(\frac{1}{1-z}\right)^p &= [z^m]\, (1-z)^{-p} \\
&= [z^m] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-p}{n} (-z)^n \\
&= (-1)^m \binom{-p}{m} \\
&= (-1)^m \frac{(-p) \cdot (-p-1) \cdot \ldots \cdot (-p-(m-1))}{m!} \\
&= \frac{p \cdot (p+1) \cdot \ldots \cdot (p+(m-1))}{m!} \\
&= \binom{p+m-1}{m}.
\end{aligned}$$

❑

4.2.10 Korollar. *Sei $m \geq 2$, dann gilt*

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) = \binom{p+m-1}{p-1} - \binom{p+m-3}{p-1}.$$

Beweis. Wegen Proposition 4.2.5 gilt $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p) = \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p) + \dim \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^p)$. Die Aussage des Korollars folgt nun aus Proposition 4.2.9.

❑

4.2.11 Bemerkung. Klarerweise gilt $\dim \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^p) = \dim \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^p) = 1$ und $\dim \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^p) = \dim \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^p) = p$.

4.3 Zerlegung von $L^2(S^{p-1})$

In diesem Abschnitt betrachten wir den reellen Hilbertraum

$$L^2(S^{p-1}) = \{f : S^{p-1} \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \int_{S^{p-1}} f^2 \, d\sigma < +\infty\}.$$

Auf diesem Raum ist ein Skalarprodukt definiert

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^{p-1}} fg \, d\sigma.$$

4.3.1 Definition. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_m(S^{p-1}) := \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)|_{S^{p-1}}$ die Menge aller Einschränkungen auf S^{p-1} von homogenen Polynomen vom Grad m.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_m(S^{p-1}) := \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)|_{S^{p-1}}$ die Menge aller Einschränkungen auf S^{p-1} von harmonischen homogenen Polynomen vom Grad m. $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ wird Vektorraum aller *Kugelfunktionen* vom Grad m genannt.

4.3.2 Bemerkung. Kennt man von einem homogenen Polynom den Homogenitätsgrad und die Werte auf S^{p-1}, dann kennt man es bereits auf ganz $\mathbb{R}^p$. Somit gilt $\mathcal{P}_m(S^{p-1}) \cong \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$ und $\mathcal{H}_m(S^{p-1}) \cong \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$.

Kennt man den Homogenitätsgrad nicht, ist ein allgemeines homogenes Polynom noch nicht durch die Werte auf S^{p-1} bestimmt. Zum Beispiel ist $\|x\|^{2m}|_{S^{p-1}} \equiv 1$ für alle $m \geq 0$. Bei harmonischen Polynomen ist die Situation anders. Wenn zwei harmonische Polynome auf S^{p-1} übereinstimmen folgt aus dem Maximumsprinzip, dass sie sogar auf $K_1(0)$ gleich sind. Wegen Fakta 4.1.2 (6) müssen sie damit auf ganz $\mathbb{R}^p$ übereinstimmen. Insbesondere gilt

$$\operatorname{span}\left(\bigcup_{j \neq m} \mathcal{H}_j(S^{p-1})\right) \cap \mathcal{H}_m(S^{p-1}) = \{0\}.$$

4.3.3 Bemerkung. Wegen der Tatsache $\|x\|^2 = 1$ für alle $x \in S^{p-1}$, Satz 4.2.7 und Bemerkung 4.3.2 gilt

$$\mathcal{P}_m(S^{p-1}) = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \mathcal{H}_{m-2j}(S^{p-1}).$$

In der nächsten Proposition werden wir sehen, dass diese Zerlegung sogar orthogonal ist.

4.3.4 Proposition. *Sei $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$ und $g \in \mathcal{H}_n(S^{p-1})$, wobei $m \neq n$. Dann sind f und g orthogonal, d.h. $\langle f, g \rangle = 0$.*

Beweis. Aus dem Greenschen Integralsatz (Satz 2.1.8) folgt

$$\int_{S^{p-1}} f(y)\frac{\partial g}{\partial \nu(y)}(y) - g(y)\frac{\partial f}{\partial \nu(y)}(y)\, d\sigma(y) = 0.$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial \nu(y)}(y) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(y+ty) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (1+t)^m f(y) = mf(y)$$

bzw.

$$\frac{\partial g}{\partial \nu(y)}(y) = ng(y)$$

und erhalten damit

$$(n-m)\int_{S^{p-1}} fg\, d\sigma = 0.$$

Aus $n \neq m$ folgt $\langle f, g\rangle = 0$.

❑

An dieser Stelle brauchen wir einen bekannten Satz über Hilberträume.

4.3.5 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und H_j eine Folge von Teilmengen, sodass gilt:*

- *H_j ist ein abgeschlossener Unterraum für alle j.*
- *Die H_j sind paarweise orthogonal.*
- *Die Lineare Hülle von $\bigcup_j H_j$ ist dicht in H.*

Dann gibt es für jedes $x \in H$ eindeutige $x_j \in H_j$, sodass $x = \sum_j x_j$ gilt. In diesem Fall sagt man, H ist die direkte Summe der H_j und schreibt $H = \bigoplus_j H_j$.

4.3.6 Satz. *Es gilt*

$$L^2(S^{p-1}) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j(S^{p-1}).$$

Beweis. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 4.3.5. Da die $\mathcal{H}_j(S^{p-1})$ endlichdimensionale Unterräume sind, sind sie abgeschlossen. Die Orthogonalität haben wir bereits in Proposition 4.3.4 gesehen.
Wegen Bemerkung 4.3.3 gilt $\operatorname{span}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j(S^{p-1})\right) = \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{P}_j(S^{p-1})\right) = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_p]|_{S^{p-1}}$. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass liegt die Menge aller Polynome eingeschränkt auf S^{p-1} dicht im Raum aller stetigen Funktionen auf S^{p-1} bezüglich der Supremumsnorm. Damit liegen sie auch dicht bezüglich der $L^2(S^{p-1})$ Norm, da diese in einem endlichen Maßraum schwächer als die Supremumsnorm ist. Die stetigen Funktionen wiederum liegen dicht in $L^2(S^{p-1})$ bezüglich der $L^2(S^{p-1})$ Norm. Insgesamt erhalten wir, dass die Lineare Hülle von $\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j(S^{p-1})$ dicht in $L^2(S^{p-1})$ bezüglich der $L^2(S^{p-1})$ Norm ist.

❑

4.3.7 Beispiel. Wir wollen den vorangegangenen Satz für den Fall $p = 2$ verdeutlichen. Da z^m holomorph ist, sind $\operatorname{Re}(z^m), \operatorname{Im}(z^m) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$. Aus Korollar 4.2.10 bzw. Bemerkung 4.2.11 wissen wir, dass $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ zweidimensional ist für $m \geq 1$. Also ist $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\{\operatorname{Re}(z^m), \operatorname{Im}(z^m)\}$. Wenn wir S^1 mit $[0, 2\pi)$ mittels der Abbildung $t \mapsto (cos(\vartheta), sin(\vartheta))^T$ identifizieren, erhalten wir $\mathcal{H}_m(S^1) \cong \operatorname{span}\{\cos(m\vartheta), \sin(m\vartheta)\}$. Das heißt im Fall $p = 2$ liefert der vorangegangene Satz die klassische Fourierreihenentwicklung.

4.4 Zonale Kugelfunktionen

Für ein festes $x \in S^{p-1}$ betrachten wir das Funktional $\Lambda : \mathcal{H}_m(S^{p-1}) \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda(f) = f(x)$. Da $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum ist, lässt sich jedes Funktional eindeutig darstellen als Skalarprodukt mit einem festen Element aus $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$. Also gibt es eine eindeutige Funktion $Z_m(x, \,.\,) \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$, sodass für alle $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$ gilt

$$f(x) = \Lambda(f) = \langle f, Z_m(x, \,.\,)\rangle = \int\limits_{S^{p-1}} f(y)\, Z_m(x, y)\, d\sigma(y). \tag{4.2}$$

4.4.1 Definition. Wir nennen die Funktion $Z_m(x, \,.\,) \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$, die durch (4.2) definiert ist, die *zonale Kugelfunktion* vom Grad m mit Pol x.

4.4.2 Beispiel. Im Fall $p = 2$ können wir $Z_m(x, y)$ explizit berechnen. Klarerweise ist $Z_0 = 1$. Sei also $m \geq 1$. In Beispiel 4.3.7 haben wir gesehen, dass $\mathcal{H}_m(S^1) \cong \operatorname{span}\{\cos(m\vartheta), \sin(m\vartheta)\}$. Also gibt es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$Z_m(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = a\cos(m\vartheta) + b\sin(m\vartheta).$$

Es muss gelten

$$\begin{aligned}\cos(m\varphi) &= \langle \cos(m\,.\,), Z_m(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \,.\,)\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(m\vartheta)\cdot[a\cos(m\vartheta) + b\sin(m\vartheta)]\; d\vartheta \\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

Analog berechnet man $b = 2\sin(m\varphi)$. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}Z_m(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) &= 2\cos(m\varphi)\cos(m\vartheta) + 2\sin(m\varphi)\sin(m\vartheta) \\ &= 2\cos(m(\vartheta - \varphi)).\end{aligned}$$

4.4.3 Bemerkung. Sei $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ orthogonal und $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$. Da Ux in jeder Komponente ein homogenes Polynom vom Grad 1 ist, ist $f(Ux)$ wieder in $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^p)$ (Homogenitätsgrade multiplizieren sich beim Einsetzen). Ist f sogar harmonisch, so haben wir in Bemerkung 1.1.13 gesehen, dass dann $f \circ U$ ebenfalls harmonisch ist. Also ist $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ invariant unter orthogonalen Transformationen. Da ein orthogonales U die Norm erhält, gilt $U(S^{p-1}) = S^{p-1}$. Somit ist auch $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ invariant unter orthogonalen Transformationen.

4.4.4 Proposition. *Seien $x, y \in S^{p-1}$, dann gilt:*

(i) $Z_m(x, y) = Z_m(y, x)$.

(ii) $Z_m(Ux, y) = Z_m(x, U^{-1}y)$ *für alle orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$.*

(iii) $Z_m(x, x) = \dim \mathcal{H}_m(S^{p-1})$.

(iv) $|Z_m(x, y)| \leq \dim \mathcal{H}_m(S^{p-1})$.

Beweis. ad (i): Sei $k = \dim \mathcal{H}_m(S^{p-1})$ und $e_1, \dots e_k$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$.

$$Z_m(x,\ .\ ) = \sum_{j=1}^{k} \langle Z_m(x,\ .\ ), e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^{k} e_j(x) e_j$$

Also folgt

$$Z_m(x,y) = \sum_{j=1}^{k} e_j(x) e_j(y) = \sum_{j=1}^{k} e_j(y) e_j(x) = Z_m(y,x). \tag{4.3}$$

ad (ii): Sei $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f, Z_m(Ux,\ .\ )\rangle &= f(Ux) \\
&= (f \circ U)(x) \\
&= \int_{S^{p-1}} (f \circ U)(y) Z_m(x,y)\, d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{p-1}} f(y) Z_m(x, U^{-1}y)\, d\sigma(y) \\
&= \langle f, Z_m(x, U^{-1}\ .\ )\rangle
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ und σ invariant unter orthogonalen Transformationen sind (siehe Bemerkung 4.4.3).
ad (iii): Wegen Punkt (ii) gilt für alle orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$

$$Z_m(Ux, Ux) = Z_m(x,x).$$

Da man je zwei Punkte in S^{p-1} durch eine orthogonale Transformation ineinander überführen kann, ist die Funktion $x \mapsto Z_m(x,x)$ konstant. Wegen (4.3) gilt

$$Z_m(x,x) = \sum_{j=1}^{k} e_j(x)^2.$$

Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung integrieren, erhalten wir

$$Z_m(x,x) = \int_{S^{p-1}} Z_m(y,y)\, d\sigma(y) = \int_{S^{p-1}} \sum_{j=1}^{k} e_j(y)^2\, d\sigma(y) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, e_j\rangle = k.$$

ad (iv): Es gilt wegen (iii)

$$\|Z_m(x,\ .\ )\|_2^2 = \langle Z_m(x,\ .\ ), Z_m(x,\ .\ )\rangle = Z_m(x,x) = \dim \mathcal{H}_m(S^{p-1}).$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|Z_m(x,y)| = |\langle Z_m(\ .\ ,y), Z_m(x,\ .\ )\rangle| \le \|Z_m(\ .\ ,y)\|_2\ \|Z_m(x,\ .\ )\|_2 = \dim \mathcal{H}_m(S^{p-1}).$$

❑

4.4.5 Satz. *Sei $f \in L^2(S^{p-1})$ und sei $p_m \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$ die orthogonale Projektion von f auf $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$. Dann gilt*

$$p_m(x) = \langle f, Z_m(x,\ .\ )\rangle.$$

Beweis. Nach Satz 4.3.6 können wir f eindeutig schreiben als

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

mit $p_j \in \mathcal{H}_j(S^{p-1})$, wobei die Reihe in der $L^2(S^{p-1})$ Norm konvergiert.

$$\langle f, Z_m(x,\ .\ )\rangle = \langle \sum_{j=0}^{\infty} p_j, Z_m(x,\ .\ )\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle p_j, Z_m(x,\ .\ )\rangle = \langle p_m, Z_m(x,\ .\ )\rangle = p_m(x)$$

In der vorletzten Gleichheit haben wir ausgenützt, dass $Z_m(x,\ .\ )$ in $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ ist und die $\mathcal{H}_j(S^{p-1})$ paarweise orthogonal sind.

