Sechste Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $r > 0$, sodass $K_r(w) \subseteq G$. Weiters sei $f \in H(G)$, und sei vorausgesetzt, dass $f|_{U_r(w)}$ injektiv ist. Zeige, dass die Umkehrfunktion von f gegeben ist als

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - b} \, d\zeta, \quad b \in f(U_r(w)) .$$

   Man zeige auch, dass für $f \in H(G)$ mit $f'(w) \neq 0$ für hinreichend kleines $r > 0$ die $f|_{U_r(w)}$ injektiv ist.

   Hinweis: Verwende Beispiel 7 der fünften Übung mit $h(z) := z$.

2. Man zeige für $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} \, dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)} .$$

   Hinweis: Bezeichne $\log z$ jenen Zweig des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ analytisch ist und $\log(-1) = i\pi$ erfüllt. Integrieren Sie für $R > 0$ (groß) und $\epsilon > 0$ (klein) die Funktion $f(z) := \frac{\exp(a \log z)}{(1+z)^2}$ längs des geschlossenen Weges, der sich aus der Zusammensetzung von geeigneten Umparametrisierungen von $[t_{\epsilon,R}, 2\pi - t_{\epsilon,R}] \ni t \mapsto R\exp(it) \in \mathbb{C}$ ($t_{\epsilon,R} \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $R \sin t_{\epsilon,R} = \epsilon$), $\overrightarrow{(R\exp(-it_{\epsilon,R})(2\epsilon \exp(-i\frac{\pi}{6}))}$, $[\frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}] \ni t \mapsto 2\epsilon \exp(-it) \in \mathbb{C}$ und $\overrightarrow{(2\epsilon \exp(i\frac{\pi}{6}))(R\exp(it_{\epsilon,R})}$. Skizze! Lassen Sie R gegen $+\infty$ und ϵ gegen 0 gehen.

3. Man zeige für $\lambda > 1$ mit Hilfe das Satzes vom logarithmischen Residuum, dass die Gleichung $z + \exp(-z) = \lambda$ in der rechten offenen Halbebene genau eine Lösung hat.

   Hinweis: Für $R > 0$ (groß) bestimme $\frac{1}{2i\pi} \int_{\overrightarrow{(-iR)(+iR)}} \frac{(z+\exp(-z)-\lambda)'}{z+\exp(-z)-\lambda} \, dz$, indem man zeigt, dass auf einer das Bild von $\overrightarrow{(-iR)(+iR)}$ enthaltenden offenen Menge eine Stammfunktion des Integranden mit Hilfe des Zweiges des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ analytisch ist und $\log(-1) = i\pi$ erfüllt, dargestellt werden kann. Entsprechend bestimme man $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{(z+\exp(-z)-\lambda)'}{z+\exp(-z)-\lambda} \, dz$ mit $\gamma_R(t) = R\exp(-it)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, für hinreichend große R mittels des Zweiges des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ analytisch ist und $\log(+1) = 0$ erfüllt.

4. Sei M ein topologischer Raum, der Hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und S eine Menge (Atlas) von Funktionen (Karten) $f : U_f \to D_f$. (M, S) heißt komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1, wenn

   - für alle $f \in S$ die Mengen $U_f \subseteq M$ und $D_f \subseteq \mathbb{C}$ offen sind und f einen Homöomorphismus abgibt, wenn U_f und D_f mit den jeweiligen Spurtopologien versehen werden,
   - für $f, g \in S$ mit $U_f \cap U_g \neq \emptyset$ die Abbildung $g \circ f^{-1} : f(U_f \cap U_g) \to g(U_f \cap U_g)$ holomorph ist,
   - $\bigcup_{f \in S} U_f = M$.

Sind $(M_1, S_1), (M_2, S_2)$ zwei komplexe Mannigfaltigkeiten, so heißt eine Abbildung $T : M_1 \to M_2$ holomorph, wenn $g \circ T \circ f^{-1}$ (bestimmen Sie auch den Definitionsbereich dieser Abbildung) für alle $f \in S_1$ und $g \in S_2$ holomorph ist.

Versehen Sie offene $G \subseteq \mathbb{C}$ und dann auch $\mathbb{C}_\infty$ mit Karten derart, dass man in natürlicher Weise eine komplexe Mannigfaltigkeit erhält, und begründen Sie, warum dem so ist!

Zeigen Sie auch, dass für offenes $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}_\infty$ genau dann meromorph im Sinne der Vorlesung ist, wenn sie holomorph im Sinne obiger Definition ist und auf keiner Zusammenhangskomponente von G identisch gleich ∞ ist.

5. Mit den Begriffsbildungen aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass für komplexe Mannigfaltigkeiten M_1, M_2, M_3 jeweils versehen mit einem Atlas und holomorphe $T : M_1 \to M_2$, $R : M_2 \to M_3$ auch $R \circ T$ holomorph ist.

   Schließlich zeige man ohne Zuhilfenahme von Korollar 2.10.4, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ bezüglicher der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet.

6. Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz: Sei $f(z)$ analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $z_0 \in \mathbb{D}$. Sei n die Vielfachheit der Nullstelle z_0 der Funktion $f(z) - f(z_0)$. Ist $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, so gilt

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^n$$

   für $|z| < 1$.

   Ist $f(z_0) = 0$, und gilt in dieser Ungleichung für ein $z \in \mathbb{D}$ Gleichheit, so gilt $f(z) = e^{i\psi} \cdot (\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z})^n$ mit einem $\psi \in [0, 2\pi]$.
   Hinweis: Man wende das Maximumprinzip auf

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \bar{f}(z_0) f(z)} : \left(\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^n$$

   an.

7. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ sei $D(z_1, z_2) := |\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1}|$. Man zeige, dass D eine Metrik auf der Einheitskreisscheibe ist, die invariant ist unter jeder Funktion $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, d.h.

$$D\big(f(z_1), f(z_2)\big) = D(z_1, z_2), \quad f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

8. Zeige, dass jede Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, eine Kontraktion des metrischen Raumes $\langle \mathbb{D}, D \rangle$ ist.

9. Ist die Einheitskugel von $H(D) \cap L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_2$ eine normale Familie in $C(D, \mathbb{C})$?