Übungen zu Topologie SS17, 6. Übung

1. Sei $\varrho : M \times M \to [0, +\infty)$ eine Funktion, die $\varrho(x, x) = 0$, $\varrho(y, x) = \varrho(x, y)$ und $\varrho(x, y) \leq c \max(\varrho(x, z), \varrho(z, y))$ für alle $x, y, z \in M$ erfüllt, wobei $c > 0$ eine feste Zahl ist.

   Zeigen Sie, dass die Filterbasis $\{U_\varrho(\epsilon) : \epsilon > 0\}$ eine Uniformität erzeugt, wobei $U_\varrho(\epsilon) = \{(x, y) \in M \times M : \varrho(x, y) < \epsilon\}$.

   Zeigen Sie auch, dass es eine Pseudometrik gibt, welche diese Uniformität erzeugt und $\frac{\varrho(.,.)^r}{2} \leq d(.,.) \leq \varrho(.,.)^r$ für eingeeignetes $r > 0$ erfüllt.

2. Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar ist, wenn der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(e)$ des neutralen Elements eine abzählbare Basis hat und $\bigcap_{V \in \mathfrak{U}(e)} V = \{e\}$ erfüllt.

   Zeigen Sie weiters, dass es in dem Fall eine mit $\mathcal{T}$ verträgliche Metrik gibt, die links invariant ist, dh. $d(gx, gy) = d(x, y)$ für alle $x, y, g \in G$ erfüllt.

3. Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, X eine Menge und C eine System von Teilmengen von X, welches bzgl. $\subseteq$ eine gerichtete Menge ist. Zeigen Sie, dass die Menge aller Mengen der Form $(C \in C, U \in \mathcal{U})$

   $$\{(f, g) \in M^X \times M^X : \forall x \in C \ : \ (f(x), g(x)) \in U\}$$

   Filterbasis einer Uniformität $\hat{\mathcal{U}}_C$ auf M^X ist. Welche Uniformität ergibt sich, wenn C die Menge aller endlichen Teilmengen von X ist, und welche im Fall, dass $C = \{X\}$ und $\mathcal{U}$ von einer Metrik erzeugt wird.

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Mit A^0 wollen wir die Menge aller Kondensationspunkte bezeichnen, dh. alle $x \in X$, sodass jede Umgebung einen überabzählbaren Schnitt mit A hat. Zeigen Sie, dass Kondensationspunkte Häufungspunkte sind, dass A^0 abgeschlossen ist, dass $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$. Weiter zeige man, dass in Räumen mit dem $(ABII)$ die Menge $A \setminus A^0$ immer abzählbar ist und dass $(A^0)^0 = A^0$. Schließlich zeige man, dass sich jeder topologischer Raum mit dem $(ABII)$ in der Form $A \cup B = X$ mit disjunkten A und B schreiben lässt, wobei $A = \overline{A}$ keine isolierten Punkte hat und wobei B abzählbar ist.

   Hinweis: Für eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ betrachte $C := \{B \in \mathcal{B} : B \cap A \text{ ist abzählbar }\}$.

5. Sei (X, d) ein vollständig metrischer Raum ohne isolierte Punkte. Zeigen Sie, dass X eine homöomorphe Kopie der Kantorschen Menge enthält.

   Hinweis: Durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ definiere für $i_1, \ldots, i_k \in \{0, 1\}$ offene Mengen $V_{i_1,\ldots,i_k}$ mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{k}$ und sodass

   $$\overline{V_{i_1,\ldots,i_{k-1},0}} \cap \overline{V_{i_1,\ldots,i_{k-1},1}} = \emptyset, \quad V_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \subseteq V_{i_1,\ldots,i_k}.$$

6. Zeigen Sie, dass jeder separable und vollständig metrische Raum X entweder abzählbare Mächtigkeit oder die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat!

7. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten C eines Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ immer von der Form $\prod_{i \in I} C_i$ ist, wobei die C_i Zusammenhangskomponenten von $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ist.