❑

4.5 Eine Entwicklung des Poisson Kerns

4.5.1 Bemerkung. Sei $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$, dann können wir f eindeutig zu einem Element aus $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ fortsetzen. Wir werden nicht streng zwischen der Funktion f und seiner Fortsetzung unterscheiden. Insbesondere betrachten wir auch $Z_m(\ .\ , y)$ für ein festes $y \in S^{p-1}$ als Element von $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$. Wir wollen jetzt zeigen, dass sich Gleichung (4.2) auf ganz $\mathbb{R}^p$ erweitern lässt. Dazu sei zunächst $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

$$f(x) = \|x\|^m f(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\|^m \int_{S^{p-1}} f(y)\, Z_m(\frac{x}{\|x\|}, y)\, d\sigma(y) = \int_{S^{p-1}} f(y)\, Z_m(x,y)\, d\sigma(y) \quad (4.4)$$

Die Darstellung $Z_m(x,y) = \sum_{j=1}^{k} e_j(x)e_j(y)$ wie in (4.3) gilt auch für alle $x \in \mathbb{R}^p$. Daraus sehen wir, dass Z_m auf $K_1(0) \times S^{p-1}$ stetig und damit beschränkt ist. Somit ist der letzte Ausdruck in (4.4) stetig in x. Da f ebenfalls stetig ist, stimmen der erste und der letzte Ausdruck in (4.4) auch bei $x = 0$ überein.

4.5.2 Satz. *Sei f ein Polynom auf $\mathbb{R}^p$ vom Grad $\leq m$. Dann gilt*

$$P[f|_{S^{p-1}}](x) = \sum_{j=0}^{m} \int_{S^{p-1}} f(y)\, Z_j(x,y)\, d\sigma(y),$$

für alle $x \in U_1(0)$.

Beweis. Wegen Satz 4.2.1 ist $P[f|_{S^{p-1}}]$ wieder ein Polynom mit Grad $\leq m$. Wir können also schreiben

$$P[f|_{S^{p-1}}] = \sum_{j=0}^{m} p_j,$$

wobei $p_j \in \mathcal{H}_j(\mathbb{R}^p)$. Für alle $x \in U_1(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^{p-1}} f(y)\, Z_k(x,y)\, d\sigma(y) &= \int_{S^{p-1}} \sum_{j=0}^{m} p_j(y)\, Z_k(x,y)\, d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{p-1}} p_k(y)\, Z_k(x,y)\, d\sigma(y) \\
&= p_k(x).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Gleichheit verwendet, dass f und $P[f|_{S^{p-1}}]$ auf S^{p-1} übereinstimmen. In der zweiten Gleichheit haben wir die Orthogonalität von Kugelfunktionen ausgenützt und in der dritten Gleichheit haben wir (4.4) ausgenützt. Summieren liefert die gewünschte Aussage.

❑

4.5.3 Satz. *Für alle $x \in U_1(0)$ gilt*

$$\wp(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(x, y).$$

Dabei konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf allen Mengen der Form $K \times S^{p-1}$ mit $K \subseteq U_1(0)$ kompakt.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Konvergenzeigenschaften. Sei zunächst $x, y \in S^{p-1}$. Nach Proposition 4.4.4 (iv) gilt $|Z_j(x, y)| \leq \dim \mathcal{H}_j(S^{p-1})$. Wegen Korollar 4.2.10 können wir abschätzen

$$|Z_j(x, y)| \leq \binom{p + j - 1}{p - 1} \leq (p + j - 1)^{p-1} \leq C j^{p-1},$$

wobei $C \geq 0$ nicht von j abhängt. Für ein $x \in U_1(0)$ erhalten wir also die Abschätzung (vgl. Bemerkung 4.5.1)

$$Z_j(x, y) \leq C j^{p-1} \|x\|^j. \tag{4.5}$$

Da jedes kompakte $K \subseteq U_1(0)$ sogar $K \subseteq U_r(0)$ mit einem $r < 1$ erfüllt, erhalten wir aus dem Weierstraß Kriterium die gewünschten Konvergenzeigenschaften, da wir $C j^{p-1} r^j$ als Majorante verwenden können.
Sei $x \in U_1(0)$ fest. Aus den bewiesenen Konvergenzeigenschaften, Satz 4.5.2, der Orthogonalität von Kugelfunktionen und Bemerkung 4.3.3 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{S^{p-1}} f(y) \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(x, y)\, d\sigma(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S^{p-1}} f(y) Z_j(x, y)\, d\sigma(y) \\
&= \sum_{j=0}^{\mathrm{grad}(f)} \int_{S^{p-1}} f(y) Z_j(x, y)\, d\sigma(y) \\
&= P[f|_{S^{p-1}}](x) \\
&= \int_{S^{p-1}} f(y) \wp(x, y)\, d\sigma(y)
\end{aligned}$$

für jedes Polynom f. Da die Polynome dicht im $L^2(S^{p-1})$ liegen, folgt $\wp(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(x, y)$ für fast alle $y \in S^{p-1}$. Da beide Funktionen stetig sind, muss die Gleichheit sogar für alle $y \in S^{p-1}$ gelten.

❑

4.6 Eine geometrische Charakterisierung

4.6.1 Definition. Wir nennen eine Funktion $f : S^{p-1} \to \mathbb{R}$ *zonal* mit Pol $x \in S^{p-1}$, wenn f konstant auf $H \cap S^{p-1}$ für jede zu x orthogonale affine Hyperebene H ist.

4.6.2 Proposition. *Sei $x \in S^{p-1}$. $Z_m(x, \ . \ )$ ist zonal mit Pol x.*

Beweis. Sei H eine zu x orthogonale affine Hyperebene und $y, z \in H \cap S^{p-1}$, dh. $\langle y, x\rangle = \langle z, x\rangle$ und $\|y\| = \|z\| = 1$. Bezeichne mit $\pi : \mathbb{R}^p \to x^\perp$ die orthogonale Projektion auf $x^\perp$, d.h.

$$\pi(w) = w - \langle w, x\rangle x.$$

Wegen $\|\pi(y)\| = \|\pi(z)\|$ gibt es eine orthogonale Abbildung $T : x^\perp \to x^\perp$, mit $T(\pi(y)) = \pi(z)$. Definiere $U : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ durch

$$U(w) := T(\pi(w)) + \langle w, x\rangle x.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass U orthogonal ist, wobei $U(x) = x$ und $U(y) = z$. Mit Proposition 4.4.4 (ii) folgt

$$Z_m(x, z) = Z_m(Ux, z) = Z_m(x, U^{-1}z) = Z_m(x, y).$$

❑

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass $Z_m(x, \ . \ )$ bis auf Skalierung die einzige zonale Funktion mit Pol $x \in S^{p-1}$ in $\mathcal{H}_m(S^{p-1})$ ist.

4.6.3 Definition. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *radial*, wenn f konstant auf rS^{p-1} für alle $r \geq 0$ ist.

4.6.4 Lemma. *Sei f ein Polynom vom Grad m auf $\mathbb{R}^p$. f ist genau dann radial, wenn m gerade ist und f die Form*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} c_j \|x\|^{2j}$$

hat.

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathcal{P}_j(\mathbb{R}^p)$ und radial. Auf S^{p-1} nimmt f den konstanten Wert c an. Wegen der Homogenität folgt $f(x) = c\|x\|^j$. Damit f ein Polynom ist, muss entweder $c = 0$ oder j gerade sein.
Sei f jetzt ein beliebiges radiales Polynom vom Grad m. Wir schreiben f als $f = \sum_{j=0}^m p_j$. Da f radial ist, folgt $f \circ U = f$ für alle orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

$$\sum_{j=0}^m p_j = f = f \circ U = \sum_{j=0}^m p_j \circ U$$

Wegen $p_j \circ U \in \mathcal{P}_j(\mathbb{R}^p)$ folgt $p_j = p_j \circ U$. Weil das für alle orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ gilt, sind alle p_j radial. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass f die gewünschte Form hat.
Die umgekehrte Richtung ist trivial.

❑

4.6.5 Lemma. *Sei h ein harmonisches Polynom auf $\mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}$ und $h(\ . \ , y)$ radial für alle $y \in \mathbb{R}$. Sei weiters $h(0, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, dann folgt $h \equiv 0$.*

Beweis. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ wenden wir Lemma 4.6.4 auf $h(\,.\,,y)$ an und erhalten

$$h(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{p-1}} \sum_{k=0}^{\infty} c_{\alpha,k} x^\alpha y^k = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{p-1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{\alpha,k} y^k\right) x^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(y)\, \|x\|^{2j}.$$

Dabei sind alle auftretenden Summen eigentlich endlich.

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta h(x,y) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Delta(c_j(y)\,\|x\|^{2j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j''(y)\,\|x\|^{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} 2j(2j+p-3)\, c_j(y)\,\|x\|^{2(j-1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[c_j''(y) + 2(j+1)(2j+p-1)\, c_{j+1}(y)\Big]\, \|x\|^{2j} \end{aligned}$$

Also folgt $c_j''(y) + 2(j+1)(2j+p-1)\, c_{j+1}(y) = 0$ für alle $j \geq 0$. Außerdem ist $c_0(y) = h(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ laut Voraussetzung. Mit vollständiger Induktion folgt $c_j \equiv 0$ für alle $j \geq 0$ und damit $h \equiv 0$.

❑

4.6.6 Bemerkung. Lemma 4.6.5 kann folgendermaßen umformuliert werden. Die lineare Abbildung $h \mapsto h(0,\,.\,)$ ist injektiv auf der Menge

$$\Big\{h : \mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid h \text{ harmonisches Polynom} \wedge h(\,.\,,y) \text{ radial } \forall y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

4.6.7 Satz. *Sei $x \in S^{p-1}$ und $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$. Dann ist f genau dann zonal mit Pol x, wenn f ein skalares Vielfaches von $Z_m(x,\,.\,)$ ist.*

Beweis. Wir haben bereits in Proposition 4.6.2 gesehen, dass $Z_m(x,\,.\,)$ und damit jedes skalare Vielfache zonal mit Pol x ist.
Sei also $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$ zonal mit Pol x. Da $H_0(S^{p-1}) = \operatorname{span}\{1\}$ ist, können wir o.B.d.A. $m \geq 1$ annehmen. Sei zunächst $x = e_p$, wobei e_p der p-te kanonische Basisvektor ist. Sei $(s,t) \in \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}$. Für $(s,t) \in S^{p-1}$ und $T \in \mathbb{R}^{(p-1)\times(p-1)}$ orthogonal gilt

$$f(Ts,t) = f(s,t).$$

Wegen der Homogenität von f gilt die Gleichung sogar für alle $(s,t) \in \mathbb{R}^p$. Also ist $f(\,.\,,t)$ radial für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit dem gleichen Argument ist auch $Z_m\big(e_p,(\,.\,,t)\big)$ radial für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt

$$f(0,t) = f(te_p) = t^m f(e_p) = c\, t^m Z_m(e_p,e_p) = c\, Z_m(e_p,te_p) = c\, Z_m\big(e_p,(0,t)\big),$$

wobei $c = \frac{f(e_p)}{\dim \mathcal{H}_m(S^{p-1})}$ ist. Nach Bemerkung 4.6.6 ist $f = c\, Z_m$.
Für ein beliebiges $x \in S^{p-1}$ wähle ein orthogonales $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ mit $Ux = e_p$. Dann ist $f \circ U$ zonal mit Pol e_p. Also ist $f \circ U$ ein skalares Vielfaches von $Z_m(e_p,\,.\,)$ bzw. f ein skalares Vielfaches von $Z_m(e_p, U^{-1}\,.\,)$. Nach Proposition 4.4.4 (ii) gilt schließlich $Z_m(e_p,U^{-1}\,.\,) = Z_m(Ue_p,\,.\,) = Z_m(x,\,.\,)$.

