

Übungen zu Topologie SS17, 1. Übung

1. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Man zeige, dass die Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ um die Punkte $x \in X$ folgende drei Eigenschaften haben:

- (a) Für jedes $x \in X$ ist $\mathfrak{U}(x)$ ein Filter.
- (b) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $x \in U$.
- (c) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $W \in \mathfrak{U}(x)$ mit $W \subseteq U$, sodass für alle $y \in W$ gilt, dass $U \in \mathfrak{U}(y)$.

Zeigen Sie auch umgekehrt, dass wenn für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ mit obigen Eigenschaften gegeben ist, es eine eindeutige Topologie \mathcal{T} auf X gibt, sodass die $\mathfrak{U}(x)$ genau die Umgebungsfilter sind.

Hinweis für die Umkehrung: Definieren Sie \mathcal{T} als die Menge aller Mengen O mit $O \in \mathfrak{U}(x)$ für alle $x \in O$. Zeigen Sie auch, dass für $U \in \mathfrak{U}(x)$ die Menge $\{z \in U : U \in \mathfrak{U}(z)\}$ offen ist.

2. Sei X eine unendliche Menge und sei \mathcal{T} die Menge aller Komplemente endlicher Mengen angereichert und die leere Menge (Kofinite Topologie).

Man zeige, dass (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum ist. Weiters zeige man, dass jede Umgebung eines Punktes von X schon offen ist. Ist (X, \mathcal{T}) kompakt, ist es Hausdorffsch? Sind einpunktige Mengen offen?

3. Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $h : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ heißt Kuratowski-Mengenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

- (a) $h(\emptyset) = \emptyset$
- (b) $A \subseteq h(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$
- (c) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$
- (d) $h \circ h = h$

Man zeige: Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, und ist $h(A) := \overline{A}$, so ist h eine Kuratowski-Mengenfunktion.

Man zeige auch: Ist h eine Kuratowski-Mengenfunktion auf einer Menge X , so gibt es eine eindeutige Topologie, sodass $h(A) := \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$.

4. Sei M eine mit \leq total geordnete Menge. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_{ord}(M)$ auf M ist die von der Subbasis $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a) : a \in M\}$ auf M erzeugte Topologie.

Unter welcher Bedingung ist $\{(a, b) : a < b\}$ eine Basis von \mathcal{T}_{ord} ?

Zeigen Sie, dass die Topologie, welche von $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a] : a \in M\}$ erzeugt wird feiner als \mathcal{T}_{ord} ist!

5. Geben Sie eine Teilmenge M von \mathbb{R} an, sodass $\mathcal{T}_{ord}(M) \neq \mathcal{T}_{ord}(\mathbb{R})|_M$.

6. Ein Filter \mathcal{U} auf $M \times M$ für eine nichtleere Menge M heißt uniforme Struktur oder Uniformität auf M , falls

- (U1) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $\Delta := \{(x, x) : x \in M\} \subseteq U$.
- (U2) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\} \in \mathcal{U}$.
- (U3) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, sodass $V \circ V \subseteq U$, wobei $V \circ V := \{(x, z) : \exists y \in M, (x, y) \in V, (y, z) \in V\}$ (Relationenprodukt).

Zeigen Sie: \mathcal{U} hat eine Filterbasis bestehend aus symmetrischen Mengen ($U = U^{-1}$). Aus $V, W \in \mathcal{U}$ folgt $V \circ W \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}^n := \{V_1 \circ \dots \circ V_n : V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}\}$ und auch $\hat{\mathcal{U}}^n := \{V \circ \dots \circ V : V \in \mathcal{U}\}$ sind jeweils Filterbasen von \mathcal{U} .

7. Sei \mathcal{U} eine Uniformität auf M . Für $x \in M$ sei

$$\mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \quad \text{wobei } U_x := \{y \in M : (x, y) \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{U}_x für jedes $x \in M$ ein Filter ist, und dass es eine Topologie auf M gibt, sodass die \mathcal{U}_x genau die Umgebungfilter dieser Topologie sind.

8. Sei \mathcal{U} eine Uniformität auf M . Für $x \in M$ sei

$$\mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \quad \text{wobei } U_x := \{y \in M : (x, y) \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{U}_x für jedes $x \in M$ ein Filter ist, und dass es eine Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ auf M gibt, sodass die \mathcal{U}_x genau die Umgebungfilter dieser Topologie sind. Zeigen Sie auch, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt (T0)
- $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt (T1)
- $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt (T2)
- $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$.

9. Sei X ein nichtleere Menge und \mathfrak{B} eine Filterbasis auf X . Dann zeige man, dass

$$I = \{(y, B) \in X \times \mathfrak{B} : y \in B\}$$

versehen mit der Relation $(y_1, B_1) \leq (y_2, B_2) :\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2$ eine gerichtete Menge. Zeige weiters, dass für das Netz $(x_i)_{i \in I}$ definiert durch $x_i = y$, wenn $i = (y, B)$ gilt

$$x(\mathfrak{B}_I) = \mathfrak{B},$$

wobei \mathfrak{B}_I die Filterbasis $\{\{s \geq r\} : r \in I\}$ auf I ist.