Siebte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $K_1(0)$ stetig fortsetzbar, wobei $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $f(z) = z^3$ in $\mathbb{D}$?

2. Wieviel Nullstellen hat $p(z) = z^5 + 4z^2 + 2z + 1$ in $\mathbb{D}$?

3. Sei $f : D \to \mathbb{D}$ holomorph, wobei $D = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < +1\}$. Angenommen es gilt $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Man zeige, dass dann auch $\lim_{|x|\to+\infty} f(x + iy) = 0$ für alle $y \in (-1, 1)$.

   Hinweis: Betrachte $\mathcal{F} := \{z \mapsto f(z+r) : r \in \mathbb{R}\}$ als Familie von Funktionen auf $(-1, 1) \times (-1, 1)$.

4. Zeigen Sie, dass $p_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen $\exp(z)$ konvergiert, indem Sie zeigen, dass $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt ist, und indem Sie $\lim_{n\to\infty} p_n^{(k)}(0)$ für alle k bestimmen.

5. Bestimmen Sie eine konforme Abbildung
   - von $\mathbb{C}^+$ auf $\mathbb{D}$ ($\mathbb{C}^+$ die obere Halbebene)
   - von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C}^+$
   - von $\mathbb{D}$ auf die offene rechte Halbebene
   - vom offenen ersten Quadranten auf die offene rechte Halbebene
   - von $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < +1\}$ auf $\mathbb{D}$

6. Bestimmen Sie eine konforme Abbildung
   - von $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^+$ auf $\mathbb{D}$
   - von der rechten Halbebene auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
   - von $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < +1\}$ auf die offene rechte Halbebene

7. Bestimmen Sie $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^+)$, wobei $\mathbb{C}^+$ die obere Halbebene ist!

8. Zeigen Sie, dass $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}\}$ in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ eine normale Familie ist. Wie verhält es sich mit $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^+\}$ bzw. $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^+, f(0) = i\}$?

9. Zeigen Sie: Gilt für ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$, dass $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten hat, so gibt es ein $f \in H(K)$, welches sich nicht gleichmäßig auf K durch Polynome approximieren lässt!

   Hinweis: Sei w aus einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und betrachte $f(z) = \frac{1}{z-w}$. Würde sich f durch Polynome approximieren lassen, so erhält man $|(z-w)p(z)-1| < 1, z \in K$, für eingewisses Polynom p.