❑

Kapitel 5

Analytische Funktionen

5.1 Reihen

In diesem Abschnitt sei A eine höchstens abzählbare Menge. Die Menge $E(A)$ aller endlichen Teilmengen von A zusammen mit $\subseteq$ bildet eine gerichtete Menge. Für $\lim_{E\in E(A)} x_E$ schreiben wir auch $\lim_{E\subseteq A} x_E$.

5.1.1 Definition. Für $c_\alpha \in [0, +\infty], \alpha \in A$ definieren wir

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha := \lim_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha \in [0, +\infty].$$

Sei X ein Banachraum und $c_\alpha \in X, \alpha \in A$. Falls $\sum_{\alpha\in A} \|c_\alpha\| < +\infty$ sagen wir, dass die Reihe $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$ absolut konvergiert und definieren

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha := \lim_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha \in X.$$

5.1.2 Bemerkung.

(i) Für $c_\alpha \in [0, +\infty], \alpha \in A$ ist das Netz $\lim_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha$ monoton steigend. Falls $(\sum_{\alpha\in E} c_\alpha)_{E\subseteq A}$ beschränkt ist, konvergiert es wegen den Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gegen $\sup_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha$. Falls $(\sum_{\alpha\in E} c_\alpha)_{E\subseteq A}$ unbeschränkt ist, konvergiert das Netz gegen $+\infty$, also ebenfalls gegen $\sup_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha$.

(ii) Sei X ein Banachraum und $c_\alpha \in X, \alpha \in A$ und sei $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$ absolut konvergent. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $E_0 \subseteq A$, sodass

$$\sum_{\alpha\in A\setminus E_0} \|c_\alpha\| < \varepsilon.$$

Damit folgt für zwei endliche Mengen $E_1, E_2 \supseteq E_0$, dass

$$\|\sum_{\alpha\in E_1} c_\alpha - \sum_{\alpha\in E_2} c_\alpha\| = \|\sum_{\alpha\in E_1\setminus E_2} c_\alpha - \sum_{\alpha\in E_2\setminus E_1} c_\alpha\| \leq \sum_{\alpha\in E_1\Delta E_2} \|c_\alpha\| \leq \sum_{\alpha\in A\setminus E_0} \|c_\alpha\| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha$ ein Cauchy-Netz und wegen der Vollständigkeit von X konvergent.

Sei weiterhin X ein Banachraum und $c_\alpha \in X, \alpha \in A$.

(iii) Falls A eine endliche Menge ist, hat die gerichtete Menge $\langle E(A), \subseteq\rangle$ ein größtes Element und zwar A. Damit ist $\lim_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha$.

(iv) Sei τ eine Anordnung von A, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach A. Die Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{n} c_{\tau(k)} = \sum_{\alpha\in\{\tau(1),\dots,\tau(n)\}} c_\alpha$$

ist ein Teilnetz von $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$. Also folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$ die (gewöhnliche) absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\tau(k)}$ und zwar gegen den selben Grenzwert. Im Falle der absoluten Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\tau(k)}$ folgt aus (i) und der Tatsache, dass jede endliche Teilmenge von A in einer Menge der Bauart $\{\tau(1), \dots, \tau(n)\}$ enthalten ist, die absolute Konvergenz von $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$. Nach dem vorigen Argument stimmen die Grenzwerte wieder überein.

5.1.3 Satz. *Sei $A_i, i \in I$ eine Partition von A in höchstens abzählbar viele Mengen.*

(i) Sei $c_\alpha \in [0, +\infty], \alpha \in A$, dann gilt

$$\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha.$$

(ii) Sei X ein Banachraum und $c_\alpha \in X, \alpha \in A$. Dann konvergiert $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha$ genau dann absolut, wenn $\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| < +\infty$. In diesem Fall gilt

$$\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha.$$

Beweis. (i) folgt direkt aus Bemerkung 5.1.2 (i), dem Satz über iterierte Suprema und der Tatsache, dass $\sup_{m\in M} a_m + \sup_{n\in N} b_n = sup_{(m,n)\in M\times N}\, a_m + b_n$.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha &= \sup_{J\subseteq I} \sum_{i\in J} \sup_{E_i\subseteq A_i} \sum_{\alpha\in E_i} c_\alpha \\ &= \sup_{J\subseteq I} \sup_{E_i\subseteq A_i,\, i\in J} \sum_{i\in J} \sum_{\alpha\in E_i} c_\alpha \\ &= \sup_{J\subseteq I} \sup_{E\subseteq \bigcup_{i\in J} A_i} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha \\ &= \sup_{E\subseteq A} \sum_{\alpha\in E} c_\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\end{aligned}$$

ad (ii): Der erste Teil der Aussage folgt aus (i). Für den zweiten Teil bemerken wir zunächst, dass wegen $\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| < +\infty$ auch $\sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| < +\infty,\ i \in I$ und somit $\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha$ für alle $i \in I$ absolut konvergiert. Außerdem ist wegen $\sum_{i\in I} \|\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha\| \leq \sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| < +\infty$ auch die Reihe $\sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha$ absolut konvergent.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $E \subseteq A$ endlich, sodass $\sum_{\alpha\in A\setminus E} \|c_\alpha\| < \varepsilon$. Wähle $J \subseteq I$ endlich, sodass $\sum_{i\in I\setminus J} \sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| < \varepsilon$ und $E \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$. Wähle für alle $i \in J$

ein endliches $E_i \subseteq A_i$, sodass $\sum_{\alpha\in A_i\setminus E_i} \|c_\alpha\| < \frac{\varepsilon}{|J|}$ für alle $i \in J$ und $E \subseteq \bigcup_{i\in J} E_i$. Jetzt können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
& \|\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha - \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\| \\
\leq\ & \|\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha - \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha\| + \|\sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i} c_\alpha - \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in E_i} c_\alpha\| + \|\sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in E_i} c_\alpha - \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\| \\
\leq\ & \sum_{i\in I\setminus J}\sum_{\alpha\in A_i} \|c_\alpha\| + \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i\setminus E_i} \|c_\alpha\| + \sum_{\alpha\in A\setminus E} \|c_\alpha\| \\
<\ & \varepsilon + |J| \cdot \frac{\varepsilon}{|J|} + \varepsilon \\
=\ & 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

❑

5.1.4 Fakta.

(i) Sei B eine weitere abzählbare Menge. Im Sinne von Satz 5.1.3 erhalten wir als Korollar
$$\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} c_{\alpha,\beta} = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} c_{\alpha,\beta} = \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}$$

(ii) Sei $A = \mathbb{N}_0^p$ und π eine Permutation von $\{1,\dots,p\}$. Im Sinne von Satz 5.1.3 erhalten wir als Korollar
$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha = \sum_{k_1\in\mathbb{N}_0} \dots \sum_{k_p\in\mathbb{N}_0} c_{k_{\pi(1)},\dots,k_{\pi(p)}}.$$

(iii) Sei $A = \mathbb{N}_0^p$. Im Sinne von Satz 5.1.3 erhalten wir als Korollar
$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha.$$

(iv) Ist X eine Banach-Algebra und hat man p-viele absolut konvergente Reihen $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{1,k}$ bis $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{p,k}$ und setzt man für $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) = \alpha \in \mathbb{N}_0^p$ $c_\alpha := a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{p,\alpha_p}$, so folgt aus (ii) unmittelbar, dass dann $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha$ absolut konvergiert, wobei
$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{1,k} \cdot \ldots \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{p,k}$$

(v) Offensichtlich gilt das Majorentenkriterium: Gilt $\|d_\alpha\| \leq c_\alpha \in [0,+\infty)$, so folgt aus $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha < +\infty$, dass $\sum_{\alpha\in A} d_\alpha$ in X absolut konvergiert.

(vi) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $X = C(M,\mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm. Sind dann $f_\alpha \in X$, $\alpha \in A$, sodass $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ absolut konvergiert, so sagen wir, dass die Funktionenreihe $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ auf M absolut konvergiert.

In dem Fall folgt wegen $|f_\alpha(x)| \leq \|f_\alpha\|_\infty$ für jedes $x \in M$ die absolute Konvergenz von $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$ in $\mathbb{R}$. Da das Punktauswerten stetig ist, ist der Grenzwert von $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ ($\in C(M,\mathbb{R})$) ausgewertet an einem $x \in M$ gerade der Grenzwert von $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$.

Insbesondere ist $x \mapsto \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$ stetig,und die Funktionenreihe $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ konvergiert gleichmäßig gegen diese Funktion.

5.2 Potenzreihen

Wir betrachten nun Potenzreihen $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ in p Variablen, wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ und $x \in \mathbb{R}^p$. Wir bezeichnen mit $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}^p$, sodass $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ in $\mathbb{R}$ absolut konvergiert. Offensichtlich ist immer $0 \in K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$.

Aus dem Majorentenkriterium Fakta 5.1.4 (v) folgt sofort, dass mit $y \in K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ auch $\overline{R(y)} \subseteq K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$, wobei

$$\overline{R(y)} := \{x \in \mathbb{R}^p : |x_j| \leq |y_j|,\ j = 1, \dots, p\}.$$

5.2.1 Beispiel. Ist $x \in \mathbb{R}^p$ mit $\max\{|x_j| : j = 1, \dots, p\} =: \|x\|_\infty < 1$, so folgt aus Fakta 5.1.4 (iv), angewandt auf $X = \mathbb{R}$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} x^\alpha = \frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_p)}.$$

Aus der Theorie der Potenzreihen in einer Variablen ist bekannt, dass für $|x_l| < 1$ die Reihe $\sum_{k=0}^\infty \frac{\partial^m}{\partial x_l^m} x_l^k = \frac{\partial^m}{\partial x_l^m} \frac{1}{1-x_l}$ auch absolut konvergiert für $l = 1, \dots, p$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Wenden wir nochmals Fakta 5.1.4 (iv) an, so gilt daher sogar

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} D^\beta x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ \alpha\geq\beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} = D^\beta \frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_p)}. \tag{5.1}$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^p$. Ist $x = (r, \dots, r)$, so folgt

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p,\ \alpha\geq\beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} r^{|\alpha|-|\beta|} = \left(D^\beta \frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_p)}\right)_{r=x_1=\dots=x_p}. \tag{5.2}$$

5.2.2 Lemma. *Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ sei $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Weiters sei $y \in \mathbb{R}^p$ mit $y_j \neq 0,\ j = 1, \dots, p$, so, dass die Menge $\{c_\alpha\, y^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^p\}$ beschränkt ist[1]. Dann konvergiert*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha,$$

für jedes x aus dem Rechteck

$$R(y) := \{x \in \mathbb{R}^p : |x_j| < |y_j|,\ j = 1, \dots, p\}.$$

Für jedes $r \in (0, 1)$ konvergiert die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ absolut als Funktionenreihe auf der Menge $rR(y)$ und daher absolut als Funktionenreihe auf jeder kompakten Teilmenge von $R(y)$.

Weiters liegt die Funktion $x \mapsto f(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ sogar in $C^\infty(R(y))$, wobei für $\beta \in \mathbb{N}_0^p$

$$D^\beta f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^\beta x^\alpha, \tag{5.3}$$

im gleichen Konvergenzsinne wie $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$.

[1] Insbesondere ist das der Fall, wenn $y \in K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$.

Beweis. Ist $|c_\alpha y^\alpha| \leq M$ und $r \in (0,1)$, so gilt für $x \in rR(y)$

$$|c_\alpha x^\alpha| = |c_\alpha y^\alpha| \cdot |\frac{x^\alpha}{y^\alpha}| \leq M \cdot r^{|\alpha|}.$$

Wegen Beispiel 5.2.1 konvergiert $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} r^{|\alpha|} = (1-r)^{-p}$ und wegen dem Majorantenkriterium auch $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$. Da diese Abschätzung unabhängig von $x \in rR(y)$ ist, konvergiert diese Reihe absolut als Funktionenreihe auf der Menge $rR(y)$. Insbesondere ist f auf dieser Menge stetig. Da $r \in (0,1)$ beliebig war, ist f auf ganz $R(y)$ stetig.

Ist $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ fest und $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ beliebig, so gilt $c_\alpha D^\beta x^\alpha = 0$, wenn $\beta \not\leq \alpha$. Anderenfalls gilt

$$|c_\alpha D^\beta x^\alpha| = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}|c_\alpha y^\alpha| \cdot |\frac{1}{y^\beta}| \cdot |\frac{x^{\alpha-\beta}}{y^{\alpha-\beta}}| \leq |\frac{M}{y^\beta}| \cdot \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} r^{|\alpha|-|\beta|}.$$

Wegen (5.2) und wegen dem Majorantenkriterium konvergiert auch die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^\beta x^\alpha$ absolut. Wieder ist die Abschätzung unabhängig von $x \in rR(y)$. Also konvergiert auch diese Reihe absolut als Funktionenreihe auf der Menge $rR(y)$. Wie oben folgt auch, dass $x \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^\beta x^\alpha$ auf $R(y)$ stetig ist.

