Übungen zu Topologie SS17, 7. Übung

1. Zeigen Sie fuer einen vollständig regulären Raum X, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn βX es ist. (Hinweis: Für eine offen-abgeschlossenen Teilmenge A von X, betrachte $\mathbb{1}_A$ und die eindeutige stetige Fortsetzung auf βX. Was bedeutet das für einen Punkt von $\overline{A}^{\beta X} \cap \overline{A^c}^{\beta X}$?)

   Zeigen Sie auch, dass für ein normales X und ein abgeschlossenes $A \subseteq X$ immer βA zu $\overline{A}^{\beta X}$ homöomorph ist.

2. Sei X ein regulärer topologischer Raum und $F \subseteq X$ eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F und paarweise disjunkte O_n, $n \in \mathbb{N}$, gibt, sodass $a_n \in O_n$. Zeigen Sie auch dass jede Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist, wenn $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Sei $F \subseteq \beta\mathbb{N}$ abgeschlossen und unendlich. Zeigen Sie, dass F eine zu $\beta\mathbb{N}$ homöomorphe Teilmenge hat!

   Hinweis: Sei A wie im vorherigen Beispiel. Ist $f : A \to [0, 1]$, so betrachte man $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$ definiert durch $g(n) = f(a_j)$, falls $n \in O_j$ und $g(n) = 0$, falls $n \notin \bigcup_j O_j$. Betrachte nun eine stetige Fortsetzung von g auf $\beta\mathbb{N}$ eingeschränkt auf $\overline{A}^{\beta\mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit f auf A. Beachte dabei, dass $\overline{\mathbb{N} \cap O_j}^{\beta\mathbb{N}} = \overline{O_j}^{\beta\mathbb{N}}$ wegen der Dichtheit von $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$.

4. Zeigen Sie, dass in $\beta\mathbb{N}$ nur die ab einem Index konstanten Folgen konvergieren.

   Hinweis: Ist (x_n) konvergent gegen x, so ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ abgeschlossen.

5. Zeigen Sie, dass ein (T_1)-Raum mit einer lokal-endlichen Basis diskret sein muss.

6. Für unendliche Mengen ist die Menge $\mathcal{E}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M bekanntlich gleichmächtig wie M, d.h. es gibt eine Bijektion $\varphi : M \to \mathcal{E}(M)$. Sei nun M überabzählbar.

   Setzt man $U_y := \{x \in M : y \in \varphi(x)\}$, so zeige man, dass $\{U_y : y \in X\}$ eine bezüglich der diskreten Topologie auf M offene, lokal endliche Überdeckung ist, die aber nicht σ-diskret ist.

   Hinweis: Bezüglich der σ-Diskretheit zeige, dass $U_y \cap U_z$ überabzählbar für $y \neq z$ ist.

7. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ topologische Räume. Sei $\dot{\bigcup}_{i\in I} X_i \times \{i\}$ versehen mit der finalen Topologie bezüglich der Funktionen $\phi_i : X_i \to \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i \times \{i\}$, $x \mapsto (x, i)$. Zeigen Sie, dass dieser topologische Raum genau dann metrisierbar ist, wenn alle X_i es sind. Geben Sie eine passende Metrik an!