Übungen zu Topologie SS17, 2. Übung

1. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$.

   Zeigen Sie, dass x genau dann Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist, dh. $x \in \bigcap_{i\in I} \overline{x_i : j \geq i}$, wenn x Häufungspunkt der Filterbasis $x(\mathfrak{B}_I)$ ist.

   Zeigen Sie weiters, dass $(x_{i(j)})_{j\in J}$ genau dann ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$ ist, dh. für jedes $i_0 \in I$ gibt es ein $j_0 \in J$ mit $\{i(j) : j \geq j_0\} \subseteq \{i : i \geq i_0\}$, wenn $[\mathfrak{B}_I] \subseteq [i(\mathfrak{B}_J)] = [i[\mathfrak{B}_J]]$. Insbesondere ist die Eigenschaft Teilnetz zu sein, nicht von den Netzen, sondern nur von den betrachteten gerichteten Mengen und der Abbildung $i : J \to I$ abhängt.

   Zeigen Sie damit, dass aus $(x_i)_{i\in I} \to x$ auch $(x_{i(j)})_{j\in J} \to x$ folgt.

2. Sei wieder $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$. Sei $\mathfrak{C}$ eine Filterbasis auf X mit $[\mathfrak{C}] \supseteq [x(\mathfrak{B}_I)]$. Setze

   $$J := \{(k,C) : k \in I, C \in \mathfrak{C}, x_k \in C\},$$

   und definieren

   $$(k_1,C_1) \leq (k_2,C_2) :\Leftrightarrow k_1 \leq k_2 \wedge C_1 \supseteq C_2 .$$

   Zeigen Sie, dass J eine gerichtete Menge ist! Setzt man $i((k,C)) = k$, so zeige, dass $(x_{i(j)})_{j\in J}$ ein Teilnetz ist, wobei $[\mathfrak{C}] = [x \circ i(\mathfrak{B}_J)]$.

   Schließlich zeige man, dass x genau dann Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist, wenn es ein gegen x konvergentes Teilnetz gibt!

3. Sei (M,d) ein pseudometrischer Raum; dh. d erfüllt alle Axiome einer Metrik außer $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Definiere für $\epsilon > 0$ $U_\epsilon = \{(x,y) \in M \times M : d(x,y) < \epsilon\}$. Man zeige, dass der von der Filterbasis (warum ist sie das?) $\{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$ erzeugte Filter eine Uniformität $\mathcal{U}(d)$ auf M ist. Weiters zeige man, dass die von d erzeugte Topologie auf M mit der von $\mathcal{U}$ erzeugter Topologie übereinstimmt.

4. Sei $(G,\mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, dh. $(x,y) \mapsto x\cdot y$ (als Abbildung von $G\times G$ nach G) und $x \mapsto x^{-1}$ sind stetig. Ist $\mathfrak{U}(e)$ der Umgebungsfilter des neutralen Elementes, so zeige man, dass durch

   $$\mathcal{U}_r := [\{U_r(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\}],\ \mathcal{U}_l := [\{U_l(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\}],$$

   $$\mathcal{U} := [\{U_l(W) \cap U_r(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\}],$$

   drei Uniformitäten auf G definiert sind, wobei

   $$U_r(W) = \{(x,y) \in G\times G : xy^{-1} \in W\},\ U_l(W) = \{(x,y) \in G\times G : x^{-1}y \in W\}.$$

   Zeigen Sie weiters, dass die von diesen Uniformitäten erzeugten Topologien mit $\mathcal{T}$ übereinstimmen.

   Hinweis: Links- und Rechtstranslationen sind Homöomorphismen.

5. Seien M,N nichtleere Mengen und $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M und $\mathcal{V}$ eine solche auf N. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt gleichmäßig stetig, falls der von $(f\times f)(\mathcal{U})$ erzeugte Filter auf $N\times N$ feiner als $\mathcal{V}$ ist.

   Zeigen Sie:

(a) $f : M \to N$ ist genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn es für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt sodass $(f \times f)(U) \subseteq V$.

(b) Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist stetig bzgl. der von der Uniformität erzeugten Topologie.

(c) Die Hinereinanderausführung gleichmäßig stetiger Abbildung ist gleichmäßig stetig.

(d) Sollten die beteiligten Uniformitäten von (Pseudo)-Metriken erzeugt werden, so ist der Begriff 'gleichmäßig stetig' hier äquivalent zur bekannten Begriffbildung 'gleichmäßig stetig' zwischen (Pseudo)-metrischen Räumen.

6. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ und $(X, \mathcal{T})$ topologische Räume. Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann homöomorph zu einem $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ (versehen mit der Spurtopologie der Produkttopologie) ist, wenn es eine Punkte trennende Familie $f_i : X \to X_i, i \in I$ von Funktionen auf X gibt, sodass $\mathcal{T}$ genau die initiale Topologie bezügliche dieser Funktionen ist.

   Zeigen Sie in dem Fall auch, dass sich die Axiome $(T0)$, $(T1)$, $(T2)$ von den $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ auf $(X, \mathcal{T})$ vererbt.

   Schließlich sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bezügliche dieser Funktionen f_i, wobei aber die f_i nicht Punkte trennend ist. Kann $(X, \mathcal{T})$ trotzdem $(T0)$, $(T1)$ oder $(T2)$ sein?

7. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Zeigen Sie, dass die e enthaltende Zusammenhangskomponente ein Normalteiler ist!

   Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit von $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ und die von $y \mapsto xyx^{-1}$!

8. Betrachte den reellen Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ aller reellen und quadratisch summierbaren Folgen. Dabei sei $X \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen mit rationalen Folgengliedern. Zeigen Sie, dass X versehen mit der Spurtopologie total zusammenhangslos, aber nicht Null-dimensional ist.

   Hinweis: Für total zusammenhangslos zeigen Sie, dass für zwei verschiedene Folgen $x, y \in X$ zwei in X offene, disjunke G_x, G_y existieren, sodass $x \in G_x, y \in G_y$ und $X = G_x \cup G_y$.

   Für den zweiten Teil konstruieren Sie für jede beschränkte und offene Nullumgebung $V \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ ein Element $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, das im Rand von V ist.