(5.3) samt $f \in C^m(R(y))$ beweisen wir durch Vollständige Induktion nach $m = |\beta|$. Wir wissen schon, dass $f \in C^0(R(y)) = C(R(y))$, womit der Induktionsanfang $|\beta| = 0$ erledigt ist.

Ist $|\beta| > 0$, so ist oBdA. $\beta_p > 0$. Wir betrachten $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^{\beta-(0,\dots,0,1)} x^\alpha$ und $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^\beta x^\alpha$ bei festgehaltenen ersten $p-1$ Variablen $x_1, \dots, x_{p-1}$ als Funktion von $x_p \in (-r|y_p|, +r|y_p|) \subseteq (-|y_p|, +|y_p|)$ mit $0 < r < 1$. Da beide Reihen gleichmäßig konvergieren, folgt aus dem entsprechenden Resultat für Funktionenfolgen (vgl. Bemerkung 5.1.2 (iv), abhängig von einer reellen Variablen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^{\beta-(0,\dots,0,1)} x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, D^\beta x^\alpha.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die linke Seite gerade $D^{\beta-(0,\dots,0,1)} f(x)$. Aus der Beliebigkeit von $r \in (0,1)$ folgt (5.3) und daher $f \in C^{|\beta|}(R(y))$.

❑

5.2.3 Lemma. *Sei $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ eine Potenzreihe, sodass $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ nichtleeres Inneres hat. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ auf allen kompakten Teilmengen von $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ absolut als Funktionenreihe.*

Beweis. Sei $K \subseteq K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ kompakt. Für jedes $x \in K$ gibt es ein $s_x > 1$, sodass $s_x x \in K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$. Wegen $x \in \frac{2}{s_x+1} R(s_x x)$ ist $\frac{2}{s_x+1} R(s_x x),\ x \in K$ eine offene Überdeckung von K. Da die Potenzreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ auf allen diesen Rechtecken absolut als Funktionenreihe konvergiert (siehe Lemma 5.2.2) und bereits endlich viele dieser Rechtecke ausreichen um K zu überdecken, konvergiert $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ auch auf K absolut als Funktionenreihe.

❑

5.2.4 Bemerkung. Im Gegensatz zu Potenzreihen, die nur von einer Variablen abhängen, lässt sich die Menge aller $x \in \mathbb{R}^p$, für die die Potenzreihe konvergiert, nicht durch einen Konvergenzradius genau beschreiben.

Wir können wegen Lemma 5.2.2 und Lemma 5.2.3 aber sagen, dass wenn $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ zumindest einen Punkt x mit $x_j \neq 0,\ j = 1, \dots, p$ enthält, $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ nicht leer ist und 0 enthält. Die Potenzreihe konvergiert dann auf allen kompakten Teilmengen von $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ absolut als Funktionenreihe und stellt auf $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ eine C^∞-Funktion dar, wobei dort (5.3) gilt. Somit gilt auch

$$c_\alpha = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}.$$

5.2.5 Bemerkung. Für zwei Potenzreihen $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\ x^\alpha$ und $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} d_\alpha\ x^\alpha$ mit $x \in K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p}) \cap K((d_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ folgt aus Satz 5.1.3 (vgl. auch Fakta 5.1.4)

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\ x^\alpha \cdot \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} d_\alpha\ x^\alpha = \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{N}_0^p\times\mathbb{N}_0^p} c_{\beta_1} \cdot d_{\beta_2}\ x^{\beta_1+\beta_2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \left(\sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha} c_{\beta_1} \cdot d_{\beta_2} \right) x^\alpha,$$

wobei die erhaltene Reihe wieder absolut konvergiert.

5.2.6 Lemma. *Ist $f(t) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n t^n$ eine relle Potenzreihe in einer Variablen mit Konvergenzradius $R > 0$. Ist $\phi(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\ x^\alpha$ eine Potenzreihe in p Variablen, sodass $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ eine Nullumgebung enthält und sodass $|c_{(0,\dots,0)}| < R$, dann ist $f \circ \phi(x)$ für x aus einer gewissen Nullumgebung $U(0)$ als Grenzwert einer dort absolut konvergenten Potenzreihe in p Variablen darstellbar, dh.*

$$f \circ \phi(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \frac{D^\alpha f \circ \phi(0)}{\alpha!}\ x^\alpha.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Einsetzen und Umformen. Satz 5.1.3 stellt dabei sicher, dass wir alle Umformungen tatsächlich machen dürfen.

Da $K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})$ eine Nullumgebung enthält und wegen $|c_{(0,\dots,0)}| < R$ gibt es eine Nullumbegung $U(0)$, sodass $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n| \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} |c_\alpha\ x^\alpha| \right)^n < +\infty$ für alle $x \in U(0)$. Umformen liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n| \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} |c_\alpha\ x^\alpha| \right)^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha} |c_{\beta_1}| \cdot \ldots \cdot |c_{\beta_n}|\ |x^\alpha| \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n| \sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha} |c_{\beta_1}| \cdot \ldots \cdot |c_{\beta_n}| \right) |x^\alpha|. \end{aligned}$$

Durch die gleiche Rechnung ohne Beträge erhält man schließlich

$$f \circ \phi(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n \sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha} c_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot c_{\beta_n} \right) x^\alpha$$

für alle $x \in U(0)$.

❑

5.2.7 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *reell analytisch*, falls es zu jedem $a \in G$ Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^p$, gibt sodass

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\ (x-a)^\alpha \tag{5.4}$$

für alle x in einer gewissen Umgebung $U(a) \subseteq G$ von a absolut gegen $f(x)$ konvergiert.

5.2.8 Beispiel. Sei $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha$ eine Potenzreihe, sodass $G = K((c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p})^\circ$ nicht leer ist. Dann ist $f : G \to \mathbb{R}$ reell analytisch. Dies kann folgendermaßen gezeigt werden:

Beweis. Zuerst zeigt man z.B. mittels vollständiger Induktion nach $|\alpha|$ oder mit Hilfe des klassischen Binomailsatzes

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1!\,\beta_2!} \cdot x^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^p$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$. Sei nun a ein beliebiger Punkt aus G. In einer Umgebung von a gilt sicher $|a| + |x - a| \in G$, wobei der Betrag hier komponentenweise zu verstehen ist. Satz 5.1.3 garantiert wieder, dass wir die folgende Rechnung machen dürfen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, (a + (x-a))^\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} c_\alpha \sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1!\,\beta_2!} \cdot a^{\beta_1} \cdot (x-a)^{\beta_2} \\ &= \sum_{\beta_2\in\mathbb{N}_0^p} \left(\sum_{\alpha-\beta_1=\beta_2} c_\alpha \cdot \frac{\alpha!}{\beta_1!\,\beta_2!} \cdot a^{\beta_1} \right) (x-a)^{\beta_2} \end{aligned}$$

❑

Da es in jeder Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^p$ Punke x mit $x_j \neq a_j,\ j = 1, \dots, p$, gibt, folgt aus Lemma 5.2.2 unmittelbar

5.2.9 Korollar. *Ist $f : G \to \mathbb{R}$ reell analytisch, so gilt $f \in C^\infty(G)$, wobei für $a \in G$ in* (5.4) *immer $c_\alpha = \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}$. Für $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ gilt*

$$D^\beta f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}\, D^\beta (x-a)^\alpha, \quad x \in U(a).$$

5.2.10 Korollar. *Ist G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ reell analytisch und gilt $f = 0$ auf einer nichtleeren, offenen Teilmenge von G, so folgt $f \equiv 0$.*

Beweis. Das Innere W der Menge $\{a \in G : f(a) = 0\}$ ist laut Voraussetzung nicht leer und klarerweise offen. Ist $a \in G \cap \partial W$, so gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ mit $a_n \in W$. Da f in einer Umgebung von a_n identisch verschwindet, tun das auch alle partiellen Ableitungen $D^\alpha f$. Da diese auch alle stetig sind, folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} D^\alpha f(a_n) = D^\alpha f(a).$$

Da f reell analytisch ist, folgt aus Korollar 5.2.9, dass f auf einer Umgebung von a identisch verschwindet, dh. $a \in W$. Da G zusammenhängend ist, muss $W = G$.

❑

5.2.11 Lemma. *Jedes harmonische $h : G \to \mathbb{R}$ ist reell analytisch auf G.*

Beweis. Da mit h auch $x \mapsto h(a + rx)$ harmonisch ist, genügt es zu zeigen, dass eine auf einer offenen Obermenge von $K_1(0)$ harmonische Funktion lokal um 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Wegen Lemma 5.2.6 und Bemerkung 5.2.5 lässt sich

$$\wp(x,y) = (1 - \|x\|^2) \cdot (1 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle)^{-\frac{p}{2}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^p} c_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta \tag{5.5}$$

in eine Potenzreihe in $2p$-Variablen entwickeln. Um den Konvergenzbereich abzuschätzen bemerken wir zunächst, dass $(1+t)^{-\frac{p}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{p}{2}}{k} t^k$ Konvergenzradius 1 hat. Sei $\delta \in (0,1)$ so klein, dass $\delta^2 + 4\delta < 1$. Für $x \in U_\delta(0)$ und $y \in U_2(0)$ folgt dann nach Cauchy-Schwarz $|\, \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle \,| < 1$. Damit konvergiert (5.5) für $(x,y) \in U_\delta(0) \times U_2(0)$ (siehe Beweis von Lemma 5.2.6). Wegen Lemma 5.2.3 konvergiert (5.5) absolut als Funktionenreihe auf $K_{\frac{\delta}{2}}(0) \times S^{p-1}$.

Also folgt für $x \in K_{\frac{\delta}{2}}(0)$ wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz in y (vgl. Bemerkung 5.1.2 (iv))

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \int_{S^{p-1}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^p} c_{\alpha,\beta}\, y^\beta \cdot h(y)\, d\sigma(y) x^\alpha$$

wobei auch diese Reihe absolut als Funktionenreihe in $x \in K_{\frac{\delta}{2}}(0)$ konvergiert, wie man sich leicht überzeugt.

❑

5.2.12 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Gebiet und $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Hat h ein lokales Maximum, dh. $h(a) \geq h(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung $U(a)$ von a, so ist h konstant. Entsprechendes gilt für ein lokales Minimum.*

Beweis. ObdA. sei $U(a)$ offen. Nach Korollar 2.4.4 ist h konstant auf $U(a)$ und nach Korollar 5.2.10 überall konstant.

❑

Kommen wir wieder zu Potenzreihen um die Null zurück. Sei

$$f(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} c_\alpha\, x^\alpha,$$

für x in einer gewissen Umgebung $U(0)$ der $0 \in \mathbb{R}^p$ als Funktionenreihe absolut konvergent. Aus Satz 5.1.3 (vgl. auch Fakta 5.1.4) folgt, dass dann auch die (klassische) Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha\, x^\alpha \right) =: \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) \tag{5.6}$$

als Funktionenreihe auf $U(0)$ absolut konvergiert und zwar gegen die selbe Grenzfunktion $f(x)$. Offensichtlich sind die p_m homogene Polynome vom Grad m.

Somit lassen sich reell analytische $f : G \to \mathbb{R}$ lokal um jedes $a \in G$, dh. auf einer Umgebung $U(a)$, als absolut konvergente Reihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x - a), \tag{5.7}$$

darstellen, wobei $p_m(x-a) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$.

Das nächste Lemma zeigt, dass die Polynome p_m in (5.6) eindeutig durch f bestimmt sind.

5.2.13 Lemma. *Seien $p_m, q_m,\ m \in \mathbb{N}_0$, homogene Polynome vom Grad m. Gilt nun*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x),$$

für alle x in einer gewissen Nullumgebung $U(0) \subseteq \mathbb{R}^p$, wobei für alle solche x diese Reihen punktweise konvergieren, so folgt $p_m = q_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $r > 0$ so klein, dass $U_r(0) \subseteq U(0)$. Ist $y \in S^{p-1}$ und $t \in (-r, r)$, so folgt $ty \in U_r(0)$ und daher gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m\ p_m(y) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(ty) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(ty) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m\ q_m(y),$$

wobei diese Gleichheit wieder die Konvergenz der Reihen beinhaltet. Insbesondere haben die Potenzreihen $\sum_{m=0}^{\infty} t^m\ p_m(y)$ und $\sum_{m=0}^{\infty} t^m\ p_m(y)$ in der Variable t einen Konvergenzradius $\geq r$. Da für solche Reihen die Grenzfunktion eindeutig die Koeffizienten festlegt, folgt $p_m(y) = q_m(y)$ für jedes $y \in S^{p-1}$. Da p_m und q_m homogen sind, folgt daraus $p_m = q_m$, vgl. Fakta 4.1.2, 2.

❑

5.2.14 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen eine Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn h reell analytisch ist und für alle $a \in G$ die homogenen Polynome p_m vom Grad m in* (5.7) *alle auch harmonisch sind.*

In diesem Fall gilt für $U_r(a) \subseteq G$, dass (5.7) *absolut und gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $U_r(a)$ konvergiert.*

Beweis. Ist h harmonisch, so folgt aus Lemma 5.2.11, dass h reell analytisch ist. Sei $a \in G$ und seien die p_m wie in (5.7). Aus Korollar 5.2.9 folgt für $x \in U(a)$

$$0 = \triangle h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \triangle p_m(x - a).$$

Aus Fakta 4.1.2, 3, folgt, dass $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_m$ entweder verschwindet oder ein homogenes Polynom vom Grad $m - 2$ ist. Also gilt dasselbe für $\triangle p_m$. Da die Nullfunktion auch von der Nullreihe dargestellt wird, folgt aus Lemma 5.2.13, dass $\triangle p_m = 0$.

Sei umgekehrt $h : G \to \mathbb{R}$ reell analytisch. Da auf $U(a)$ die Reihe (5.7) gleichmäßig konvergiert folgt aus Proposition 2.4.1 sofort $\triangle(h|_{U(a)}) \equiv 0$.

Es bleiben noch die zusätzlichen Konvergenzeigenschaften zu zeigen. Zunächst sei h harmonisch auf einer Obermenge von $K_1(0)$. Nach Satz 4.5.3 gilt

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} h(y)\wp(x, y)\ d\sigma(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^{p-1}} h(y) Z_m(x, y)\ d\sigma(y).$$

Da $\int_{S^{p-1}} h(y) Z_m(x, y)\ d\sigma(y) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^p)$ muss wegen Lemma 5.2.13 $p_m(x) = \int_{S^{p-1}} h(y) Z_m(x, y)\ d\sigma(y)$ gelten. Wie im Beweis von Satz 4.5.3 erhalten wir

$$|p_m(x)| \leq C m^{p-1} \|x\|^m \int_{S^{p-1}} |h(y)|\ d\sigma(y)$$

und damit konvergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$ auf allen kompakten Teilmengen von $U_1(0)$ absolut und gleichmäßig.

Sei nun h harmonisch auf $U_r(a)$. Mittels einer Verschiebung und einer Streckung und dem gerade Bewiesenen erhalten wir für jede Kugel $U_s(a)$ mit $0 < s < r$ die zusätzlichen Konvergenzeigenschaften. Da ein kompaktes $K \subseteq U_r(a)$ sogar in einem $U_s(a)$ mit $0 < s < r$ enthalten sein muss, erhalten wir die zusätzlichen Konvergenzeigenschaften für ganz $U_r(a)$.

❑

5.3 Zerlegung harmonischer Funktionen

Zunächst wollen wir auf eine unmittelbare Folgerung von Lemma 2.2.3 aufmerksam machen.

5.3.1 Lemma. *Sei $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ in $C^2_{00}(\mathbb{R}^p)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^p$ im Fall $p = 2$*

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^1)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln \|t - x\| \, \triangle h(t) \, d\lambda_p(t),$$

und im Fall $p > 2$

$$h(x) = \frac{1}{(2 - p)\mu(S^{p-1})} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \|t - x\|^{2-p} \, \triangle h(t) \, d\lambda_p(t).$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^p$ und $r > 1$ so groß, dass $h(x) = 0$ wenn $x \notin U_r(x)$. Lemma 2.2.3 angewandt auf $\xi \mapsto h(x + r\xi)$ ergibt wegen $h(x + r\xi) = 0$ für $\|\xi\| = 1$

$$h(x) = h(x + r0) = \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int\limits_{U_1(0)} w_0(t) r^2 (\triangle h)(rt + x) \, d\lambda_p(t) =$$

$$\frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int\limits_{U_r(x)} w_0\left(\frac{t - x}{r}\right) r^{2-p} \triangle h(t) \, d\lambda_p(t).$$

Dabei ist $w_0(\frac{t-x}{r}) r^{2-p} = \ln \|\frac{t-x}{r}\| = \ln \|t - x\| - \ln r$ im Fall $p = 2$ und $w_0(\frac{t-x}{r}) r^{2-p} = \frac{1}{2-p} \cdot (\|t - x\|^{2-p} - r^{2-p})$ im Fall $p > 2$. Aus der Greenschen Formel, Satz 2.1.8 angewandt auf $G = U_r(x)$, $g = 1$ und h, folgt

$$\int\limits_{U_r(x)} \triangle h(t) \, d\lambda_p(t) = \int\limits_{x + rS^{p-1}} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y) = 0.$$

Also folgt im Fall $p = 2$

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^1)} \int\limits_{U_r(x)} \ln \|t - x\| \triangle h(t) \, d\lambda_p(t),$$

und im Fall $p > 2$

$$h(x) = \frac{1}{(2 - p)\mu(S^{p-1})} \int\limits_{U_r(x)} \|t - x\|^{2-p} \triangle h(t) \, d\lambda_p(t).$$

Da der Integrand außerhalb von $U_r(x)$ verschwindet, kann man den Integrationsbereich durch $\mathbb{R}^p$ ersetzen.

❑

5.3.2 Bemerkung. Ist $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion, die außerhalb von K verschwindet, und bezeichne $g(t) = \frac{1}{\mu(S^1)} \ln \|t\|$ im Fall $p = 2$ und $g(t) = \frac{1}{(2-p)\mu(S^{p-1})} \|t\|^{2-p}$ im Fall $p > 2$, so existiert wegen Bemerkung 2.2.2 das Integral

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^p} g(t-x)\varphi(t)\, d\lambda_p(t) = \int_K g(t-x)\varphi(t)\, d\lambda_p(t),$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^p$. Wir wissen auch, dass auf K^c die Funktion $x \mapsto g(t-x)\varphi(t)$ harmonisch ist und zwar für jedes $t \in K$. Zudem sind $(x,t) \mapsto g(t-x)$, $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} g(t-x)$ sowie $(x,t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} g(t-x)$ für alle $j, k \in \{1, \dots, p\}$ auf $(x,t) \in K^c \times K$ stetig.

Also sind für jede kompakte Teilmenge $F \subseteq K^c$ die Funktionen $(x,t) \mapsto g(t-x)\varphi(t)$, $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} g(t-x)\varphi(t)$ sowie $(x,t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} g(t-x)\varphi(t)$ gleichmäßig auf $F \times K$ beschränkt. Wegen Proposition 1.1.8 ist somit die Funktion f auf K^c harmonisch.

Die eben betrachtete Funktion ist eine Art Faltung, vgl. Analysis 3. Punkto Faltung sei an folgende Sachverhalte erinnert.

5.3.3 Fakta.

1. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ mit $g(\xi) = 0,\ \xi \leq 0,\ g(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi}}$ liegt in $C^\infty(\mathbb{R})$.

   Somit liegt auch $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definiert durch $f(\xi) = \frac{g(\xi)}{g(\xi)+g(1-\xi)}$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ und nimmt nur Werte in $[0,1]$ an, wobei $f(\xi) = 1,\ \xi \geq 1$ und $f(\xi) = 0,\ \xi \leq 0$.

   Schließlich ist auch $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $h(\xi) = f(\xi+2)f(2-\xi)$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit Werten in $[0,1]$, sodass $h([-1,1]) = \{1\}$ und $h(\mathbb{R} \setminus (-2,2)) = \{0\}$.

2. Setzen wir $c := \int_{K_2(0)} h(\|y\|_2^2)\, d\lambda_p(y)$, so ist die Funktion $(\delta > 0)$

$$k_\delta(x) := \frac{1}{c\,\delta^d}\, h\left(\frac{\|x\|_2^2}{\delta^2}\right)$$

   als Zusammensetzung von C^∞-Funktionen selber C^∞ von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}$, nimmt auf $K_\delta(0)$ den Wert $\frac{1}{c\,\delta^d}$ an, und hat einen Träger, der in $K_{2\delta}(0)$ enthalten ist. Dabei gilt $\|k_\delta\|_1 = 1$.

3. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^p$ eine beschränkte Borelteilmenge, so ist die Faltung

$$k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_B(y) k_\delta(x-y)\, d\lambda_d(y)$$

   als Faltung zweier beschränkter und integrierbarer Funktionen eine beschränkte und integrierbare Funktion. Weil k_δ unendlich oft differenzierbar ist, gilt dasselbe auch für $k_\delta * \mathbb{1}_B$.

   Genauer gilt, dass $k_\delta * \mathbb{1}_B$ nur Werte in $[0,1]$ annimmt, wobei $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1$, falls $K_{2\delta}(x) \subseteq B$ und $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$, falls $K_{2\delta}(x) \cap B = \emptyset$.

4. Ist K eine kompakte Teilmenge einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^p$, so folgt $5\delta := d(K, G^c) > 0$. Ist nun $B = K_{2\delta}(K) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, K) \leq 2\delta\}$, so folgt $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1,\ x \in K$ und $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$ für $x \notin K_{4\delta}(K) \subseteq G$.

   Also ist $k_\delta * \mathbb{1}_B$ eine $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ Funktion mit Werten in $[0, 1]$ und Träger in G, die auf K den Wert 1 annimmt.

5.3.4 Satz. *Sei K eine kompakte Teilmenge einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^p$. Weiters sei $h : G \setminus K \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$h = v + w$$

von h, derart, dass $v : G \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^p \setminus K \to \mathbb{R}$ harmonisch sind, und dass $\lim_{\|x\| \to +\infty} w(x) = 0$ im Fall $p > 2$ und $\lim_{\|x\| \to +\infty} w(x) - b \ln \|x\| = 0$ für ein gewisses $b \in \mathbb{R}$ im Fall $p = 2$.

Beweis. Zunächst nehmen wir G als beschränkt an. Für jedes $r > 0$ betrachten wir

$$A_r := \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, K) \geq r,\ d(x, G^c) \geq r\} = U_r(K)^c \cap U_r(G^c)^c,$$

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, K) > r,\ d(x, G^c) > r\} = K_r(K)^c \cap K_r(G^c)^c.$$

Da $x \mapsto \|x\|$, $x \mapsto d(x, K)$ und $x \mapsto d(x, G^c)$ stetig sind, ist A_r abgeschlossen und B_r offen. Außerdem gilt $B_r \subseteq A_r \subseteq G \setminus K$, da A_r wegen $d(x, K) \geq r$ bzw. $d(x, G^c) \geq r$ keinen Punkt mit K bzw. G^c gemein haben kann. Somit ist A_r sogar kompakt.

Schließlich gilt $B_r \subseteq A_r \subseteq B_s \subseteq A_s$ für $r < s$ und

$$\bigcup_{r>0} A_r = \bigcup_{r>0} B_r = G \setminus K,$$

da ein $x \in G \setminus K$ positiven Abstand zu G^c und zu K hat. Insbesondere ist $B_r \neq \emptyset$ für $r \leq r_0$ mit einem $r_0 > 0$.

Nach Fakta 5.3.3 gibt es eine $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ Funktion ϕ_r mit Werten in $[0, 1]$ und Träger in $G \setminus K$, die auf A_r den Wert 1 annimmt. Damit ist $h \cdot \phi_r$ in $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^p)$, wenn wir $h \cdot \phi_r$ außerhalb von $G \setminus K$ mit 0 fortsetzen.

Ist g definiert wie in Bemerkung 5.3.2, so gilt für $x \in \mathbb{R}^p$ wegen Lemma 5.3.1

$$(h \cdot \phi_r)(x) = \int_{\mathbb{R}^p} g(t - x) \bigtriangleup(h \cdot \phi_r)(t)\, d\lambda_p(t).$$

Da $h \cdot \phi_r$ auf der offenen Menge B_r konstant eins ist, gilt $\bigtriangleup(h \cdot \phi_r)(t) = 0,\ t \in B_r$. Also gilt

$$\operatorname{supp} \bigtriangleup(h \cdot \phi_r) \subseteq G \setminus (K \cup B_r) = (G \setminus K) \cap (K_r(G^c) \cup K_r(K)) \subseteq (\overline{G} \cap K_r(G^c)) \cup K_r(K),$$

wobei für $r \in (0, r_0]$ so klein, dass $2r < d(K, G^c)$ die Mengen $K_r(G^c)$ und $K_r(K)$ disjunkt sind. Für solch kleine $r > 0$ gilt dann

$$(h \cdot \phi_r)(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^p} g(t - x) \bigtriangleup(h \cdot \phi_r)(t) \cdot \mathbb{1}_{\overline{G} \cap K_r(G^c)}(t)\, d\lambda_p(t)}_{=: v_r(x)} +$$
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^p} g(t - x) \bigtriangleup(h \cdot \phi_r)(t) \cdot \mathbb{1}_{K_r(K)}(t)\, d\lambda_p(t)}_{=: w_r(x)}.$$

Die Funktionen v_r und w_r sind überall definiert und erfüllen für $x \in A_r$ sicherlich $h(x) = (h \cdot \phi_r)(x) = v_r(x) + w_r(x)$. Wegen Bemerkung 5.3.2 sind sie auf $K_r(G^c)^c \subseteq (\overline{G} \cap K_r(G^c))^c$ bzw. $K_r(K)^c$ harmonisch.

Im Fall $p > 2$ gilt $g(t) = \frac{1}{(2-p)\mu(S^{p-1})}\|t\|^{2-p}$. Somit folgt aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass $\lim_{\|x\| \to +\infty} w_r(x) = 0$. Im Fall $p = 2$ gilt $g(t) = \frac{1}{\mu(S^1)} \ln \|t\|$ und damit

$$w_r(x) - \ln\|x\| \underbrace{\frac{1}{\mu(S^1)} \int_{K_r(K)} \triangle(h \cdot \phi_r)(t)\, d\lambda_p(t)}_{=:b_r} = \frac{1}{\mu(S^1)} \int_{K_r(K)} \ln \frac{\|t-x\|}{\|x\|} \triangle(h \cdot \phi_r)(t)\, d\lambda_p(t).$$

Wegen

$$\frac{\|t-x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|t\|^2}{\|x\|^2} - 2\frac{(x,t)}{\|x\|^2} + 1 \quad \text{mit} \quad \frac{|(x,t)|}{\|x\|^2} \leq \frac{\|t\|}{\|x\|}$$

und wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz gilt

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} w_r(x) - b_r \ln\|x\| = 0.$$

Ist nun $0 < s < r$, wobei $r, s \in (0, \min(\frac{d(K,G^c)}{2}, r_0)$, so gilt

$$v_s(x) + w_s(x) = h(x) = v_r(x) + w_r(x), \quad \text{für alle} \ \ x \in A_r \subseteq A_s.$$

Nun ist aber $w_r(x) - w_s(x)$ harmonisch zumindest auf $K_r(K)^c \subseteq K_s(K)^c$. Auf $K_r(G^c)^c \subseteq K_s(G^c)^c$ ist $v_s(x) - v_r(x)$ harmonisch. Zudem stimmen auf

$$K_r(K)^c \cap K_r(G^c)^c = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, G^c) > r, d(x, K) > r\} = B_r \ \subseteq A_r$$

diese Funktionen überein. Also hat $w_r(x) - w_s(x)$ eine harmonische Erweiterung f auf $K_r(G^c)^c \cup K_r(K)^c = (K_r(G^c) \cap K_r(K))^c = \mathbb{R}^p$.

Nun gilt aber $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$ im Fall $p > 2$ und $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) - b \ln\|x\| = 0$ für ein $b \in \mathbb{R}$ im Fall $p = 2$. In jedem Falle folgt

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = 0.$$

Wegen Proposition 2.5.1 muss f konstant sein, was im Fall $p = 2$ insbesondere $b = 0$ impliziert. In jedem Fall folgt nun aus $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$, dass $f \equiv 0$ bzw. $v_s(x) = v_r(x)$ und $w_r(x) = w_s(x)$ für $x \in B_r$. Im Fall $p = 2$ folgt insbesondere auch $b_r = b_s$.

Wegen $\bigcup_{r>0} K_r(G^c)^c = G$ und $\bigcup_{r>0} K_r(K)^c = K^c$ sind durch $v(x) := v_r,\ x \in K_r(G^c)^c$ und $w(x) := w_r(x),\ x \in K_r(K)^c$ zwei harmonische Funktionen $v : G \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^p \setminus K \to \mathbb{R}$ definiert, die besagte Eigenschaften haben.

Ist G nicht beschränkt, so betrachten wir $\tilde{G} := G \cap U_R$, wobei $R > 0$ so groß ist, dass $K \subseteq U_R(0)$. Aus dem bewiesenem Fall erhält man eine Zerlegung

$$h = \tilde{v} + w$$

von h auf $\tilde{G} \setminus K$, sodass $\tilde{v} : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^p \setminus K \to \mathbb{R}$ harmonisch sind, wobei w besagtes Grenzverhalten bei ∞ aufweist.

Nun ist aber $v := h - w$ sogar auf $G \setminus K$ definiert und als Differenz zweier harmonischer Funktionen harmonisch. Zudem stimmt sie auf $\tilde{G} \setminus K$ ($\subseteq G \setminus K$)

mit $\tilde{v}$ überein. Setzen wir noch $v(x) := \tilde{v}(x)$ für $x \in K$ $(\subseteq \tilde{G})$, so erhalten wir eine harmonische Erweiterung $v : G \to \mathbb{R}$ von $\tilde{v}$, die auf $G \setminus K$ sicherlich $h = v + w$ erfüllt.

Der Beweis der Eindeutigkeit ist ähnlich wie oben der Nachweis, dass die v_r und w_r nicht von r abhängen. Wir nehmen also an, dass auf $G \setminus K$

$$v_1 + w_1 = h = v_2 + w_2$$

mit harmonischen $v_1, v_2 : G \to \mathbb{R}$ und $w_1, w_2 : \mathbb{R}^p \setminus K \to \mathbb{R}$, sodass w_1 und w_2 besagtes Grenzverhalten bei ∞ aufweisen.

Es folgt $(v_1 - v_2)|_{G\setminus K} = (w_2 - w_1)|_{G\setminus K}$, wobei $v_1 - v_2 : G \to \mathbb{R}$ und $w_2 - w_1 : \mathbb{R}^p \setminus K \to \mathbb{R}$ harmonisch sind. Also ist $f := (v_1 - v_2) \cup (w_2 - w_1) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ harmonisch, wobei $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$ im Fall $p > 2$ und $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) - b \ln \|x\| = 0$ für ein $b \in \mathbb{R}$ im Fall $p = 2$. In jedem Fall folgt

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = 0.$$

Wegen Proposition 2.5.1 muss f konstant sein, was im Fall $p = 2$ insbesondere $b = 0$ impliziert. In jedem Fall folgt nun aus $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, dass $f \equiv 0$ bzw. $v_1 = v_2$ und $w_1 = w_2$.

❑

Wir wollen diesen Satz auf die spezielle Situation anwenden, dass K einpunktig ist.

5.3.5 Satz (*Satz von Bocher*)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$, $a \in G$ und $h : G \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ harmonisch, sodass*

$$\limsup_{r\searrow 0} r^{p-1} \inf_{x\in a+rS^{p-1}} h(x) \geq 0, \tag{5.8}$$

oder sodass

$$\liminf_{r\searrow 0} r^{p-1} \sup_{x\in a+rS^{p-1}} h(x) \leq 0. \tag{5.9}$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $v : G \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $b \in \mathbb{R}$, sodass für $x \in G \setminus \{a\}$

$$h(x) = \begin{cases} v(x) - b \ln \|x - a\| & , p = 2 \\ v(x) + b\|x - a\|^{2-p} & , p > 2 \end{cases} \tag{5.10}$$

Erfüllt $h : G \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ nun $h \geq c$ bzw. $h \leq c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so hat h auch eine derartige Darstellung, wobei aber zusätzlich $b \geq 0$ bzw. $b \leq 0$.

Beweis. Klarerweise können wir $a = 0$ annehmen. Satz 5.3.4 liefert uns eine Zerlegung

$$h = v + w$$

von h, derart, dass $v : G \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch sind, und dass $\lim_{\|x\|\to+\infty} w(x) = 0$ im Fall $p > 2$ sowie $\lim_{\|x\|\to+\infty} w(x) - b \ln \|x\| = 0$ für ein gewisses $b \in \mathbb{R}$ im Fall $p = 2$.

Wir setzen $f(x) := w(x)$ im Fall $p > 2$ und $f(x) := w(x) - b \ln \|x\|$ im Fall $p = 2$. Wegen $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$ folgt aus Korollar 2.5.16, dass sich die Kelvintransformation $K[f] : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch auf $\mathbb{R}^p$ fortsetzen lässt. Zudem folgt aus (5.8)

$$\limsup_{r\nearrow+\infty} \inf_{\|x\|=r} \frac{K[f](x)}{r} = \limsup_{r\nearrow+\infty} \inf_{\|x\|=r} \frac{f(x^*)}{r^{p-1}} =$$

$$\limsup_{r\searrow 0} r^{p-1} \inf_{x\in rS^{p-1}} f(x) = \limsup_{r\searrow 0} r^{p-1} \inf_{x\in rS^{p-1}} w(x) = \limsup_{r\searrow 0} r^{p-1} \inf_{x\in rS^{p-1}} h(x) \geq 0.$$

Die drittletzte Gleichheit folgt aus $r\ \ln r \to 0$ für $r \searrow 0$ im Falle $p = 2$. Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Stetigkeit von v bei 0 und die letzte aus der Voraussetzung. Wegen Proposition 2.5.1 muss $K[f]$ konstant sein.

Im Fall $p = 2$ gilt wegen $K[f](0) = \lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$ sogar $K[f] = 0$ und daher $f = 0$ bzw. $w(x) = -b\ln\|x\|$. Im Fall $p > 2$ ist $K[f](x) = \|x^*\|^{p-2} \cdot f(x^*) = b$ für alle $x \in G$ und daher $f(x) = b\|x\|^{2-p}$ für ein $b \in \mathbb{R}$.

Falls (5.9) gilt, so gilt (5.8) für die Funktion $-h$ und damit folgt der Satz auch in diesem Fall.

Schließlich folgt aus $h \geq c$ bzw. $h \leq c$, dass (5.8) bzw. (5.9) gilt. Also hat h die angegebene Darstellung (5.10). Wäre dabei $b < 0$ bzw. $b > 0$, so folgte aus (5.10) wegen der Stetigkeit von v bei a für x hinreichend nahe bei a der Widerspruch $h < 0$ bzw. $h > 0$.

❑

5.3.6 Korollar. *Ist $h : U_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch derart,*

- ⇝ *dass $h(x)$ nur von $\|x\|$ abhängt, dh. $h(x) = h(y)$, falls $\|x\| = \|y\|$,*
- ⇝ *oder dass, h (5.8) oder (5.9) mit $a = 0$ erfüllt und dass $\lim_{\|x\|\nearrow 1} h(x) = c$ $(\in \mathbb{R})$,*

so gilt

$$h(x) = \begin{cases} c - b\ln\|x\| & , p = 2 \\ c + b(\|x\|^{2-p} - 1) & , p > 2 \end{cases}$$

für $b, c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Im Fall, dass $h(x)$ nur von $\|x\|$ abhängt, gilt offensichtlich $\inf_{x\in rS^{p-1}} h(x) = \sup_{x\in rS^{p-1}} h(x)$ für $r \in (0,1)$. Da immer $\liminf_{r\searrow 0} \ldots \leq \limsup_{r\searrow 0} \ldots$, muss (5.8) oder (5.9) mit $a = 0$ erfüllt sein. Also hat h wegen Satz 5.3.5 in jedem Fall die Form (5.10) mit $a = 0$.

Gilt $\lim_{\|x\|\nearrow 1} h(x) = c$, so folgt aus (5.10), dass $\lim_{\|x\|\nearrow 1} v(x) = c$ im Fall $p = 2$ und $\lim_{\|x\|\nearrow 1} v(x) = c - b$ im Fall $p > 2$. Satz 2.5.11 angewandt auf v und $-v$ ergibt $v \equiv c$ bzw. $v \equiv c - b$.

Im Fall, dass $h(x)$ nur von $\|x\|$ abhängt, gilt für jedes $r \in (0,1)$ sicherlich $\lim_{\|x\|\nearrow r} h(x) = h(ry)$ für irgendein festes $y \in S^{p-1}$. Es folgt $\lim_{\|x\|\nearrow r} v(x) = h(ry) + b\ln r$ im Fall $p = 2$ und $\lim_{\|x\|\nearrow r} v(x) = h(ry) - br^{2-p}$ im Fall $p > 2$. Wieder aus Satz 2.5.11 folgt $v \equiv h(ry) + b\ln r$ bzw. $v \equiv h(ry) - br^{2-p}$ und daher $h(x) = h(ry) + b\ln r - b\ln\|x\|$ bzw. $h(x) = h(ry) - br^{2-p} + b\|x\|^{2-p}$ auf $U_r(0)$.

Offensichtlich hängt $h(ry) + b\ln r$ bzw. $h(ry) - br^{2-p}$ nicht von r ab, dh. stimmt überein mit $\lim_{r\nearrow 1} h(ry) + b\ln r = c$ bzw. $\lim_{r\nearrow 1} h(ry) - br^{2-p} = c - b$, wobei $c = \lim_{\|x\|\nearrow 1} h(x)$ existiert.

❑

5.4 Harmonische Funktionen auf Kreisringen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Harmonischen Funktionen beschäftigen, die auf einem Gebiet der Form $\{x \in \mathbb{R}^p : r_0 < \|x - a\| < r_1\} = U_{r_1}(a) \setminus K_{r_0}(a)$ definiert sind, wobei $r_0 \in [0, +\infty)$, $r_1 \in (0, +\infty]$ und $r_0 < r_1$. So ein Gebiet nennen wir einen

Kreisring. Ein Kreisring ist also das Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen, ein punktierter Kreis, das Komplement von einem Kreis oder $\mathbb{R}^p \setminus \{a\}$. Wir haben bereits gesehen, wie sich eine harmonische Funktion, die auf einem Kreis definiert ist, in eine Reihe von homogenen harmonischen Polynomen entwickeln lässt. Analog zu Laurent Reihen von holomorphen Funktionen wollen wir nun harmonische Funktionen auf Kreisringen in Reihen entwickeln.

5.4.1 Satz (*Laurent Reihe*)**.** *Sei h eine harmonische Funktion auf einem Kreisring A um a. Dann gibt es eindeutige homogene harmonische Polynome p_m und q_m vom Grad m, für alle $m \in \mathbb{N}_0$, sodass im Fall $p > 2$*

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m+p-2}}$$

und im Fall $p = 2$

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a) + q_0 \ln \|x-a\| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m}}$$

für alle $x \in A$ gilt. Die Konvergenz erfolgt dabei auf allen kompakten Teilmengen von A absolut und gleichmäßig.

Beweis. Der Beweis besteht aus einer Kombination von Satz 5.3.4, der Kelvin Transformation und Satz 5.2.14.
Sei o.B.d.A. $A = \{x \in \mathbb{R}^p : r_0 < \|x\| < r_1\}$. Nach Satz 5.3.4 gibt es eine (eindeutige) Zerlegung $h = v + w$ wobei v harmonisch auf $U_{r_1}(0)$ ist und w harmonisch auf $\mathbb{R}^p \setminus K_{r_0}(0)$ ist.
Wegen Satz 5.2.14 gibt es homogene harmonische Polynome $p_m(x)$, sodass

$$v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x),$$

wobei die Gleichung für alle $x \in U_{r_1}(0)$ gilt und die Konvergenz absolut und lokal gleichmäßig ist.
Wegen den Eindeutigkeitseigenschaften aus Satz 5.3.4 folgt aus Korollar 2.5.16, dass sich $K[w]$ im Fall $p > 2$ bzw. $K[v(.) - q_0 \ln \|.\|]$ im Fall $p = 2$ harmonisch auf $U_{\frac{1}{r_0}}(0)$ fortsetzen lässt. Im Fall $p = 2$ folgt außerdem $K[v(.) - q_0 \ln \|.\|](0) = 0$. Wie oben erhalten wir eine Darstellung mit den gewünschten Konvergenzeigenschaften. Also

$$K[w](x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)$$

im Fall $p > 2$ bzw.

$$K\left[v(.) - q_0 \ln \|.\|\right](x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x)$$

im Fall $p = 2$. Wenn wir nun auf beiden Seiten die Kelvin Transformation anwenden erhalten wir

$$w(x) = \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \sum_{m=0}^{\infty} q_m\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_m(x)}{\|x\|^{2m+p-2}}$$

im Fall $p > 2$ bzw.

$$w(x) - q_0 \ln \|x\| = \sum_{m=1}^{\infty} q_m\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m(x)}{\|x\|^{2m}}$$

im Fall $p = 2$. Dabei haben wir die homogenität der q_m ausgenützt.
Durch Zusammensetzen der Entwicklungen von v und w erhalten wir eine Entwicklung von h der gesuchten Form.
Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $h = v + w$ und der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung (siehe Lemma 5.2.13).

❑

5.4.2 Bemerkung. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $a \in G$ und h eine harmonische Funktion auf $G \setminus \{a\}$. Dann sagen wir, dass h eine *isolierte Singularität* bei a hat. Nach Satz 5.4.1 können wir h in eine Laurentreihe um a entwickeln. Satz 5.4.1 sagt außerdem, dass die Laurentreihe unabhängig davon ist, welchen punktierten Kreis $A \subseteq G \setminus \{a\}$ wir wählen. Wir nennen im Fall $p > 2$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m+p-2}}$$

und im Fall $p = 2$

$$q_0 \ln \|x - a\| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m}}$$

den *Hauptteil* der Laurentreihe.

Als nächstes werden wir isolierte Singularitäten mittels des Hauptteils klassifizieren.

5.4.3 Definition. Sei h eine harmonische Funktion mit isolierter Singularität bei a.

- a ist eine *hebbare Singularität*, wenn alle q_m im Hauptteil identisch Null sind.
- a ist ein *Pol*, wenn alle bis auf endlich viele q_m im Hauptteil identisch Null sind (aber nicht alle q_m identisch Null sind). Wenn $M \geq 0$ die größte ganze Zahl mit $q_M \not\equiv 0$ ist, dann nennen wir a einen Pol der Ordnung $M + p - 2$. Ein Pol der Ordnung $p - 2$ heißt auch *fundamentaler Pol*.
- a ist eine *wesentliche Singularität*, wenn unendlich viele q_m im Hauptteil nicht identisch Null sind.

5.4.4 Bemerkung. Die nächsten beiden Sätze erklären, warum die Ordnung von einem Pol so definiert wurde.

5.4.5 Bemerkung. Im Fall $p > 2$ liegt genau dann ein fundamentaler Pol vor, wenn der Hauptteil ein skalares Vielfaches ($\neq 0$) von $\|x - a\|^{2-p}$ ist.
Im Fall $p = 2$ liegt genau dann ein fundamentaler Pol vor, wenn der Hauptteil ein skalares Vielfaches ($\neq 0$) von $\ln \|x - a\|$ ist.

5.4.6 Beispiel. Sei α ein Multiindex und $p > 2$. Die Funktion $D^\alpha \|x\|^{2-p}$ hat einen Pol der Ordnung $|\alpha| + p - 2$ bei 0.

5.4.7 Satz. *($p > 2$) Sei h eine harmonische Funktion mit isolierter Singularität bei a.*

(i) a ist eine hebbare Singularität genau dann, wenn

$$\lim_{x\to a} \|x-a\|^{p-2}|h(x)| = 0.$$

(ii) a ist ein Pol der Ordnung $M+p-2$ genau dann, wenn

$$0 < \limsup_{x\to a} \|x-a\|^{M+p-2}|h(x)| < +\infty.$$

(iii) a ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn

$$\limsup_{x\to a} \|x-a\|^{N}|h(x)| = +\infty$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) folgt aus Satz 2.5.15 und der Tatsache, dass h genau dann bei a fortsetzbar ist, wenn der Hauptteil verschwindet.
ad (ii): Angenommen h hat einen Pol der Ordnung $M+p-2$ bei a.

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to a} \|x-a\|^{M+p-2}|h(x)| &= \limsup_{x\to a} \|x-a\|^{M+p-2} \cdot \left|\sum_{m=0}^{M} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m+p-2}}\right| \\
&= \limsup_{x\to a} \left|\sum_{m=0}^{M} \|x-a\|^{M-m} q_m\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)\right| \\
&= \sup_{y\in S^{p-1}} |q_M(y)| \quad \in (0,+\infty)
\end{aligned}$$

Gelte umgekehrt $0 < \limsup_{x\to a} \|x-a\|^{M+p-2}|h(x)| < +\infty$ und bezeichne w den Hauptteil von h. Dann gibt es eine Konstante $C < +\infty$, sodass $|w(a+ry)| \le \frac{C}{r^{M+p-2}}$ für kleine $r > 0$ und $y \in S^{p-1}$. Aus der Orthogonalität von Kugelfunktionen verschiedenen Grades folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{S^{p-1}} q_j(y)^2 d\sigma(y)}{r^{2j+2p-4}} &\le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\int_{S^{p-1}} q_m(y)^2 d\sigma(y)}{r^{2m+2p-4}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^{p-1}} \left(\frac{q_m(y)}{r^{m+p-2}}\right)^2 d\sigma(y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^{p-1}} \left(\frac{q_m(ry)}{r^{2m+p-2}}\right)^2 d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{p-1}} w(a+ry)^2 d\sigma(y) \\
&\le \frac{C^2}{r^{2M+2p-4}}.
\end{aligned}$$

Für $j > M$ folgt

$$\int_{S^{p-1}} q_j(y)^2 d\sigma(y) \;\le\; C^2 r^{2(j-M)} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

und damit ist q_j identisch Null. Wegen der Rechnung weiter oben gilt $0 < \limsup_{x\to a} \|x-a\|^{M+p-2}|h(x)| = \sup_{y\in S^{p-1}} |q_M(y)|$, und damit ist q_M nicht identisch Null. Also ist a ein Pol der Ordnung $M + p - 2$.
ad (iii): Angenommen es gilt $\limsup_{x\to a} \|x-a\|^N|h(x)| = +\infty$, für alle $N \in \mathbb{N}$. Wegen (i) und (ii) kann a nur eine wesentliche Singularität sein.
Sei umgekehrt a eine wesentliche Singularität. Angenommen es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\limsup_{x\to a} \|x-a\|^N|h(x)| < +\infty$. Mit dem gleichen Argument wie bei (ii) folgt, dass alle q_j ab einem Index identisch Null sind. Ein Widerspruch dazu, dass a eine wesentliche Singularität ist.

❑

5.4.8 Satz. *($p = 2$) Sei h eine harmonische Funktion mit isolierter Singularität bei a.*

(i) a ist eine hebbare Singularität genau dann, wenn

$$\lim_{x\to a} \left| \frac{h(x)}{\ln \|x-a\|} \right| = 0.$$

(ii) a ist ein fundamentaler Pol genau dann, wenn

$$0 < \lim_{x\to a} \left| \frac{h(x)}{\ln \|x-a\|} \right| < +\infty.$$

(iii) a ist ein Pol der Ordnung $M > 0$ genau dann, wenn

$$0 < \limsup_{x\to a} \|x-a\|^M|h(x)| < +\infty.$$

(iv) a ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn

$$\limsup_{x\to a} \|x-a\|^N|h(x)| = +\infty$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) folgt aus Satz 2.5.15 und der Tatsache, dass h genau dann bei a fortsetzbar ist, wenn der Hauptteil verschwindet.
ad (ii): Angenommen a ist ein fundamentaler Pol.

$$\lim_{x\to a} \left| \frac{h(x)}{\ln \|x-a\|} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{q_0 \ln \|x-a\|}{\ln \|x-a\|} \right| = |q_0| \quad \in (0, +\infty)$$

Gelte umgekehrt $0 < \lim_{x\to a} \left| \frac{h(x)}{\ln \|x-a\|} \right| < +\infty$, dann folgt

$$\lim_{x\to a} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m(x-a)}{\|x-a\|^{2m}} \frac{1}{\ln \|x-a\|} \right| < +\infty.$$

Analog zum Fall $p > 2$ folgt für $j \geq 1$

$$\int_{S^{p-1}} q_j(y)^2 d\sigma(y) \;\leq\; C^2(\ln r)^2 r^{2j} \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

und damit ist q_j identisch Null. Wegen der Rechnung weiter oben gilt $0 < \lim_{x\to a} \left| \frac{h(x)}{\ln \|x-a\|} \right| = |q_0|$. Also ist q_0 ungleich Null.
Die Punkte (iii) und (iv) lassen sich ebenfalls analog zum Fall $p > 2$ zeigen.

❑

5.4.9 Satz. *Sei h eine harmonische Funktion und a eine wesentliche Singularität oder ein Pol mit Ordnung $> p-2$. Dann wird jede reelle Zahl in der Nähe von a unendlich oft angenommen.*

Beweis. Angenommen es gibt eine punktierte Umgebung von a, sodass h nach oben oder nach unten beschränkt ist. Dann folgt aus dem Satz von Bocher (Satz 5.3.5), dass a (höchstens) ein Pol der Ordnung $p-2$ ist. Ein Widerspruch. Also ist $h(U_r(a)\setminus\{a\})$ weder nach unten noch nach oben beschränkt, für alle hinrechend kleinen $r>0$. Da $U_r(a)\setminus\{a\}$ und damit auch $h(U_r(a)\setminus\{a\})$ zusammenhängend ist, muss $h(U_r(a)\setminus\{a\})=\mathbb{R}$ gelten.

❑

5.4.10 Definition. Sei h eine harmonische Funktion mit isolierter Singularität bei a. Wir nennen den Koeffizienten q_0 aus der Laurent Reihe von h um a das Residuum von h bei a.

$$\mathrm{Res}_a(h) := q_0$$

5.4.11 Satz. *Sei G offen, $a\in G$ und $h: G\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Für alle $K_r(a)\subseteq G$ gilt im Fall $p>2$*

$$\mathrm{Res}_a(h) = \frac{1}{(2-p)p\ \lambda_p(K_1(0))}\int\limits_{\partial U_r(a)} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y)$$

und im Fall $p=2$

$$\mathrm{Res}_a(h) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial U_r(a)} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y).$$

Beweis. Zuerst sei $p>2$. O.B.d.A. gelte $a=0$. Wir entwickeln h in eine Laurentreihe um 0

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{q_m(x)}{\|x\|^{2m+p-2}}.$$

Die erste Summe verschwindet beim Integrieren, weil sie harmonisch auf einer offenen Obermenge von $K_r(a)$ ist (siehe Beispiel 2.1.9). Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Big|_{x=y}\frac{q_m(x)}{\|x\|^{2m+p-2}} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{q_m(y+t\frac{y}{\|y\|})}{\|y+t\frac{y}{\|y\|}\|^{2m+p-2}}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(1+\frac{t}{r})^{2-p-m}\frac{q_m(y)}{r^{2m+p-2}}\\ &= (2-p-m)\frac{q_m(y)}{r^{2m+p-1}}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial U_r(0)} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-p-m)}{r^{2m+p-1}} \int\limits_{\partial U_r(0)} q_m(y)\, d\mu(y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-p-m)}{r^{2m+p-1}}\, \mu(\partial U_r(0))\, q_m(0) \\
&= \frac{(2-p)}{r^{p-1}}\, \mu(\partial U_r(0))\, q_0 \\
&= (2-p)\, \mu(S^{p-1})\, q_0 \\
&= (2-p)\, p\, \lambda_p(K_1(0))\, q_0.
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit haben wir die Mittelwerteigenschaft (Korollar 2.2.5) ausgenützt. Umformen liefert das Gewünschte.
Im Fall $p = 2$ geht man analog vor. Zusätzlich berechnet man noch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Big|_{x=y} \ln\|x\| &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \ln\|y + t\frac{y}{\|y\|}\| \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \ln(r+t) \\
&= \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\int\limits_{\partial U_r(0)} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = \frac{1}{r}\, \mu(\partial U_r(0))\, q_0 = 2\pi\, q_0.$$

❑

5.4.12 Satz (*Residuen Satz*)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt, sodass ∂G eine orientierbare $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Weiters seien $a_1, \dots, a_k \in G$ voneinander verschiedene Punkte und h eine harmonische Funktion auf einer offenen Obermenge von $\overline{G} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Dann gilt im Fall $p > 2$*

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = (2-p)p\, \lambda_p(K_1(0)) \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_i}(h)$$

und im Fall $p = 2$

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_i}(h).$$

Beweis. Wähle $r > 0$ so klein, dass $K_r(a_1), \dots, K_r(a_k)$ paarweise disjunkt sind und alle in G enthalten sind. Sei $O := G \setminus \bigcup_{i=1}^{k} K_r(a_i)$. Dann folgt aus dem Greenschen Integralsatz (bzw. Beispiel 2.1.9)

$$\int\limits_{\partial O} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = 0.$$

Damit erhält man im Fall $p > 2$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = -\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial U_r(a_i)} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = (2-p)p\, \lambda_p(K_1(0)) \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_i}(h)$$

und im Fall $p = 2$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\, d\mu(y) = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_i}(h).$$

Dabei ist zu beachten, dass wir $\partial U_r(a_i)$ als Teil von ∂G betrachten und $\nu(y)$ deswegen in das Innere von $U_r(a_i)$ zeigt.

❑

5.5 Eine Entwicklung des Poisson Kerns für Kreisringe

In diesem Abschnitt wollen wir das Dirichletproblem für beschränkte Kreisringe explizit lösen. Da eine Verschiebung bzw. Streckung im Argument nichts an der Harmonizität einer Funktion ändert, können wir o.B.d.A annehmen, dass der Kreisring die Form $A = \{x \in \mathbb{R}^p : r_0 < \|x\| < 1\}$ mit $r_0 > 0$ hat.

5.5.1 Lemma. *Im Fall $p = 2$ sei $m > 0$ und im Fall $p > 2$ sei $m \geq 0$. Sei weiters $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$. Dann gilt für die Funktion*

$$h(x) = \frac{1 - \left(\frac{r_0}{\|x\|}\right)^{2m+p-2}}{1 - r_0^{2m+p-2}} f(x),$$

dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in S^{p-1}$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in r_0 S^{p-1}$. Außerdem ist h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A.

Beweis. Die Kelvintransformierte von f berechnet sich aufgrund der Homogenität durch

$$K[f](x) = \frac{1}{\|x\|^{p-2}} f\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) = \frac{1}{\|x\|^{2m+p-2}} f(x).$$

Also gilt

$$h(x) = \frac{1}{1 - r_0^{2m+p-2}} \left(f(x) - r_0^{2m+p-2} K[f](x)\right).$$

Damit ist h harmonisch auf $\mathbb{R}^p \setminus \{0\} \supseteq \overline{A}$. Die anderen Eigenschaften sind leicht nachzurechnen.

❑

5.5.2 Lemma. *Sei $p = 2$ und $m = 0$. Sei weiters $f \in \mathcal{H}_m(S^{p-1})$. Dann gilt für die Funktion*

$$h(x) = \frac{\ln \|x\| - \ln r_0}{-\ln r_0} f(x),$$

dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in S^{p-1}$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in r_0 S^{p-1}$. Außerdem ist h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A.

Beweis. Da $\ln \|x\|$ harmonisch ist und $f(x)$ konstant ist, sind alle Eigenschaften leicht nachzurechnen.

❑

5.5.3 Bemerkung. Wir verwenden in diesem Abschnitt die Bezeichnungen

$$b_m(x) = \frac{1 - \left(\frac{r_0}{\|x\|}\right)^{2m+p-2}}{1 - r_0^{2m+p-2}}$$

im Fall $p = 2, m > 0$ bzw. $p > 2, m \geq 0$ und

$$b_m(x) = \frac{\ln \|x\| - \ln r_0}{- \ln r_0}$$

im Fall $p = 2$ und $m = 0$.
Damit können wir die Funktion h aus den letzten beiden Lemmas anschreiben als

$$h(x) = b_m(x) f(x) = b_m(x) \int\limits_{S^{p-1}} f(y) Z_m(x,y)\, d\sigma(y) = \int\limits_{S^{p-1}} f(y) b_m(x) Z_m(x,y)\, d\sigma(y).$$

5.5.4 Lemma. *Sei f eine Summe von Kugelfunktionen mit Grad $\leq m$. Dann gilt für die Funktion*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} f(y) \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j(x) Z_j(x,y)\, d\sigma(y),$$

dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in S^{p-1}$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in r_0 S^{p-1}$. Außerdem ist h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A.

Beweis. Folgt aus Lemma 5.5.1 und Lemma 5.5.2 durch Summation (siehe auch Bemerkung 5.5.3).

❑

Analoge Überlegungen führen auf das folgende Lemma. Dabei verwenden wir die Bezeichnung

$$c_m(x) = \|x\|^{-m} \left(\frac{r_0}{\|x\|}\right)^{m+p-2} \frac{1 - \|x\|^{2m+p-2}}{1 - r_0^{2m+p-2}}$$

im Fall $p = 2, m > 0$ bzw. $p > 2, m \geq 0$ und

$$c_m(x) = \frac{\ln \|x\|}{\ln r_0}$$

im Fall $p = 2$ und $m = 0$.

5.5.5 Lemma. *Sei $f : r_0 S^{p-1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $x \mapsto f(r_0 x), x \in S^{p-1}$ eine Summe von Kugelfunktionen mit Grad $\leq m$ ist. Dann gilt für die Funktion*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} f(r_0 y) \cdot \sum_{j=0}^{m} c_j(x) Z_j(x,y)\, d\sigma(y),$$

dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in r_0 S^{p-1}$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in S^{p-1}$. Außerdem ist h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A.

5.5.6 Definition. Der *Poissonkern von A* ist definiert durch

$$\wp_A(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) Z_j(x,y) \text{ für } x \in A, y \in S^{p-1}$$

und durch

$$\wp_A(x,r_0 y) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x) Z_j(x,y) \text{ für } x \in A, y \in S^{p-1}.$$

5.5.7 Lemma. *$\wp_A$ ist wohldefiniert, stetig auf $A \times \partial A$ und $x \mapsto \wp_A(x,y)$ ist harmonisch für jedes feste $y \in \partial A$.*

Beweis. Aus $|b_j(x)| \leq 1$ bzw. $|c_j(x)| \leq \|x\|^{-j} \left(\frac{r_0}{\|x\|}\right)^{j+p-2}$ folgt mit (4.5), dass $|b_j(x)Z_j(x,y)| \leq C j^{p-1} \|x\|^j$ bzw. $|c_j(x)Z_j(x,y)| \leq C j^{p-1} \left(\frac{r_0}{\|x\|}\right)^{j+p-2}$. Damit konvergieren die Reihen in der Definition von $\wp_A$ absolut und gleichmäßig auf $K \times S^{p-1}$ für alle kompakten $K \subseteq A$.
Da alle b_j,c_j und Z_j stetig sind, ist damit auch $\wp_A$ stetig. Für jedes feste $y \in \partial A$ ist $Z_j(\,.\,,y) \in \mathcal{H}_j(S^{p-1})$. Aus den vorangegangenen Lemmas folgt, dass alle $b_j(\,.\,)Z_j(\,.\,,y)$ bzw. $c_j(\,.\,)Z_j(\,.\,,y)$ harmonisch sind. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist auch $\wp_A(\,.\,,y)$ harmonisch (siehe Proposition 2.4.1 (ii)).

❑

5.5.8 Bemerkung. Für eine Funktion $f \in C(\partial A)$ verwenden wir die Bezeichnung

$$P_A[f](x) = \int_{S^{p-1}} f(y) \wp_A(x,y)\, d\sigma(y) + \int_{S^{p-1}} f(r_0 y) \wp_A(x, r_0 y)\, d\sigma(y)$$

für alle $x \in A$. Der nächste Satz zeigt, dass $P_A[f]$ das Dirichlet Problem für A löst.

5.5.9 Satz. *Sei $f \in C(\partial A)$. Die Funktion $h = f \cup P_A[f]$ ist stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A.*

Beweis. Falls $f|_{S^{p-1}}$ und $f(r_0\,.\,)|_{S^{p-1}}$ Summen von Kugelfunktionen sind, wissen wir aus den vorangegangenen Lemmas, dass h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A ist.
Für ein beliebiges f folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, dass wir f durch eine Folge f_n gleichmäßig annähern können, wobei $f_n|_{S^{p-1}}$ und $f_n(r_0\,.\,)|_{S^{p-1}}$ Summen von Kugelfunktionen sind für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n und der Stetigkeit von $\wp_A$ gilt $\lim_{n\to\infty} P_A[f_n](x) = P_A[f](x)$ für $x \in A$. Setze $h_n = f_n \cup P_A[f_n]$, dann konvergiert h_n punktweise gegen h auf $\overline{A}$. Wegen dem Maximumsprinzip gilt

$$\|h_n - h_m\|_{\overline{A}} \leq \|h_n - h_m\|_{\partial A} = \|f_n - f_m\|_{\partial A}.$$

Also konvergiert h_n gleichmäßig auf $\overline{A}$ gegen h. Damit ist h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch auf A (siehe Proposition 2.4.1 (ii)).

❑

Literaturverzeichnis

[ABR] S. AXLER, P. BOURDON, W. RAMEY: *Harmonic Function Theory,* Springer-Verlag, New York 2001.

[H] L. L. HELMS: *Potential Theory,* Springer-Verlag, London 2009.

[HK] W. K. HAYMAN AND P. B. KENNEDY: *Subharmonic Functions I,* Academic Press, London, 1976.

[R] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis,* McGraw Hill, 1974.

Index